
756;U



Abdul Rahman Khan
A Course in Subsidiary Mathematics
for B.Sc Physics
Parts 2nd
8/10/-



سلسلۂ مطبوعات جامعہ عثمانیہ

نصاب ذیلی ریاضی

حصۂ دوم



برائے طبیعیات بی۔ایس سی

تالیف

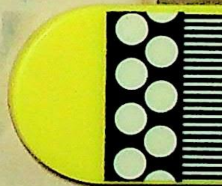
مولوی محمد عبدالرحمن خانصاحب بی۔ایس سی آنرز (لندن)

اسوشیئیٹ آف دی رائل کالج آف سائنس (لندن)۔ فیلو آف دی رائل اسٹرونامیکل سوسائٹی۔ فیلو آف دی فزیکل سوسائٹی لندن

سابق صدر کلیۂ جامعۂ عثمانیہ حیدرآباد دکن

۱۳۶۲ھ م ۱۳۵۲ف م ۱۹۴۳ع

دارالطبع جامعہ عثمانیہ سرکار عالی حیدرآباد دکن



تمہید

منجانب مؤلف کتاب

نصاب ذیلی ریاضی برائے طبیعیات بی۔ ایس سی وغیرہ حصۂ دوم کی تالیف میں وہی اصول پیش نظر رکھے گئے ہیں جو حصۂ اوّل کی تالیف کے وقت تھے۔ حتی الامکان جدید و مستند ترین طریقے استعمال کیے گئے اور بندیوں کی تمام مشکلات کو آسان کرنے کی کوشش کی گئی۔ نصاب کے حدود کے اندر ابتدائی امور سے آغاز کر کے کافی بلند پایہ نتائج تک بحث کی گئی ہے۔ ہر مسئلہ سے متعلق متعدد توضیحی مثالیں حل کر کے بتائی گئی ہیں۔ جا بجا ہندسی شکلیں صحت و وضاحت کے ساتھ کھینچی گئی ہیں تاکہ طالب علم کو ان کے سمجھنے میں دقت نہ ہو۔ مشق کے لیے جو سوالات دیے گئے ہیں نسبتہً سلیس ہیں اور مختلف شعبہ جات کے لیے کارآمد ہو سکتے ہیں۔

افسوس ہے کہ نصاب کی مجبوریوں کی وجہ سے مجسّمات کے ہندسۂ تحلیلی میں احصاء کا خاطر خواہ اطلاق نہیں بتایا جا سکا۔ اور نہ تفرقی مساواتوں کے اقسام اور ان کے حل کے طریقوں پر زیادہ تفصیل کے ساتھ لکھا جا سکا۔ بریں ہم قوی امید ہے کہ اس نصاب پر اچھی طرح حاوی ہو جانے کے بعد طبیعیات، انجینیری اور کیمیا کے طالب علم اعلیٰ ریاضی کے اکثر و بیشتر مسائل بآسانی سمجھ سکینگے اور مزید

کوشش سے بطور خود نظری طبیعیات پر عبور حاصل کر سکینگے۔
اس نصاب کی تیاری میں زیادہ تر مندرجۂ ذیل کتابوں سے استفادہ کیا گیا:۔

(1) Elements of the Differential and Integral Calculus by *W.A. Granville, P.F. Smith and W.R. Longley.*

(2) The Calculus by *Hans Dalakar* and *H.E. Hartig.*

(3) *D. Humphrey's* Advanced Mathematics.

(4) F.*S. Wood and* F.*H. Bailey's* A course in Mathematics (2 Volumes).

(5) F.*G.W. Brown's* Higher Mathematics.

(6) *Benjamin Williamson's* Elementary Treatise on the Differential Calculus.

(7) *W.E. Byerley's* Elements of the Integral Calculus.

محمد عبد الرحمن خاں

فہرستِ مضامین

نصاب ذیلی ریاضی برائے طبیعیات بی۔ ایس سی وغیرہ

حصّہ دوم (احصاء)

بسم اللہ الرحمٰن الرحیم

نصابِ ذیلی ریاضی

برائے

طبیعیات بی۔ اے وغیرہ

حصّۂ دوم

احصاء

پہلا باب

مبادیات

احصاء ریاضی کے اُس زبردست شعبہ کا نام ہے جس میں مقادیر کے تغیرات اور اُن کے باہمی تعلقات معلوم کیے جاتے ہیں۔ اس کے دو بڑے حصّے ہیں: ایک حصّہ تفرقی احصاء کہلاتا ہے اور دوسرا تکملی احصاء۔ تفرقی احصاء میں مقادیر کے تغیر کی شرحوں اور ان کے خواص سے بحث کی جاتی ہے۔ تکملی احصاء اس کی ضد ہے اور اس میں شرح تغیر کی مدد سے خود متغیر مقدار کی تعیین کی جاتی ہے۔

یہ عجیب اتفاق ہے کہ احصاء کے سب سے پہلے بانی یعنی ارشمیدس (Archimedes) نے پہلے تکملی احصاء کے مسائل حل کرنے کے طریقے دریافت کیے مثلاً منحنی خطوں سے محصور رقبوں کی تعیین، وغیرہ اور اس کے بعد اپنے ایجاد کردہ لولبی کے خطِ مماس کی تلاش میں تفرقی احصاء کے اصول استعمال کیے۔ گویا نیوٹن (Newton) اور لائبنٹس (Leibniz) سے

جو بلاشبہ احصاء کے موجد سمجھے جاتے ہیں تقریباً دو ہزار برس پہلے ارشمیدس نے احصاء کے طریقے استعمال کر کے ریاضی کے بعض اہم اور کار آمد مسائل حل کیے [واضح ہو کہ ارشمیدس، افلاطون کی وفات کے ساٹھ سال بعد سائراکیوس (Syracuse) صقلیہ میں پیدا ہوا]۔ ارشمیدس کے بعد کیپلر (Kepler) نے ۱۶۱۵ء میں شراب کے پیپوں، وغیرہ کا حجم ناپنے سے متعلق ایک کتاب لکھی جس میں تکملی احصاء کے طریقے کام میں لائے گئے۔ سترہویں صدی کے ریاضی دان جیسے کواِلیئری (Cavalieri)، فیرما (fermat)، والس (Wallis) بیرو (Barrow) وغیرہ جس قسم کی تحقیقات میں مصروف تھے اس کا یہ لازمی نتیجہ تھا کہ نیوٹن اور لائبنٹس کے ہاتھوں احصاء کی باضابطہ تنظیم عمل میں آئی۔

قبل اس کے کہ ہم احصاء کے اصول اور طریقۂ عمل پر بحث کریں بعض اصطلاحوں اور ان کے صحیح مفہوم سے واقفیت ضروری ہے۔ ریاضی کے مختلف شعبوں سے طالب علم کو اب تک جو اصطلاحیں معلوم ہوئی ہیں اُن میں تفاعل، تابع متغیر، متغیر متبوع اور مستقل بہت ضروری ہیں۔ جب کبھی دو مقداروں میں اس قسم کا تعلق ہوتا ہے کہ ان میں سے ایک کے اندر کوئی بھی تغیر واقع ہوتا ہے تو دوسری مقدار میں بھی اس کے متناظر ایک تغیر پیدا ہوتا ہے۔ ایسی صورت میں موخر الذکر مقدار کو پہلی مقدار کا تفاعل کہتے ہیں۔ اس کتاب میں جو تفاعل استعمال ہونگے ان کو دو حصوں میں تقسیم کر سکتے ہیں:۔ جبری اور ماورائی۔

جبریہ تفاعل محدود رقموں پر مشتمل ہوتے ہیں۔ یہ رقمیں جمع، تفریق، ضرب، تقسیم اور جذر کے اعمال سے مربوط ہوتی ہیں۔

جو تفاعل جبریہ نہ ہوں ماورائی کہلاتے ہیں۔ اس کتاب میں صرف جبریہ اور ابتدائی ماورائی تفاعلوں پر بحث کی جائیگی۔

جبریہ تفاعلوں کی مثالیں:۔

(۱) $۲\,لا^{۵} + \frac{۳}{۴}\,لا^{۴} - ۷\,لا^{۳} - لا^{۲} + ۳$ لا کا کثیر رقمی تفاعل ہے۔

(۲) $\sqrt{ا\,لا^{۲} + ب^{۲}} + لا + ج$ لا کا غیر منطق تفاعل ہے۔

(۳) $\dfrac{۳\ لا^{۳} + ۳\ لا - ۵}{لا^{۲} - ۴\ لا + ۱}$ منطق کسر ہے۔

ماورائی تفاعلوں کی مثالیں :-

(۱) جب لا — علمِ مثلث سے متعلق، تفاعل

(۲) جم$^{-۱}$ لا — مقلوب مثلثی تفاعل

(۳) لوک$_{و}$ لا، لوک$_{۱}$ لا — لوکارتمی تفاعل

(۴) و^{لا} — قوت نمائی تفاعل

تفاعلی ترقیم — جب کسی جماعت یا نوع کے (نہ کہ کسی خاص) تفاعل سے بحث کرنی مقصود ہو تو اس جماعت یا نوع کے تفاعل کو ف (لا) کے ذریعہ تعبیر کرتے ہیں۔ پڑھتے وقت اس کو "لا کا ف - تفاعل" یا مختصراً "لا کا ف" کہتے ہیں۔ اسی طرح فا (لا) اور فہ (لا) وغیرہ بھی اس مقصد کے لیے عام طور پر مروج ہیں۔

اس قسم کی عام تفاعلی ترقیم سہولت کی خاطر بطور اختصار کسی ایک خاص تفاعل کے لیے استعمال کی جاتی ہے۔ مثلاً

ف (لا) سے ۲ لا^{۳} + لا^{۲} + ۳ لا - ۵ مراد لی جاسکتی ہے۔ اور ایسی صورت میں لا کے مصرحہ بالا کثیر رقمی جملہ کو اس کا "ف - تفاعل" قرار دیتے ہیں۔ اس طرح فا (لا) سے جب لا مراد لی جاسکتی ہے اور لا کی جیب کو اس کا فا - تفاعل قرار دیا جاتا ہے۔ اس ترقیم کے بموجب اگر ف (ر) لکھا جائے تو یہ فرض کر لیا جاتا ہے کہ اس سے مراد

۲ ر^{۳} + ر^{۲} + ۳ ر - ۵ ہے،

اور اگر ف (۳) لکھا جائے تو اس سے مراد

۲ (۳)^{۳} + (۳)^{۲} + ۳ × ۳ - ۵ ہے،

اسی طرح ف (ر - لا) سے مراد ۲ (ر - لا)^{۳} + (ر - لا)^{۲} + ۳ (ر - لا) - ۵، ہے۔

اور فا (۲ + لا) سے مراد جب (۲ + لا) ہے وغیرہ -

متبوع متغیر اور تابع متغیر کا مفہوم - اگر کسی مساوات میں صرف دو ہی متغیر ہوں تو ان میں سے ایک متغیر کو خاص خاص قیمتیں دی جا سکتی ہیں اور ان کے لحاظ سے دوسرے متغیر کی متناظر قیمتیں دریافت ہو جاتی ہیں - جس متغیر کو اس طرح خاص خاص قیمتیں دی جاتی ہیں متبوع متغیر کہلاتا ہے اور دوسرا متغیر تابع متغیر یا تفاعل کہلاتا ہے -

وقفہ - سہولت کی خاطر بلکہ بعض اوقات بالالتزام متبوع متغیر کی وسعت محدود کر دی جاتی ہے - مثلاً فرض کرو

$$ما = \sqrt{۱ - لا^۲}$$

خیالی مقادیر سے بچنے کے لیے لا کو + ۱ سے زیادہ یا -۱ سے کم قیمتیں نہیں دی جانی چاہئیں - اس تحدید کو یہ کہہ کر ظاہر کیا جاتا ہے کہ لا وقفہ (-۱ ، +۱) کے وقفہ اور اس کے مشمولہ نقطوں کے اندر واقع ہے - تحریر کے ذریعہ یہ مفہوم اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے $-۱ \leqq لا \leqq ۱$

عام طور پر اگر لا کی وسعت ا اور ب عددوں کے مابین ہے تو کہا جاتا ہے کہ لا وقفہ (ا ، ب) کے اندر واقع ہے - اور لکھا جاتا ہے $ا \leqq لا \leqq ب$

اگر کوئی ایک یا دونوں سرے پر کے نقطوں کو وقفہ سے خارج کرنا مقصود ہو تو حسبِ ضرورت مساوات کی ایک یا دونوں علامتیں متروک کر دی جاتی ہیں - جب یہ بتانا مقصود ہوتا ہے کہ لا کوئی سی حقیقی قیمت اختیار کر سکتا ہے تو لکھا جاتا ہے

$$-\infty < لا < \infty$$

تفاعل محدود یا معروف - اگر ف (لا) کی کوئی قیمت ہوتی ہے جبکہ لا = ا تو کہا جاتا ہے کہ یہ تفاعل لا = ا پر محدود یا معروف ہے

وحید القیمت اور کثیر القیمت تفاعلوں کا مفہوم - اگر کسی وقفہ کے اندر متبوع متغیر کی ہر قیمت کے لیے کسی تفاعل کی صرف ایک ہی متناظر قیمت ہوتی ہے تو کہا جاتا ہے کہ وہ تفاعل وقفۂ مذکور کے اندر وحید القیمت ہے۔ اور اگر تفاعل متبوع متغیر کی ہر قیمت کے لیے ایک سے زیادہ متناظر قیمتیں رکھتا ہے تو اس کو کثیر القیمت کہتے ہیں -

مثالیں

(١) اگر ف(لا) = ٢لا^{٣} + ½ لا^{٢} + ٣لا - ٤ تو بتاؤ کہ ف(٢) = ٢٠
اور ف(√٢) = ٧√٢ - ٣

(٢) اگر فہ(لا) = مس لا تو فہ(لا + ما) = (فہ(لا) + فہ(ما)) / (١ - فہ(لا) فہ(ما))

(٣) اگر فا(لا) = جب لا تو فا(٣لا) = ٣ فا(لا) - ٤{فا(لا)}^{٣}

(٤) اگر ف(و) = ا^{و} - ا$^{-و}$ تو ف(-و) = -(ا^{و} - ا$^{-و}$)
= - ف(و)

(٥) اگر فہ(و) = ا^{و} + ا$^{-و}$ تو فہ(-و) = فہ(و)
اور فہ(٠) = ٢

(٦) اگر ف(لا) = لوک(لا) تو ف(لا$^{م+ن}$) = م ف(لا)
+ ن ف(لا)

(٧) اگر فا(و) = و^{و} تو فا(-و) = ١ / فا(و)

(٨) اگر فہ(ما) = مس$^{-١}$ ما جس میں - ط/٢ < فہ(ما) < ط/٢
تو ثابت کرو کہ فہ(½) + فہ(⅓) = ط/٤

(٩) مندرجۂ ذیل مساواتوں میں خیالی مقادیر سے بچنے کے لیے لا کو کن وقفوں تک محدود کرنا چاہیے؟

(ل) $\text{ما} = \sqrt{\text{ک}^2 - \text{لا}^2}$

(ب) $\text{ما} = \sqrt{(\text{لا} - \text{م})(\text{لا} - \text{ن})}$ ، $0 < \text{م} < \text{ن}$

دُوسرا باب

انتہائیں اور تسلسل

متغیر کی انتہا۔ اگر لا اس طرح تغیر قبول کرتا ہے کہ لا ـ ا، جس میں ا ایک مستقل ہے، بالآخر کسی بھی مثبت عدد سے خواہ وہ کتنا ہی چھوٹا ہو عددی کمتر ہو جائے اور کمتر رہے تو لا کی نسبت کہا جاتا ہے کہ وہ ا تک بطور ایک انتہا کے پہنچتا ہے۔

تفاعل کی انتہا۔ درانحالیکہ لا بطور انتہا کے ا تک پہنچتا ہے، اگر ف (لا) ـ ل کی عددی قیمت، جس میں ل ایک مستقل ہے، بالآخر کسی بھی مثبت عدد سے خواہ وہ کتنا ہی چھوٹا ہو کمتر ہو جائے اور کمتر رہے تو کہا جاتا ہے کہ ف (لا) بطور انتہا کے ل تک پہنچتا ہے۔

اِس امر کو ظاہر کرنے کے لیے کہ لا جیسے جیسے ا تک بطور انتہا کے پہنچتا ہے ف (لا) کی انتہا ل ہے، حسبِ ذیل طریقۂ ترقیم اختیار کیا جائیگا:

نہا ف (لا) = ل
لا ← ا

متغیر متبوع جیسے جیسے ایک انتہا تک پہنچتا ہے اس کے تفاعل مختلف

ہیئتوں میں رُونما ہوتے ہیں - یہاں مندرجۂ ذیل اقسام کے تفاعلوں ہی کی انتہا کی تعریف سے متعلق بحث کی جائیگی :-

قسم (۱) جبکہ لا = ا کے لیے ف (لا) محدود یا معرّف ہے،

اور نہا ف (لا) = ف (ا)
　　لا ← ا

مثال ف (لا) = لا^۲، ف (۳) = ۹ اور نہا ف (لا) = ۹
　　　　　　　　　　　　　　　　　لا ← ۳

قسم (۲) جبکہ لا = ا کے لیے ف (لا) محدود یا معرف نہیں ہے

لیکن بریں ہمہ نہا ف (لا) موجود ہے -
　　　　　　　لا ← ا

مثال ف (لا) = (۲ (لا + ۲) - ۴) / لا ، ف (۰) محدود نہیں ہے

لیکن نہا ف (لا) = ۴
　　لا ←

قسم (۳) جبکہ لا = ا کے لیے ف (لا) محدود نہیں ہے

اور نہا ف (لا) معدوم ہے -
　　لا ← ا

مثال ف (لا) = ۱ / (۱ - لا) ، ف (۱) محدود نہیں ہے

اور نہا ۱ / (۱ - لا) معدوم ہے -
　　لا ← ۱

نہایتوں سے متعلق مسائل - ذیل کے مطالعہ میں نہایتوں سے متعلق پانچ مسئلے خاص طور پر کارآمد ہیں - وہ یہاں بلا ثبوت بیان کردیے جاتے ہیں -

مسئلہ (۱) - متغیروں کی محدود تعداد کے جبری مجموعہ کی انتہا اُن کی انتہاؤں کے جبری مجموعہ کے مساوی ہے :

نہا (و۱ ± و۲ ± . . . ± وn) = نہا و۱ ± نہا و۲ ± . . . ± نہا وn

مسئلہ (۲) متغیروں کی ایک محدود تعداد کے حاصل ضرب کی انتہا ان کی انتہاؤں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے:

$$\text{نہا}\,(و_{۱} \times و_{۲} \times \cdots \times و_{ن}) = \text{نہا}\, و_{۱} \times \text{نہا}\, و_{۲} \times \cdots \times \text{نہا}\, و_{ن}$$

مسئلہ (۳) دو متغیروں کے حاصل قیمت کی انتہا ان کی انتہاؤں کے حاصل تقسیم کے مساوی ہے:

$$\text{نہا}\,\frac{و_{۱}}{و_{۲}} = \frac{\text{نہا}\, و_{۱}}{\text{نہا}\, و_{۲}}، \quad \text{نہا}\, و_{۲} \neq ٠$$

مسئلہ (۴) اگر ایک متغیر و مسلسل بڑھتا جاتا ہے لیکن ایک مستقل م سے نہیں بڑھتا تو وہ ایک انتہا تک پہنچتا ہے جو م سے کمتر یا م کے مساوی ہے۔

مسئلہ (۵) اگر ایک متغیر و مسلسل گھٹتا جاتا ہے لیکن ایک مستقل م سے کبھی کمتر نہیں ہوتا، تو وہ ایک انتہا تک پہنچتا ہے جو م سے بڑا یا م کے مساوی ہے۔

لامتناھی کا تخیل ۔ ایک متغیر و جو کسی بھی مثبت عدد سے خواہ وہ کتنا ہی بڑا ہو زائد ہو جاتا ہے تو اس کے متعلق کہا جاتا ہے کہ وہ بغیر کسی حد یا انتہا کے بڑا ھوتا ھے یا لامتناھی ھو جاتا ھے ۔ یہ امر بذریعہ علامت اس طرح ظاہر کیا جاتا ہے:

$$و \longrightarrow \infty$$

ایک متغیر و جو کسی بھی منفی عدد سے خواہ وہ کتنا ہی چھوٹا ہو کمتر ہو جاتا ہے تو کہا جاتا ہے کہ وہ بغیر حد یا انتہا کے گھٹتا ھے یا منفی طور پر لامتناھی ھوتا ھے۔ بذریعہ علامت اس کو یوں ظاہر کرتے ہیں:

$$و \longrightarrow -\infty$$

یہ یاد رہے کہ علامت ∞ کسی عدد کو تعبیر نہیں کرتی ہے۔ پس ایسی تحریر

جیسے ۵ ÷ ∞ سے احتراز کرنا چاہیے۔ معہذا اگر و ← ∞ تو ایسی صورت میں ∞ کو و کی انتہا نہیں تصور کرنا چاہیے۔ اس لیے کہ انتہا ہمیشہ ایک معین یا محدود عدد ہے۔

مثال (۱) نہا(لا←۱) (۴ لا³ + ۵ لا² − ۳ لا) دریافت کرو۔

مسئلہ (۱) سے نہا(لا←۱) (۴ لا³ + ۵ لا² − ۳ لا) = نہا(لا←۱) ۴ لا³

+ نہا(لا←۱) ۵ لا² − نہا(لا←۱) ۳ لا

= ۴ + ۵ − ۳ = ۶

مثال (۲) نہا(لا←۳) (لا² + ۱) (لا³ − ۲) / (لا + ۲) دریافت کرو۔

مسائل (۱)، (۲) اور (۳) سے

نہا(لا←۳) (لا² + ۱) (لا³ − ۲) / (لا + ۲) = نہا(لا←۳) (لا² + ۱) نہا(لا←۳) (لا³ − ۲) / نہا(لا←۳) (لا + ۲)

= ۲۵ × ۱۰ / ۵ = ۵۰

مثال (۳) نہا(لا←۰) (۲ + ۳ لا + ۴ لا²)³ دریافت کرو۔

مسائل (۲) اور (۳) سے نہا(لا←۰) (۲ + ۳ لا + ۴ لا²)³

= (۲ + نہا(لا←۰) ۳ لا + نہا(لا←۰) ۴ لا²)³

= (۲ + ۰ + ۰)³ = ۸

مثال (۴) نہا(لا←۳) (لا³ − ۲۷) / (لا − ۳) دریافت کرو۔

$$\frac{\text{لا}^{\text{۳}} - \text{۲۷}}{\text{لا} - \text{۳}} = \frac{(\text{لا} - \text{۳})(\text{لا}^{\text{۲}} + \text{۳لا} + \text{۹})}{(\text{لا} - \text{۳})}$$

مسئلہ (۲) سے $\underset{\text{لا}\to\text{۳}}{\text{نہا}} \frac{\text{لا}^{\text{۳}} - \text{۲۷}}{\text{لا} - \text{۳}} = \underset{\text{لا}\to\text{۳}}{\text{نہا}} \frac{(\text{لا} - \text{۳})}{(\text{لا} - \text{۳})}$

$$\underset{\text{لا}\to\text{۳}}{\text{نہا}} (\text{لا}^{\text{۲}} + \text{۳لا} + \text{۹})$$

$\frac{\text{لا} - \text{۳}}{\text{لا} - \text{۳}} = \text{۱}$ لا کی ہر قیمت کے لیے سوائے لا = ۳

جب لا = ۳ یہ کسر محدود نہیں ہے۔ لیکن اگر لا ← ۳ اس طرح پر کہ لا کی قیمت کبھی ۳ کے مساوی نہیں ہونے پاتی تو $\underset{\text{لا}=\text{۳}}{\text{نہا}} \frac{\text{لا} - \text{۳}}{\text{لا} - \text{۳}} = \text{۱}$

پس $\underset{\text{لا}\to\text{۳}}{\text{نہا}} \frac{\text{لا}^{\text{۳}} - \text{۲۷}}{\text{لا} - \text{۳}} = \text{۱} \times \underset{\text{لا}\to\text{۳}}{\text{نہا}} (\text{لا}^{\text{۲}} + \text{۳لا} + \text{۹}) = \text{۲۷}$

مثال (۵) $\underset{\text{لا}\to\infty}{\text{نہا}} \frac{\text{۳لا}^{\text{۲}} + \text{لا} - \text{۲}}{\text{۲لا}^{\text{۲}} + \text{۵}}$ دریافت کرو۔

$$\frac{\text{۳لا}^{\text{۲}} + \text{لا} - \text{۲}}{\text{۲لا}^{\text{۲}} + \text{۵}} = \frac{\text{۳} + \frac{\text{۱}}{\text{لا}} - \frac{\text{۲}}{\text{لا}^{\text{۲}}}}{\text{۲} + \frac{\text{۵}}{\text{لا}^{\text{۲}}}}$$

$$\therefore \underset{\text{لا}\to\infty}{\text{نہا}} \frac{\text{۳لا}^{\text{۲}} + \text{لا} - \text{۲}}{\text{۲لا}^{\text{۲}} + \text{۵}} = \underset{\text{لا}\to\infty}{\text{نہا}} \frac{\text{۳} + \frac{\text{۱}}{\text{لا}} - \frac{\text{۲}}{\text{لا}^{\text{۲}}}}{\text{۲} + \frac{\text{۵}}{\text{لا}^{\text{۲}}}} = \frac{\text{۳}}{\text{۲}}$$

تفاعل کا تسلسل ـــ کسی تفاعل ف (لا) کی نسبت کہا جاتا ہے کہ وہ نقطہ لا = ا پر مسلسل ہے اگر کسی بھی طرح سے جیسے لا ← ا تو ف (لا) کی انتہا ف (ا) کے مساوی ہے۔ پس کسی نقطہ لا = ا پر مسلسل ہونے کے لیے لازمی ہے کہ تفاعل اس نقطہ پر محدود یا معرّف ہو۔ اس تفاعل کی

انتہا موجود ہونی چاہیے جیسے کہ لا ← ا اور یہ انتہا لا = ا پر تفاعل کی قیمت کے مساوی ہونی چاہیے۔

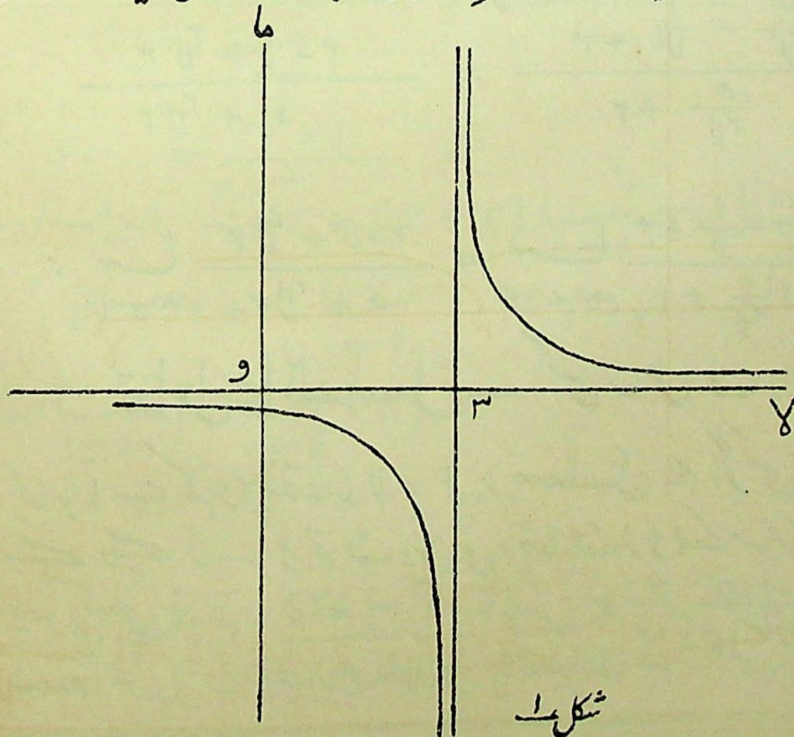
اگر کوئی تفاعل لا = ا پر مسلسل نہ ہو تو کہا جاتا ہے کہ وہ لا = ا پر غیر مسلسل ہے۔ اور اگر کسی وقفہ کے ہر نقطہ پر کوئی تفاعل مسلسل ہو تو کہا جاتا ہے کہ وہ وقفہ مذکور کے اندر مسلسل ہے۔

اس مطالعہ میں جن تفاعلوں پر بحث کی جائیگی وہ ان کی تعریف کی پوری سمت کے اندر مسلسل ہیں شاید باستثنا متغیر متبوع کی بعض انفرادی قیمتوں کے۔

کسی نقطہ پر غیر مسلسل تفاعلوں کی چند مثالیں۔

مثال (۱)　ما = $\frac{۱}{لا - ۳}$

یہ تفاعل لا = ۳ پر محدود یا معرّف نہیں ہے۔ اس لیے وہ لا کی



شکل ۱

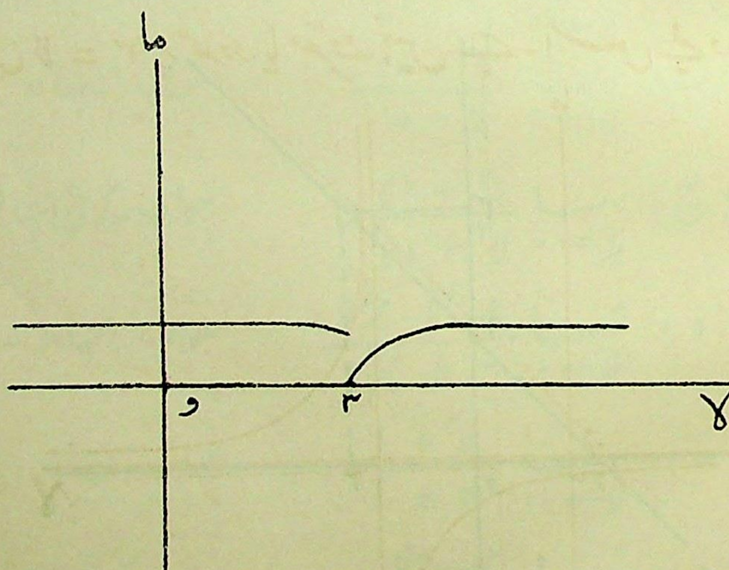
اس قیمت پر غیر مسلسل ہے۔ اگر لا ← ۳ اس طرح پر کہ لا ہمیشہ ۳ سے کمتر رہے تو ما منفی لا متناہی ہو جاتا ہے۔ (دیکھو شکل ۱)۔ اگر لا ← ۳ اس طرح پر کہ لا ہمیشہ ۳ سے زائد رہے تو ما مثبت لا متناہی ہو جاتا ہے۔ پس واضح ہے کہ تسلسل کے لیے جو شرائط عائد ہیں تفاعل مذکور ان کو نقطہ لا = ۳ پر پورا نہیں کرتا ہے۔

شکل سے واضح ہے کہ یہ غیر محدود عدم تسلسل کی مثال ہے۔

مثال (۲) $ما = \dfrac{۱ + ۲^{\frac{۱}{لا - ۳}}}{۱ + ۳^{\frac{۱}{لا - ۳}}}$

یہ تفاعل لا = ۳ پر محدود نہیں ہے اور اس لیے لا کی اس قیمت پر غیر مسلسل ہے۔ (دیکھو شکل ۲)۔

اگر لا ← ۳ اس طرح پر کہ لا ہمیشہ ۳ سے کمتر رہتا ہے تو



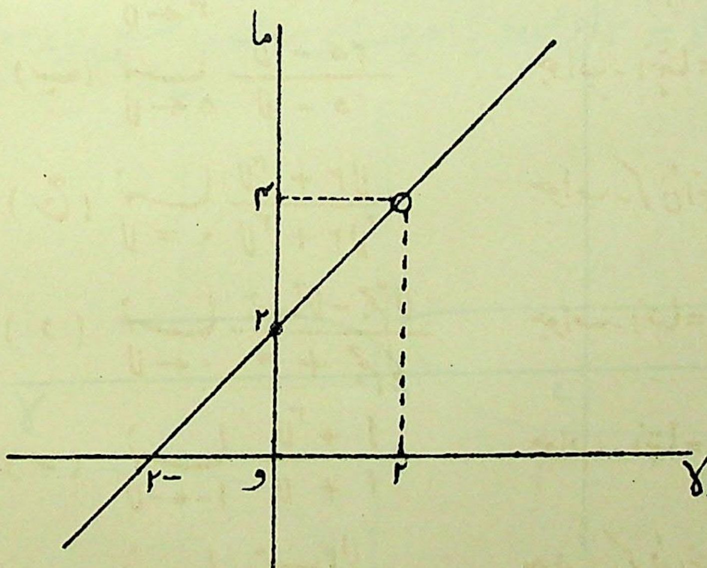
شکل ۲

نہا ما = ۱ ۔ اور اگر لا ← ۳ اس طرح پر کہ لا ہمیشہ ۳ سے زائد رہتا ہے تو
لا ← ۳

نہا ما = ۰ ۔ شکل سے ظاہر ہے کہ یہ محدود عدم تسلسل کی
لا ← ۱
مثال ہے۔
مندرجۂ بالا ہر دو تفاعل کی قیمت اچانک تبدیل ہو جاتی ہے جبکہ متغیر متبوع کی مقداریں (مصرحہ نقطوں پر) ذرا بھی تبدیلی واقع ہوتی ہے۔

مثال (۳) $\text{ما} = \frac{\text{لا}^2 - 1}{\text{لا} - 1}$

یہ تفاعل لا = ۱ پر محدود یا معرّف نہیں ہے۔ اِس لیے وہ لا کی اس قیمت پر غیر مسلسل ہے۔ جبکہ لا ← ۱ کسی بھی طریقہ پر بشرطیکہ لا ≠ ۱، تو ما کی انتہا ۲ ہے۔
شکل ۳ میں اس تفاعل کی جو ترسیم کھینچی گئی ہے اس سے ظاہر ہوتا ہے کہ وہ خطِ مستقیم ما = لا + ۱ ہے باستثناء خط کے اس نقطہ کے جو لا = ۱ کے متناظر ہے۔



شکل ۳
(۱) اور (۲) مثالوں کے عدم تسلسل اور مثال (۳) کے عدم تسلسل ہیں

بین فرق ہے۔ اس تیسری مثال میں تفاعل اچانک نہیں بدلتا جبکہ لا کی قیمت میں خفیف سی تبدیلی واقع ہوتی ہے۔ تفاعل کی مساوات جب اس کو محدود کرنے میں قاصر رہتی ہے تو اس قسم کے عدم تسلسل یوں رفع کیے جاسکتے ہیں کہ تفاعل کو متعلقہ نقاط پر مناسب طریقہ پر محدود یا معرّف کر دیا جائے۔ مثلاً مثال زیر بحث میں تفاعل کی قیمت ۲ مقرر کر دی جائے جبکہ لا = ۱۔ ایسی صورت میں لا = ۱ پر تسلسل کے تمام شرائط مکمل ہو جاتے ہیں۔

مثالیں

(۱) مندرجہ ذیل تفاعلوں کی اگر کوئی انتہا موجود ہو تو اس کی تعیین کرو۔

(ا) $\text{نہا}_{\text{لا}\to ۲}\left(۱+\frac{۱}{۳}\right)^{۳}$ — جواب۔ انتہا = $\frac{۶۴}{۲۷}$

(ب) $\text{نہا}_{\text{لا}\to ۵}\frac{\text{لا}^{۲}-۲۵}{\text{لا}-۵}$ — جواب۔ انتہا = ۱۰

(ج) $\text{نہا}_{\text{لا}=۰}\frac{\text{لا}^{۴}+۲\text{لا}}{\text{لا}^{۳}+۲\text{لا}^{۲}}$ — جواب۔ کوئی انتہا نہیں

(د) $\text{نہا}_{\text{لا}\to ۰}\frac{\text{جب}^{۲}\text{لا}-\text{جم}^{۲}\text{لا}}{۴+\text{جم لا}}$ — جواب۔ انتہا = $-\frac{۱}{۵}$

(ہ) $\text{نہا}_{\text{لا}\to -۱}\frac{\text{لا}^{۳}+۱}{\text{لا}+۱}$ — جواب۔ انتہا = ۳

(و) $\text{نہا}_{\text{لا}\to ۰}\frac{\text{جب ۲لا}}{\text{جب}^{۲}\text{لا}}$ — جواب۔ کوئی انتہا نہیں

(ز) $\text{نہا}_{\text{لا}\to ۲}\frac{\sqrt{\text{لا}+۱}+\sqrt{\text{لا}-۲}}{\sqrt{\text{لا}^{۲}-۱}}$ — جواب۔ انتہا = ۱

(ح) $\underset{\text{لا}\to\infty}{\text{نہا}} \frac{\text{۵ لا}^{۲} + ۱}{\text{۷ لا}^{۲} - ۱}$ جواب - انتہا = $\frac{۵}{۷}$

(ط) $\underset{\text{لا}\to ۳}{\text{نہا}} \frac{\text{۳ لا}^{۲} - ۱}{\text{لا} - ۳}$ جواب - کوئی انتہا نہیں

(ی) $\underset{\text{لا}\to \text{۳ ع}}{\text{نہا}} \frac{\text{لا}^{۲} - \text{۹ ع}^{۲}}{\text{لا} - \text{۳ ع}}$ جواب - انتہا = ۶ ع

(۲) اگر ن ایک مثبت صحیح عدد ہو تو ثابت کرو کہ لا کی تمام قیمتوں کے لیے $\text{لا}^{\text{ن}}$ ایک مسلسل تفاعل ہے۔

(۳) بتاؤ کہ لا کا کثیر رقمی جملہ لا کی تمام قیمتوں کے لیے مسلسل ہوتا ہے۔

(۴) ما = $\frac{۱}{\text{لا}(\text{لا} - ۹)}$ کی ترسیم کھینچو اور اس کے عدم تسلسل پر بحث کرو۔

(۵) ما = مس لا اور ما = $\text{مس}^{-۱}$ لا کی ترسیمیں کھینچو۔ اور ان کے عدم تسلسل پر بحث کرو۔

(۶) بتاؤ کہ لا کی تمام قیمتوں کے لیے $۳^{\text{لا}}$ مسلسل ہے۔

(۷) تفاعل $\frac{\text{لا}^{۲} - ۹}{\text{لا} + ۳}$ کی ترسیم کھینچو اور اس کے عدم تسلسل کی تحقیق کرو۔

(۸) تفاعل $\frac{۳^{\frac{۱}{\text{لا}}} - ۱}{۳^{\frac{۱}{\text{لا}}} + ۱}$ کی ترسیم کھینچو اور اس کے عدم تسلسل پر بحث کرو۔

(۹) ما = $\frac{۳}{\text{لا}(\text{لا} + ۱)(\text{لا} - ۵)}$ کی ترسیم کھینچو اور اس کے عدم تسلسل پر بحث کرو۔

(۱۰) $\text{ما}^{۲}$ (۲ع - لا) = $\text{لا}^{۳}$ کی ترسیم کھینچو اور بتاؤ کہ وہ کہاں غیر مسلسل ہے۔

تیسرا باب

تفرق

دو مقادیر کے مابین جب باہمی تعلق معلوم ہو جاتا ہے تو اس کے ذریعہ یہ بتایا جا سکتا ہے کہ ایک مقدار کی فلاں فلاں قیمت مقرر ہو تو اس کے متناظر متعلقہ مقدار کی کیا قیمت ہوگی۔ اکثر مسئلوں میں صرف ان قیمتوں کے معلوم کرنے ہی پر اکتفا نہیں کیا جاتا ہے بلکہ یہ بھی دریافت کرنے کی کوشش کی جاتی ہے کہ ایک مقدار دوسری مقدار کے ساتھ کس شرح سے بدلتی ہے۔ متغیر متبوع کے لحاظ سے اس کے کسی تفاعل کی تبدیلی کی شرح دریافت کرنے کو تفرقانا کہتے ہیں۔ ذیل میں ہم تفرقانے کے چند عام قواعد مستنبط کرینگے جو احصائے تفرقات میں بکثرت استعمال ہوتے ہیں۔

تفاعل کے مشتق یا تفرقی سر کی تعریف —

فرض کرو کہ ما = ف (لا) متغیر متبوع لا کا کوئی تفاعل ہے۔ لا کی قیمت میں جب خفیف سا اضافہ (مثبت یا منفی) مف لا واقع ہوتا ہے تو اس کے متناظر تفاعل کی قیمت میں مف ما اضافہ ہوتا ہے۔

پس ما = ف (لا) اور ما + مف ما = ف (لا + مف لا)

∴ مف ما = ف (لا + مف لا) ۔ ف (لا)

اور مف ما / مف لا = [ف (لا + مف لا) ۔ ف (لا)] / مف لا

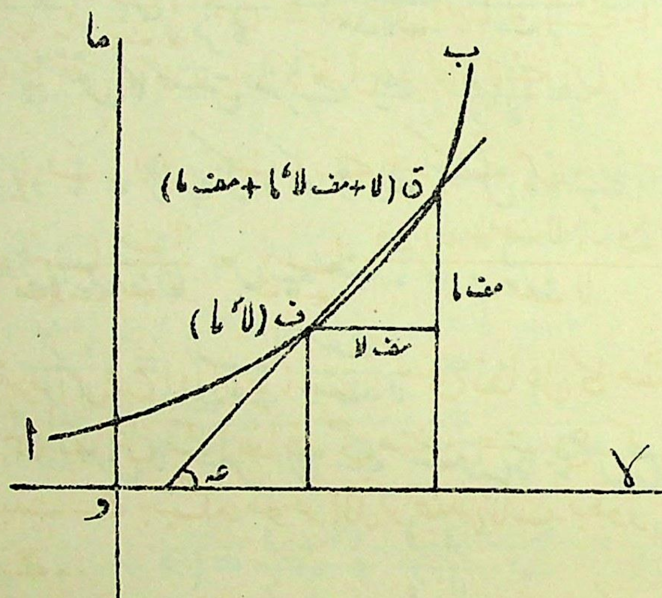
مف لا کے گھٹنے سے مف ما بھی عدداً گھٹتا جائیگا ۔ اگرچہ بصورت مف لا = صفر مف ما / مف لا (جو تفاوتوں کا حاصل تقسیم کہلاتا ہے) محدود یا معرف نہیں رہتا ہے لیکن جیسے جیسے مف لا صفر کی طرف مائل یا قریب تر ہوتا ہے (مف لا ← ٠) تفاوتوں کا حاصل تقسیم مف ما / مف لا ممکن ہے کہ کسی انتہا کو پہنچے ۔ اگر وہ پہنچتا ہے تو اس انتہا کو ما کا مشتق بلحاظ لا یا ما کا تفرقی سر بلحاظ لا کہتے ہیں اور علامت فر ما / فر لا یا مَا یا فَ (لا) یا عف ما سے تعبیر کرتے ہیں۔

پس فر ما / فر لا = نہا (مف لا ← ٠) مف ما / مف لا = نہا (مف لا ← ٠) [ف (لا + مف لا) ۔ ف (لا)] / مف لا

عبارت میں یہ مفہوم اس طرح ادا کیا جاتا ہے : کسی تفاعل کا مشتق یا تفرقی سر اس تفاعل کے اضافہ کی متغیر متبوع کے اضافہ کے ساتھ نسبت ہے جبکہ موخر الذکر صفر تک بطور انتہا پہنچ جاتا ہے۔

تفرقی سر کی اس تعریف سے ظاہر ہے کہ وہ تفاعل کے تغیر کی عین شرح کو ظاہر کرتا ہے ۔ چونکہ مف ما / مف لا وقفہ مف لا کے لیے تفاعل ما کی بلحاظ لا اوسط شرح تغیر ہے ۔ جیسے جیسے وقفہ مف لا چھوٹا ہوتا ہے اتنا ہی زیادہ قریب مف ما / مف لا وقفہ مذکور کے آغاز پر کی شرح تغیر کو تعبیر کرتا ہے ۔ مف لا ← ٠ کی صورت میں مف ما / مف لا کی انتہا یعنے فر ما / فر لا وقفہ کے عین آغاز پر کی شرح ہو جاتی ہے ۔ پس مقدار فر ما / فر لا جو متغیر متبوع کی قیمت لا سے متعلق

دریافت کی جاتی ہے قیمت مذکورہ پر ما کی بلحاظ لا شرح تغیر ہے۔
$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی علم ہندسہ کے ذریعہ بھی تعبیر کی جاسکتی ہے۔ ملاحظہ ہو شکل ۴۔
اب تفاعل ما = ف (لا) کی ترسیم ہے۔ $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$ = مس ع
قاطع خط ف ق کی ڈھلان ہے۔ اگر نقطہ ف کو ثابت مان کر مف لا کو جتنا بھی
چھوٹا لینگے اُتنا ہی زیادہ قریب $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$ نقطہ ف پر منحنی کے خطِ مماس کی



شکل ۴

ڈھلان کو تعبیر کریگا۔ پس $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$ کی انتہا جبکہ لا ← ۔ نقطۂ ف پر منحنی
کی ڈھلان ہے یعنے مقدار $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ تفاعل ما = ف (لا) کے منحنی کی
نقطہ ف پر کے ڈھلان کی قیمت ہے۔ ذیل میں ہم تفاعلوں کے تفرق
کے عام قواعد ضابطوں کی شکل میں مستنبط کرینگے۔ ان ضابطوں میں ء، و
سے مراد لا کے تفاعل ہیں۔ ا اور ن مستقل مقادیر ہیں۔ علامت $\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}$

سے مراد فلاں مقدار کا مشتق یا تفرقی سر بلحاظ لا ہے۔

چنانچہ $\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}$ (ر + و) مقدار (ر + و) کا مشتق یا تفرقی سر بلحاظ لا ہے۔

(ا) کسی متغیر کا اسی کے لحاظ سے مشتق اکائی ہے یعنے $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر لا}} = ۱$

فرض کرو ما = لا تب ما + معف ما = لا + معف لا

$\therefore$ معف ما = معف لا

اور $\frac{\text{معف ما}}{\text{معف لا}} = ۱$ پس $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{نہا}_{\text{معف لا}\to ۰} \frac{\text{معف ما}}{\text{معف لا}} = ۱$

(ب) کسی مستقل کا مشتق صفر ہے یعنے $\frac{\text{فر ا}}{\text{فر لا}} = ۰$

فرض کرو ما = ا چونکہ ما کو ا یعنے مستقل مانا ہے اس لیے ما کی قیمت تبدیل نہیں ہوتی۔ اس لیے معف ما = ۰ پس

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{نہا}_{\text{معف لا}\to ۰} \frac{\text{معف ما}}{\text{معف لا}} = ۰$$

(ج) دو تفاعلوں کا مشتق ان کے مشتقوں کا حاصل جمع ہے۔ یعنے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}} (\text{ر} + \text{و}) = \frac{\text{فر ر}}{\text{فر لا}} + \frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}}$$

فرض کرو کہ ما = ر + و

لا میں درانحالیکہ معف لا تغیر ہوتا ہے تو ما میں معف ما تغیر واقع ہوتا ہے۔ پس

ما + معف ما = ر + معف ر + و + معف و

$\therefore$ معف ما = معف ر + معف و

اور $\frac{\text{معف ما}}{\text{معف لا}} = \frac{\text{معف ر}}{\text{معف لا}} + \frac{\text{معف و}}{\text{معف لا}}$

$$\text{نہا}_{\text{مف لا}\to 0}\ \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \text{نہا}_{\text{مف لا}\to 0}\ \frac{\text{مف ی}}{\text{مف لا}} + \text{نہا}_{\text{مف لا}\to 0}\ \frac{\text{مف و}}{\text{مف لا}}$$

پس
$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{فر ی}}{\text{فر لا}} + \frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}}$$

(د) دو تفاعلوں کے حاصل ضرب کا مشتق مساوی ہے پہلے تفاعل مضروب دوسرے تفاعل کے مشتق بجمع دوسرے تفاعل مضروب پہلے تفاعل کے مشتق کے یعنے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\left(\text{ی و}\right) = \text{ی}\ \frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}} + \text{و}\ \frac{\text{فر ی}}{\text{فر لا}}$$

فرض کرو ما = ی و

تب ما + مف ما = (ی + مف ی) (و + مف و)

$$\therefore\ \text{مف ما} = \text{ی مف و} + \text{و مف ی} + \text{مف ی مف و}$$

$$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \text{ی}\ \frac{\text{مف و}}{\text{مف لا}} + \text{و}\ \frac{\text{مف ی}}{\text{مف لا}} + \text{مف ی}\ \frac{\text{مف و}}{\text{مف لا}}$$

$$\text{نہا}_{\text{مف لا}\to 0}\ \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \text{ی}\ \text{نہا}_{\text{مف لا}\to 0}\ \frac{\text{مف و}}{\text{مف لا}} + \text{و}\ \text{نہا}_{\text{مف لا}\to 0}\ \frac{\text{مف ی}}{\text{مف لا}} + \text{نہا}_{\text{مف لا}\to 0}\ \text{مف ی}\ \frac{\text{مف و}}{\text{مف لا}}$$

پس
$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ی}\ \frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}} + \text{و}\ \frac{\text{فر ی}}{\text{فر لا}}$$

نتیجۂ صریح۔ اگر ما = ا و تو چونکہ $\frac{\text{فر ا}}{\text{فر لا}} = 0$

لہذا
$$\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\left(\text{ا و}\right) = \text{ا}\ \frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}}$$

(ہ) دو تفاعلوں کے حاصل تقسیم کا مشتق مساوی ہے اُس کسر کے جو نسب نما مضروب شمار کنندہ کے مشتق منفی شمار کنندہ مضروب نسب نما کے مشتق، کو نسب نما کے مربع پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔ یعنے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\left(\frac{\text{ی}}{\text{و}}\right) = \frac{\text{و}\,\frac{\text{فر ی}}{\text{فر لا}} - \text{ی}\,\frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}}}{\text{و}^2}$$

فرض کرو $\text{ما} = \frac{\text{ی}}{\text{و}}$

$$\text{تب ما} + \text{معف ما} = \frac{\text{ی} + \text{معف ی}}{\text{و} + \text{معف و}}$$

$$\text{معف ما} = \frac{\text{ی} + \text{معف ی}}{\text{و} + \text{معف و}} - \frac{\text{ی}}{\text{و}}$$

$$= \frac{\text{و معف ی} - \text{ی معف و}}{\text{و}\,(\text{و} + \text{معف و})}$$

$$\frac{\text{معف ما}}{\text{معف لا}} = \frac{\text{و}\,\frac{\text{معف ی}}{\text{معف لا}} - \text{ی}\,\frac{\text{معف و}}{\text{معف لا}}}{\text{و}\,(\text{و} + \text{معف و})}$$

$$\text{پس بالآخر}\quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{و}\,\frac{\text{فر ی}}{\text{فر لا}} - \text{ی}\,\frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}}}{\text{و}^2}$$

نتیجۂ صحیح ۔ اگر $\text{ا} = \frac{\text{۱}}{\text{و}}$ تو چونکہ $\frac{\text{فر ۱}}{\text{فر لا}} = \text{۰}$

$$\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\left(\frac{\text{۱}}{\text{و}}\right) = \frac{-\,\frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}}}{\text{و}^2}$$

(و) مستقل قوت نما والے تفاعل کا مشتق مساوی ہے حاصل ضرب قوت نما اور تفاعل کے جس کا قوت نما دیے ہوئے قوت نما سے بقدر ایک عدد کمتر ہو اور تفاعل کے مشتق کے ۔ یعنی

$$\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\left(\text{ی}^{\text{ن}}\right) = \text{ن}\,\text{ی}^{\text{ن}-1}\,\frac{\text{فر ی}}{\text{فر لا}}$$

فرض کرو $\text{ما} = \text{ی}^{\text{ن}}$ اور ن ایک مثبت صحیح عدد ہے

تب $\text{ما} + \text{معف ما} = (\text{ی} + \text{معف ی})^{\text{ن}}$ جو ازروئے ضابطہ مسئلہ ثنائی

$$= \text{د}^{\text{ن}} + \text{ن}\,\text{د}^{\text{ن}-۱}\,\text{مف د} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۲\times۱}\,\text{د}^{\text{ن}-۲}(\text{مف د})^{۲} + \dots + (\text{مف د})^{\text{ن}}$$

$$\therefore\ \text{مف ما} = \text{ن}\,\text{د}^{\text{ن}-۱}\,\text{مف د} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۲\times۱}\,\text{د}^{\text{ن}-۲}(\text{مف د})^{۲} + \dots + (\text{مف د})^{\text{ن}}$$

$$\text{اور}\ \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \text{ن}\,\text{د}^{\text{ن}-۱}\frac{\text{مف د}}{\text{مف لا}} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-۱)}{۲\times۱}\,\text{د}^{\text{ن}-۲}\,\text{مف د}\,\frac{\text{مف د}}{\text{مف لا}} + \dots + (\text{مف د})^{\text{ن}-۱}\frac{\text{مف د}}{\text{مف لا}}\,.$$

$$\text{پس}\ \underset{\text{مف لا}\to}{\text{نہا}}.\ \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ن}\,\text{د}^{\text{ن}-۱}.\ \frac{\text{فر د}}{\text{فر لا}}$$

یہی نتیجہ قاعدہ (د) کے ذریعہ بھی اخذ ہو سکتا ہے۔ اگر ما کو ن تفاعلوں کا حاصلِ ضرب فرض کیا جاتا ہے چنانچہ

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}(\text{د و ھ}) = \text{و ھ}\frac{\text{فر د}}{\text{فر لا}} + \text{ھ د}\frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}} + \text{د و}\frac{\text{فر ھ}}{\text{فر لا}}$$

$$\text{یا}\ \frac{۱}{\text{ما}}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{۱}{\text{د}}\,\frac{\text{فر د}}{\text{فر لا}} + \frac{۱}{\text{و}}\,\frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}} + \frac{۱}{\text{ھ}}\,\frac{\text{فر ھ}}{\text{فر لا}}$$

اور اگر $\text{ما} = \text{ما}_۱\,\text{ما}_۲\,\text{ما}_۳ \dots \text{ما}_{\text{ن}}$ تو اسی طرح

$$\frac{۱}{\text{ما}}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{۱}{\text{ما}_۱}\,\frac{\text{فر ما}_۱}{\text{فر لا}} + \frac{۱}{\text{ما}_۲}\,\frac{\text{فر ما}_۲}{\text{فر لا}} + \dots + \frac{۱}{\text{ما}_{\text{ن}}}\,\frac{\text{فر ما}_{\text{ن}}}{\text{فر لا}}$$

درانحالیکہ $\text{ما}_۱ = \text{ما}_۲ = \text{ما}_۳ \dots = \text{ما}_{\text{ن}} = \text{د}$، $\text{ما} = \text{د}^{\text{ن}}$

$$\text{اور}\ \frac{۱}{\text{ما}}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ن}\left(\frac{۱}{\text{د}}\,\frac{\text{فر د}}{\text{فر لا}}\right)$$

$$\therefore\ \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}(\text{د})^{\text{ن}} = \text{ن}\,\text{د}^{\text{ن}-۱}.\ \frac{\text{فر د}}{\text{فر لا}}$$

اگر تفاعل کی قوت نما کسر $= \frac{\text{م}}{\text{ن}}$ ہو، جس میں م اور ن مثبت صحیح عدد ہیں، تو

$$\text{ما} = \text{د}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}} \qquad \therefore\ \text{ما}^{\text{ن}} = \text{د}^{\text{م}}$$

اور $\frac{\text{فر}(\text{ما}^{\text{ن}})}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فر}(\text{ی}^{\text{م}})}{\text{فرلا}}$

پس سابقہ نتیجہ سے $\text{ن ما}^{\text{ن}-1} \cdot \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{م ی}^{\text{م}-1} \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$

$$\therefore \frac{\text{فر}\left(\text{ی}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}\right)}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}} \frac{\text{ی}^{\text{م}-1}}{\text{ما}^{\text{ن}-1}} \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$$

$$= \frac{\text{م}}{\text{ن}} \frac{\text{ی}^{\text{م}-1}}{\left(\text{ی}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}\right)^{\text{ن}-1}} \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}} \frac{\text{ی}^{\text{م}-1}}{\text{ی}^{\text{م}-\frac{\text{م}}{\text{ن}}}} \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$$

$$= \frac{\text{م}}{\text{ن}} \text{ی}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}-1} \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$$

اور اگر تفاعل کا قوت نما منفی صحیح عدد (-م) ہو تو

$$\text{ما} = \text{ی}^{-\text{م}} = \frac{1}{\text{ی}^{\text{م}}}$$

اور قاعدہ (۵) کے نتیجۂ صریح کی رُو سے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left(\frac{1}{\text{ی}^{\text{م}}}\right) = \frac{-\frac{\text{فری}^{\text{م}}}{\text{فرلا}}}{\text{ی}^{2\text{م}}} = \frac{-\text{م ی}^{\text{م}-1}}{\text{ی}^{2\text{م}}} \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$$

$$= -\text{م ی}^{-\text{م}-1} \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$$

پس $\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}(\text{ی})^{\text{ن}} = \text{ن ی}^{\text{ن}-1} \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$ خواہ ن مثبت ہو یا منفی ہو یا کسر ہو

نوٹ:- مندرجۂ بالا تمام قاعدوں کے ثبوت میں یہ فرض کر لیا گیا ہے کہ ی اور متغیر متبوع لا کے مسلسل تفاعل ہیں۔

مثال (۱) ابتدائی اصول سے $\text{ما} = \text{لا}^3 - 3\,\text{لا}^2 + 3\,\text{لا} - 1$ کا مشتق دریافت کرو۔ درآنحالیکہ لا = لا + مت لا تفاعل ما کی قیمت = ما + مت ما۔

اور ما + مف ما = (لا + مف لا)^۳ − ۳ (لا + مف لا)^۲ + ۳ (لا + مف لا) − ۱

= لا^۳ + ۳ لا^۲ مف لا + ۳ لا (مف لا)^۲ + (مف لا)^۳

+ ۳ { لا^۲ + ۲ لا مف لا + (مف لا)^۲ }

+ ۳ لا + ۳ مف لا − ۱

چونکہ ما = لا^۳ − ۳ لا^۲ + ۳ لا − ۱

لہذا عملِ تفریق سے مف ما = ۳ لا^۲ مف لا + ۳ لا (مف لا)^۲ + (مف لا)^۳

− ۶ لا مف لا − ۳ (مف لا)^۲ + ۳ مف لا

∴ مف ما / مف لا = ۳ لا^۲ + ۳ لا مف لا + (مف لا)^۲ − ۶ لا + ۳ مف لا + ۳

اس لیے فز ما / فز لا = نہا (مف لا ← ۰) مف ما / مف لا = ۳ لا^۲ − ۶ لا + ۳

تفرق کے قاعدہ (و) کے اطلاق سے براہِ راست یہی نتیجہ فوراً برآمد ہوتا ہے۔ چنانچہ

فز ما / فز لا = ۳ لا^۲ − ۳ × ۲ لا + ۳ = ۳ لا^۲ − ۶ لا + ۳

مثال (۲) ما = (ا − لا) / (ا + لا) ، فز ما / فز لا معلوم کرو۔

ما = (ا − لا) (ا + لا)^-۱

فز ما / فز لا = (ا − لا) فز/فز لا (ا + لا)^-۱ + (ا + لا)^-۱ فز/فز لا (ا − لا)

= (ا − لا) {− ۱ (ا + لا)^-۲ فز لا/فز لا} + (ا + لا)^-۱ (− فز لا/فز لا)

= − (ا − لا) / (ا + لا)^۲ − ۱ / (ا + لا) = − (ا − لا + ا + لا) / (ا + لا)^۲

$$= -\frac{۲ ا}{(ا + لا)^{۲}}$$

مثالیں

(۱) $ما = (ا + لا)(ب + لا)$ بتاؤ کہ $\frac{فرما}{فرلا} = ا + ب + ۲لا$

(۲) $ما = (الا + ب)\sqrt{ا^{۲} - لا^{۲}}$ بتاؤ کہ $\frac{فرما}{فرلا} = \frac{ا^{۳} - ۲ الا^{۲} - ب لا}{\sqrt{ا^{۲} - لا^{۲}}}$

(۳) لا کے مندرجہ ذیل تفاعلوں کو تفرق کرو:۔

(ا) $ما = \frac{الا^{م} - ب لا^{-ن}}{ج}$ جواب $\frac{ام لا^{م+ن} + ب}{ج لا^{ن+۱}}$

(ب) $ما = \left(\frac{لا}{۱ + لا}\right)^{ن}$ جواب $\frac{ن لا^{ن-۱}}{(۱ + لا)^{ن+۱}}$

(ج) $ما = \frac{۱ - لا}{\sqrt{۱ + لا^{۲}}}$ جواب $\frac{(۱ + لا)}{(۱ + لا^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}$

(د) $ما = \sqrt{ا + \sqrt{ا^{۲} + لا^{۲}}}$ جواب $\frac{لا}{۲\sqrt{ا + \sqrt{ا^{۲} + لا^{۲}}}\,(ا^{۲} + لا^{۲})}$

(۴) ایک منحنی کی مساوات $ما = \frac{ا}{ب لا^{۲}}$ ہے ثابت کرو کہ منحنی کے اس نقطہ پر جہاں $لا = \frac{ا}{ب}$ منحنی کا ڈھلان $-۲\frac{ب^{۲}}{ا^{۲}}$ ہے۔

(۵) $ر = \frac{۴لا^{۲} - ۳لا - ۷}{۵لا^{۲} + ۶لا - ۹}$، $\frac{فرر}{فرلا}$ معلوم کرو۔ جواب $\frac{۳۹لا^{۲} - ۲لا + ۶۹}{(۵لا^{۲} + ۶لا - ۹)^{۲}}$

مقلوب تفاعل ۔ دو متغیروں کا درمیانی رابطہ تصریحاً دو طریقوں

ہیں سے کسی ایک طریقہ پر ظاہر کیا جا سکتا ہے ۔ جیسے اگر ما = ف (لا) تو لا = فا (ما) ۔ پہلا طریقہ اُس صورت میں مفید ہوتا ہے جبکہ لا متغیر متبوع ہے اور دوسرا اُس وقت جبکہ ما متغیر متبوع ہے ۔ مثال کے طور پر ما = لو لا اور لا = لوک ما پیش کیے جا سکتے ہیں جو ایک ہی رابطہ کے اظہار کے دو جداگانہ طریقے ہیں ۔ ایک دوسری مثال ما = لا۲ اور لا = ± $\sqrt{\text{ما}}$ ہے ۔

عام طور پر دو تفاعل ما = ف (لا) . . . . (۱)

لا = فا (ما) . . . . (۲)

باہمدیگر مقلوب تفاعل کہلاتے ہیں اگر لا اور ما کی وہ تمام قیمتیں جو مساوات (۱) کے لیے صادق آتی ہیں مساوات (۲) کے لیے بھی صادق آئیں ۔ اور اگر مساوات (۲) کے لیے جو قیمتیں صادق آتی ہیں مساوات (۱) کے لیے بھی صادق آئیں ۔

واضح ہے کہ ایک ہی منحنی سے دو باہمدیگر مقلوب تفاعلوں کی ترسیمی تعبیر ہوتی ہے ۔ لیکن ذرا سا غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ ان دونوں تفاعلوں کے خواص عموماً مختلف ہوتے ہیں ۔

ابھی ابھی جو مثال ما = لا۲ اور لا = ± $\sqrt{\text{ما}}$ دی گئی ہے ان کی ترسیموں سے ظاہر ہے کہ اول الذکر مساوات میں لا کی کسی ایک قیمت کے لیے ما کی بھی ایک ہی قیمت ہے ۔ لیکن آخر الذکر مساوات میں ما کی ایک قیمت کے لیے لا کی دو جداگانہ (مساوی مگر مختلف العلامت) قیمتیں ہیں ۔ یعنی پہلی مساوات ما کی تعریف لا کے وحید القیمت تفاعل کی حیثیت سے کرتی ہے اور دوسری مساوات لا کو بحیثیت ما کے دو قیمت والے تفاعل کے متعارف کراتی ہے ۔

(ض) مقلوب تفاعلوں کے تفرقی سروں (یا مشتقوں) میں رابطہ ۔

فرض کرو ما = ف (لا) اور لا = فا (ما)

دو وحید القیمت مسلسل مقلوب تفاعل ہیں ۔

اب ان مساواتوں میں فرض کرو کہ لا کو مف لا اضافہ دیا جاتا ہے اور اس کے متناظر ما کی قیمت میں مف ما اضافہ پیدا ہوتا ہے۔ تب مف لا اور مف ما کی تمام قیمتوں کے لیے باستثنائے صفر قیمت کے

$$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{1}{\frac{\text{مف لا}}{\text{مف ما}}}$$

اگر مف لا ← ۰ اس طرح پر کہ وہ کبھی صفر نہیں ہونے پاتا تب بدیں وجہ کہ مندرجہ بالا مساواتیں وحید القیمت اور مسلسل مانی گئی ہیں مف ما ← ۰ لیکن کبھی صفر نہیں ہوتا۔

$$\text{پس}\quad \underset{\text{مف لا}\to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \underset{\text{مف ما}\to 0}{\text{نہا}} \frac{1}{\frac{\text{مف لا}}{\text{مف ما}}}$$

$$\text{یعنے}\quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{1}{\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}}}$$

مثال۔ اگر لا = ا ما^2 + ب ما + ج تو مقلوب تفاعل ما کا مشتق بلحاظ لا دریافت کرو۔

$$\text{چونکہ لا} = \text{ا ما}^2 + \text{ب ما} + \text{ج}\ ،\ \frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}} = \text{۲ ا ما} + \text{ب}$$

$$\text{لہذا}\quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{1}{\frac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}}} = \frac{1}{\text{۲ ا ما} + \text{ب}}$$

(ح) کسی تفاعل کے تفاعل کا مشتق معلوم کرنے کا آسان قاعدہ۔

فرض کرو ما = ف (ی) اور ی = فہ (لا) دو دیے ہوئے

مسلسل تفاعل ہیں - اور ما کا مشتق بلحاظ لا دریافت کرنا مقصود ہے -
چونکہ ما = ف { فہ (لا) } اس لیے واضح ہے کہ (ء) کے لیے اس کی قیمت فہ (لا) تعویض کرنے سے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ معلوم ہو سکتا ہے - لیکن اس تعویض کے بغیر بھی براہِ راست $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ دریافت ہو سکتا ہے - چنانچہ فرض کرو (ما ، ء) اور (ء ، لا) قیمتوں کے دو جفت ہیں جو دی ہوئی مساواتوں کے لیے علی الترتیب صادق آتی ہیں - اب اگر لا کی قیمت میں مف لا اضافہ ہوتا ہے تو ء کی قیمت میں مف ء اضافہ ہوگا اور نتیجہ کے طور پر ما کی قیمت میں مف ما اضافہ ہوگا - مگر مف لا اور مف ما کی تمام قیمتوں کے لیے باستثنائے صفر

$$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{مف ما}}{\text{مف ء}} \times \frac{\text{مف ء}}{\text{مف لا}}$$

پس اگر مف لا صفر کی طرف اس طرح مائل ہو (یعنے مف لا ← ۰) کہ وہ گھٹتا چلا جائے مگر صفر نہ ہو جائے تو مف لا جب کافی چھوٹا ہوتا ہے تو مف ء ← ۰ اس طرح کہ وہ صفر نہیں ہونے پاتا اس لیے

$$\text{نہا}_{\text{مف لا}\to ۰}\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \text{نہا}_{\text{مف ء}\to ۰}\frac{\text{مف ما}}{\text{مف ء}} \times \text{نہا}_{\text{مف لا}\to ۰}\frac{\text{مف ء}}{\text{مف لا}}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر ء}} \times \frac{\text{فر ء}}{\text{فر لا}}$$

یعنے ما کا مشتق (یا تفرقی سر) بلحاظ لا حاصل ضرب ہے ما کے مشتق بلحاظ ء اور ء کے مشتق بلحاظ لا کے -

مثال - ما = $(۱ + \text{لا}^{\text{ن}})^{\text{م}}$ ، $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ دریافت کرو -

$(۱ + \text{لا}^{\text{ن}})$ = ء رکھو پس ما = $(\text{ء})^{\text{م}}$

چونکہ $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر ء}} \times \frac{\text{فر ء}}{\text{فر لا}}$

لہذا $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = (\text{م ی}^{\text{م}-1})\ \text{ن لا}^{\text{ن}-1}$

$\therefore \quad = \text{م}(1+\text{لا}^{\text{ن}})^{\text{م}-1}\ \text{ن لا}^{\text{ن}-1} = \text{م ن لا}^{\text{ن}-1}(1+\text{لا}^{\text{ن}})^{\text{م}-1}$

طالب علم نے معلوم کر لیا ہوگا کہ قاعدہ (ز) جو مقلوب تفاعلوں کے تفرقی سروں سے متعلق ہے قاعدہ (ح) کی ایک خاص صورت ہے۔

کیونکہ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فری}} \times \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$

اگر ما = لا تو $1 = \frac{\text{فرلا}}{\text{فری}} \times \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$

یعنی $\frac{\text{فرلا}}{\text{فری}} = \frac{1}{\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}}$

تضمینی تفاعلوں کا تفرق — اگر ما بحیثیت تفاعل لا ایک غیر حل شدہ مساوات کی شکل میں ظاہر کیا جائے تو ما کو لا کا تضمینی تفاعل کہتے ہیں۔ مثلاً

$\text{لا}^3 + \text{ما}^3 - 3\,\text{لا ما} - 1 = 0$

$\text{و لا}^2 + 2\,\text{ھ لا ما} + \text{ب ما} + 2\,\text{گ لا} + 2\,\text{ف ما} + \text{ج} = 0$

جب (لا + ما) = لا ما وغیرہ

اکثر اوقات تضمینی تفاعل کی مساوات کا حل کرنا مشکل ہوتا ہے کبھی ناممکن بھی۔ تو ایسی صورتوں میں $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کی تعیین کے لیے مندرجۂ ذیل قاعدہ استعمال کیا جاتا ہے۔

پہلے تضمینی تفاعل کی مساوات ف (لا، ما) = ۰ کی ہر رقم بطور تفاعل لا تفرق کی جائے۔ اس طرح جو مساوات حاصل ہو اس کو $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کے لیے

حل کیا جائے ۔ اس حل میں $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کے لیے جو جملہ دستیاب ہوگا اُس میں عموماً ما اور لا دونوں موجود ہونگے ۔ لا کی کسی مخصوص قیمت کے لیے $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کی قیمت معلوم کرنے کے لیے دی ہوئی مساوات ف (لا، ما) = ۰ میں لا کی اس قیمت کے لیے ما کی متناظر قیمت دریافت کر لی جائے اور پھر $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کے جملہ میں لا اور ما کی یہ خاص قیمتیں تعویض کی جائیں ۔ مثلاً اگر

لا^{۳} + ما^{۳} − ۳ لا ما − ۱ = ۰ ، $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ دریافت کرو جبکہ لا = ۱

تو قاعدہ مصرحۂ بالا کی رُو سے

۳ لا^{۲} + ۳ ما^{۲} $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ − ۳ ما − ۳ لا $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = ۰

∴ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = $\frac{\text{ما} - \text{لا}^{۲}}{\text{ما}^{۲} - \text{لا}}$

ابتدائی مساوات میں لا = ۱ تعویض کرنے سے ما (ما^{۲} − ۳) = ۰

∴ ما = ۰ یا ما = ± $\sqrt{۳}$

پس $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ (بمقام لا = ۱) = $\frac{۰ - ۱}{۰ - ۱}$ = ۱ یا $\frac{۱ - \sqrt{۳}}{۲}$ یا $\frac{۱ + \sqrt{۳}}{۲}$

مثالیں

$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ دریافت کرو:—

(۱) لا = ما^{۴} + ما − ۱　　　جواب $\frac{۱}{۴\,\text{ما}^{۳} + ۱}$

(۲) لا = $\frac{\text{ما} + ۲}{\text{ما}^{۵} + ۱}$　　　جواب $\frac{(\text{ما}^{۵} + ۱)^{۲}}{۱ - ۱۰\,\text{ما}^{۴} - ۴\,\text{ما}^{۵}}$

(۳) ما = (ل^{۲} − لا^{۲})^{۵}　　　جواب — ۱۰ لا (ل^{۲} − لا^{۲})^{۴}

(۴) $ا = (1 + لا^2)^{\frac{1}{2}}$ جواب $\frac{لا}{(1 + لا^2)^{\frac{1}{2}}}$

(۵) $ا = \left\{ \left(\frac{1}{لا}\right)^2 + 1 \right\}^{\frac{3}{2}}$ جواب $- \frac{3\sqrt{لا^2 + 1}}{لا^4}$

(۶) $\frac{لا^2}{ر^2} \pm \frac{ا^2}{ب^2}$ جواب $\mp \frac{ب^2 لا}{ر^2 ا}$

(۷) $(لا^2 + ا^2)^{3/2} = ر^2(لا^2 - ا^2)$ جواب $\frac{2ر^2 لا - 3لا\sqrt{لا^2 + ا^2}}{2ر^2 ا + 3ا\sqrt{لا^2 + ا^2}}$

(۸) $ا لا^2 + 2ھ لا ا + ب ا^2 + 2گ لا + 2ف ا + ج = 0$

جواب $- \frac{ا لا + ھ ا + گ}{ب ا + ھ لا + ف}$

(۹) دباؤ اور حجم سے متعلق فین ڈیر وال کی مشہور مساوات :—

$\left(د + \frac{ر}{ح^2}\right)(ح - ب) = س ط$ کے لیے $\frac{فد}{فح}$ دریافت کرو۔

اور بتاؤ کہ جب $\frac{فد}{فح} = 0$ تو $د = \frac{ر}{ح^2}\left(1 - \frac{2ب}{ح}\right)$

(۱۰) $ا = (لا^2 + 1)^5 + 2(لا^2 + 1) + (لا^2 + 1) + 1$ ، $\frac{فا}{فلا}$ دریافت کرو۔

جواب $10لا(لا^2 + 1)^4 + 4لا$

چوتھا باب

قوت نمائی لوکارتمی اور مثلثی تفاعلوں کا تفرق

۱ـ اس نصاب کی پہلی جلد میں قوت نمائی اور لوکارتمی تفاعلوں پر کسی قدر تفصیل کے ساتھ بحث کی جا چکی ہے ۔ ابتدائی الجبرا میں قوت نمائی تفاعل لا^ا کی صرف اُن صورتوں میں تعریف کی جاتی ہے جبکہ لا ایک منطق عدد ہے۔ احصاء میں چونکہ لا کا مسلسل تغیر ضروری ہے اس لیے لا کی قیمتیں منطق و غیر منطق دونوں مانی جائینگی۔ پہلے ہم اس کے مقلوب تفاعل یعنے لوک~ا~ لا کا تفرقی سر یا مشتق دریافت کرینگے اور بعد ازاں خود اس کا (یعنے قوت نمائی تفاعل کا)

اگر ما = لوک~ا~ لا تو ا^ما = لا اور ما کو ا کا قوت نما کہتے ہیں ۔

ہم فرض کرینگے کہ لوک~ا~ لا (جس میں ا > ۰، ا ≠ ۱) لا کی تمام مثبت قیمتوں کے لیے ایک وحید القیمت مسلسل تفاعل ہے ۔ لوکارتموں کی اساس کے لیے یوں تو نظری حیثیت سے کسی بھی عدد کا انتخاب ممکن ہے ۔ لیکن عام طور پر عملاً صرف ۱۰ اور قو (E) مستعمل ہیں ۔ قو کی تعریف ذیل کے جملہ میں مضمر ہے :-

$$\text{قو} = \text{نہا}_{\text{ی}\to ۰} (۱ + \text{ی})^{\frac{۱}{\text{ی}}}$$

اگرچہ یہ بدیہی امر نہیں ہے کہ مندرجۂ بالا انتہا موجود ہے لیکن اس مطالعہ

کے لیے صرف یہ کہہ دینا کافی ہوگا کہ فی الحقیقت ایسی انتہا وجود رکھتی ہے۔ ثبوت کے لیے آسگوڈ (Osgood) کی کتاب تفرقی و تکملی احصاریا کسی اور بلند پایہ کی کتاب کا مطالعہ ہوسکتا ہے۔ ق کی کسی اعشاری عدد کے ذریعے ٹھیک طور پر تعبیر نہیں ہوسکتی۔ ذیل میں اس کی قیمت اعشاریہ کے ۹ مقاموں تک صحیح درج ہے :-

$$\text{ق} = ۲٫۷۱۸۲۸۱۸۲۸ \ldots$$

جلد اول میں لوکارتموں کی اساس کی تبدیلی کے قاعدے بتائے گئے ہیں۔ ان کے لحاظ سے $\text{لوگ}_{\text{و}}\,\text{لا} = ۲٫۳۰۲۵۹\ \text{لوگ}_{۱۰}\,\text{لا}$ (اعشاریہ کے ۵ مقاموں تک صحیح)

اور $\text{لوگ}_{۱۰}\,\text{لا} = ۰٫۴۳۴۲۹\ \text{لوگ}_{\text{و}}\,\text{لا}$ " "

۲۔ $\dfrac{\text{فر}}{\text{فر لا}}$ (لوگ$_{\text{و}}$ ر) کی تعین۔ جبکہ ر تفاعلِ لا ہے

فرض کرو $\text{ما} = \text{لوگ}_{\text{و}}\,\text{لا}$

$$\text{ما} + \text{مف ما} = \text{لوگ}_{\text{و}}\,(\text{لا} + \text{مف لا}) \qquad \text{اور اس لیے}$$

$$\text{مف ما} = \text{لوگ}_{\text{و}}\,(\text{لا} + \text{مف لا}) - \text{لوگ}_{\text{و}}\,\text{لا}$$

$$= \text{لوگ}_{\text{و}}\,\frac{\text{لا} + \text{مف لا}}{\text{لا}} = \text{لوگ}_{\text{و}}\left(۱ + \frac{\text{مف لا}}{\text{لا}}\right)$$

$$\text{پس}\ \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{۱}{\text{مف لا}}\ \text{لوگ}_{\text{و}}\left(۱ + \frac{\text{مف لا}}{\text{لا}}\right)$$

$$= \frac{۱}{\text{لا}} \times \frac{\text{لا}}{\text{مف لا}}\ \text{لوگ}_{\text{و}}\left(۱ + \frac{\text{مف لا}}{\text{لا}}\right) = \frac{۱}{\text{لا}}\ \text{لوگ}_{\text{و}}\left(۱ + \frac{\text{مف لا}}{\text{لا}}\right)^{\frac{\text{لا}}{\text{مف لا}}}$$

$$\therefore \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{۱}{\text{لا}}\ \text{نہا}_{\text{مف لا} \to ۰}\left[\text{لوگ}_{\text{و}}\left(۱ + \frac{\text{مف لا}}{\text{لا}}\right)^{\frac{\text{لا}}{\text{مف لا}}}\right]$$

چونکہ لوگ$_{\text{و}}$ لا مسلسل ہے اس لیے فرض کرلیا جاتا ہے کہ لوکارتم کی انتہا مساوی ہے انتہا کے لوکارتم کے۔ پس

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{1}{\text{لا}}\ \text{لوک}_{\text{و}} \left[\text{نہا}_{\text{مف لا} \to 0} \left(1 + \frac{\text{مف لا}}{\text{لا}}\right)^{\frac{\text{لا}}{\text{مف لا}}} \right]$$

اگر ہم $\text{ی} = \frac{\text{مف لا}}{\text{لا}}$ لکھیں تو $\text{ی} \to 0$ جبکہ $\text{مف لا} \to 0$

لہذا $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{1}{\text{لا}}\ \text{لوک}_{\text{و}} \left[\text{نہا}_{\text{ی} \to 0} (1 + \text{ی})^{\frac{1}{\text{ی}}} \right]$

$= \frac{1}{\text{لا}}\ \text{لوک}_{\text{و}}\ \text{قو}$　بلحاظ تعریف قو (دیکھو ع ۱)

یعنے $\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\ \text{لوک}_{\text{و}}\ \text{لا} = \frac{1}{\text{لا}}\ \text{لوک}_{\text{و}}\ \text{قو}$

اسی طرح $\frac{\text{فر}}{\text{فر ء}}\ \text{لوک}_{\text{و}}\ \text{ء} = \frac{1}{\text{ء}}\ \text{لوک}_{\text{و}}\ \text{قو}$

اگر ء (درانحالیکہ ء > ۰) لا کا ایک تفاعل ہے تب سابقہ باب کے قاعدہ (ح) کی رُو سے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\ \text{لوک}_{\text{و}}\ \text{ء} = \frac{\text{فر}}{\text{فر ء}}\ \text{لوک}_{\text{و}}\ \text{ء}\ \frac{\text{فر ء}}{\text{فر لا}}$$

$$\therefore \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\ \text{لوک}_{\text{و}}\ \text{ء} = \frac{1}{\text{ء}}\ \text{لوک}_{\text{و}}\ \text{قو}\ \frac{\text{فر ء}}{\text{فر لا}} = \text{لوک}_{\text{و}}\ \text{قو}\ \frac{\frac{\text{فر ء}}{\text{فر لا}}}{\text{ء}}$$

پس واضح ہے کہ اگر $\text{ا} = \text{قو}$ تو $\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\ \text{لوک}_{\text{قو}}\ \text{ء} = \frac{\frac{\text{فر ء}}{\text{فر لا}}}{\text{ء}}$

قو کو لوکارتم کی اساس بنانے سے چونکہ عمل تفرق میں سہولت پیدا ہوتی ہے اس لیے اختصار میں اسی کو اساس قرار دیتے ہیں اور جب ترقیم میں لوک کی کوئی اساس لکھی نہیں جاتی ہے تو سمجھ لیا جاتا ہے کہ اساس قو ہی ہے۔

یعنے لوک ء سے مراد $\text{لوک}_{\text{قو}}\ \text{ء}$ ہے۔

مثال (۱) $\text{ما} = \text{لوک}\ \frac{1 - \text{لا}}{1 + \text{لا}}$　$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ دریافت کرو۔

$$\text{لوک}\ \frac{۱-\text{لا}}{۱+\text{لا}} = \text{لوک}\ (۱-\text{لا}) - \text{لوک}\ (۱+\text{لا})$$

پس

$$\frac{\text{فر ا}}{\text{فر لا}} = \frac{۱}{۱-\text{لا}}\ \frac{\text{فر}(۱-\text{لا})}{\text{فر لا}} - \frac{۱}{۱+\text{لا}}\ \frac{\text{فر}(۱+\text{لا})}{\text{فر لا}}$$

$$= -\frac{۱}{۱-\text{لا}} - \frac{۱}{۱+\text{لا}} = -\frac{۲}{۱-\text{لا}^۲} = \frac{۲}{\text{لا}^۲-۱}$$

مثال (۲) $\text{ر} = \sqrt{\frac{(\text{س}-\text{ا})(\text{س}-\text{ب})}{\text{س}\ (\text{س}-\text{ج})}}$ $\frac{\text{فر ر}}{\text{فر س}}$ دریافت کرو۔

ہم بتائینگے کہ لوکارتموں کی مدد سے عملِ تفرق بہت آسان ہو جاتا ہے۔

چنانچہ $\text{لوک ر} = \frac{۱}{۲}\text{لوک}(\text{س}-\text{ا}) + \frac{۱}{۲}\text{لوک}(\text{س}-\text{ب}) - \frac{۱}{۲}\text{لوک س} - \frac{۱}{۲}\text{لوک}(\text{س}-\text{ج})$

$$\therefore \frac{\text{فر لوک ر}}{\text{فر س}} = \frac{۱}{۲}\left\{\frac{\text{فر لوک}(\text{س}-\text{ا})}{\text{فر س}} + \frac{\text{فر لوک}(\text{س}-\text{ب})}{\text{فر س}} - \frac{\text{فر لوک س}}{\text{فر س}} - \frac{\text{فر لوک}(\text{س}-\text{ج})}{\text{فر س}}\right\}$$

$$\frac{۱}{\text{ر}}\ \frac{\text{فر ر}}{\text{فر س}} = \frac{۱}{۲}\left\{\frac{۱}{\text{س}-\text{ا}} + \frac{۱}{\text{س}-\text{ب}} - \frac{۱}{\text{س}} - \frac{۱}{\text{س}-\text{ج}}\right\}$$

$$\frac{\text{فر ر}}{\text{فر س}} = \frac{\text{ر}}{۲}\left(\frac{۱}{\text{س}-\text{ا}} + \frac{۱}{\text{س}-\text{ب}} - \frac{۱}{\text{س}} - \frac{۱}{\text{س}-\text{ج}}\right)$$

مثالیں

(۱) لوکارتمی تفرق کے ذریعہ مندرجۂ ذیل تفاعلوں کا مشتق معلوم کرو:-

(ا) $\text{ما} = (\text{ا}^۲ + \text{لا}^۲)^{\frac{۳}{۲}}$ جواب $۳\ \text{لا}\ \sqrt{\text{ا}^۲ + \text{لا}^۲}$

(ب) $\text{ما} = \frac{\text{لا}^۲(\text{لا}+۵)^۳}{(\text{لا}+۳)^۵}$ جواب $\frac{۳۰\ \text{لا}\ (\text{لا}+۵)^۲}{(\text{لا}+۳)^۶}$

(۲) $\text{ما} = \text{ما}_۱ \times \text{ما}_۲ \times \cdots \times \text{ما}_\text{ن}$ لوکارتمی تفرق کے ذریعہ

ثابت کرو کہ اگر م۱ ..... م‌ن فرداً فرداً لا کے تفاعل ہیں تو

$$\frac{1}{\text{م}}\,\frac{\text{فرم}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\text{م}_1}\,\frac{\text{فرم}_1}{\text{فرلا}} + \frac{1}{\text{م}_2}\,\frac{\text{فرم}_2}{\text{فرلا}} + \dots\dots + \frac{1}{\text{م}_{\text{ن}}}\,\frac{\text{فرم}_{\text{ن}}}{\text{فرلا}}$$

اور جب $\text{م}_1 = \text{م}_2 = \dots\dots = \text{م}_{\text{ن}} = \text{لا}$ تو $\frac{\text{فرلا}^{\text{ن}}}{\text{فرلا}} = \text{ن لا}^{\text{ن}-1}$

(۳) $\text{م} = \frac{(\text{لا}-1)^{\frac{3}{2}}}{(\text{لا}-2)^{\frac{3}{4}}\,(\text{لا}-3)^{\frac{7}{3}}}$ بتاؤ کہ $\frac{\text{فرم}}{\text{فرلا}} = -\frac{(\text{لا}-1)^{\frac{1}{2}}\,(7\text{لا}^2+30\text{لا}-97)}{12\,(\text{لا}-2)^{\frac{7}{4}}\,(\text{لا}-3)^{\frac{10}{3}}}$

(۴) اگر $\text{م} = \text{لا}^{\text{لا}}$ تو بتاؤ کہ $\frac{\text{فرم}}{\text{فرلا}} = \text{لا}^{\text{لا}}\,(1 + \text{لوک لا})$

[حل لوک م = لا لوک لا $\therefore \frac{1}{\text{م}}\,\frac{\text{فرم}}{\text{فرلا}} = (\text{لوک لا} + 1)$]

(۵) اگر $\text{م} = \text{و}^{\text{لا}^{\text{لا}}}$ تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{فرم}}{\text{فرلا}} = \text{و}^{\text{لا}^{\text{لا}}}\,\text{لا}^{\text{لا}}\,(1 + \text{لوک لا})$

[حل لوک $\text{م} = \text{لا}^{\text{لا}}$ $\therefore \frac{1}{\text{م}}\,\frac{\text{فرم}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{فرلا}^{\text{لا}}}{\text{فرلا}} = \text{لا}^{\text{لا}}\,(1+\text{لوک لا})$]

(۶) $\text{م} = \text{لا}^{\text{ن}}\,\text{لوک}^{\text{ن}}\,\text{لا}$ $\frac{\text{فرم}}{\text{فرلا}}$ دریافت کرو۔ جواب $\text{ن}\,(\text{لا لوک لا})^{\text{ن}-1}\,(\text{لوک لا} + 1)$

(۷) م = لوک (لوک لا) بتاؤ $\frac{\text{فرم}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\text{لا لوک لا}}$

(۸) $\text{م} = \text{لوک}\,\frac{\sqrt{1-\text{لا}^2}}{\text{لوک لا}}$ بتاؤ $\frac{\text{فرم}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{لا}}{\text{لا}^2-1} - \frac{1}{\text{لا لوک لا}}$

۱۲ $\frac{\text{فر}\,\text{ا}^{\text{و}}}{\text{فرلا}}$ کی تعیین - جبکہ و تفاعلِ لا ہے

فرض کرو $\text{م} = \text{ا}^{\text{و}}$ تب لوک م = و لوک ا

تضمینی تفاعلوں کے تفرق کے قاعدہ سے

$$\frac{1}{\text{م}}\,\frac{\text{فرم}}{\text{فرو}} = \text{لوک ا} \quad \therefore \frac{\text{فرم}}{\text{فرو}} = \text{م لوک ا} = \text{ا}^{\text{و}}\,\text{لوک ا}$$

پس فر ا / فر لا = لوک ا × ا^و فر و / فر لا

یعنی فر / فر لا ا^و = لوک ا × ا^و فر و / فر لا

اگر اس ضابطہ میں ا = ق لکھا جائے تو

فر / فر لا ق^و = ق^و فر و / فر لا

مثال (۱) ی^و کا تفرق۔ جبکہ ی اور و دونوں لا کے تفاعل ہیں۔

فرض کرو ا = ی^و تب لوک ا = و لوک ی

اور ۱/ا · فر ا / فر لا = و فر لوک ی / فر لا + لوک ی فر و / فر لا

= و/ی · فر ی / فر لا + لوک ی فر و / فر لا

پس فر ا / فر لا = ی^و (و/ی · فر ی / فر لا + لوک ی فر و / فر لا)

مثال (۲) ا = (ق^لا + ق^-لا) / (ق^لا − ق^-لا) کا تفرق سر دریافت کرو۔

لوک ا = لوک (ق^لا + ق^-لا) − لوک (ق^لا − ق^-لا)

∴ ۱/ا · فر ا / فر لا = فر / فر لا [لوک (ق^لا + ق^-لا) − لوک (ق^لا − ق^-لا)]

فر لوک (ق^لا + ق^-لا) / فر (ق^لا + ق^-لا) · فر (ق^لا + ق^-لا) / فر لا − فر لوک (ق^لا − ق^-لا) / فر (ق^لا − ق^-لا) · فر (ق^لا − ق^-لا) / فر لا

$$= \frac{1}{\text{و}^{\text{لا}} + \text{و}^{-\text{لا}}}\left(\text{و}^{\text{لا}} - \text{و}^{-\text{لا}}\right) - \frac{1}{\text{و}^{\text{لا}} - \text{و}^{-\text{لا}}}\left(\text{و}^{\text{لا}} + \text{و}^{-\text{لا}}\right)$$

$$= \frac{\text{و}^{\text{لا}} - \text{و}^{-\text{لا}}}{\text{و}^{\text{لا}} + \text{و}^{-\text{لا}}} - \frac{\text{و}^{\text{لا}} + \text{و}^{-\text{لا}}}{\text{و}^{\text{لا}} - \text{و}^{-\text{لا}}}$$

$$\therefore \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{و}^{\text{لا}} + \text{و}^{-\text{لا}}}{\text{و}^{\text{لا}} - \text{و}^{-\text{لا}}}\left(\frac{\text{و}^{\text{لا}} - \text{و}^{-\text{لا}}}{\text{و}^{\text{لا}} + \text{و}^{-\text{لا}}} - \frac{\text{و}^{\text{لا}} + \text{و}^{-\text{لا}}}{\text{و}^{\text{لا}} - \text{و}^{-\text{لا}}}\right)$$

$$= 1 - \frac{\left(\text{و}^{\text{لا}} + \text{و}^{-\text{لا}}\right)^2}{\left(\text{و}^{\text{لا}} - \text{و}^{-\text{لا}}\right)^2} = -\frac{4}{\left(\text{و}^{\text{لا}} - \text{و}^{-\text{لا}}\right)^2}$$

مثالیں

مندرجۂ ذیل تفاعلوں کے مشتق دریافت کرو:-

(۱) $\text{ما} = \text{و}^{\frac{1}{\text{لا}}}$ جواب $\text{لا}^{-2}\,\text{و}^{\frac{1}{\text{لا}}}$

(۲) $\text{ما} = \frac{1}{2}\left(\text{و}^{\text{لا}} + \text{و}^{-\text{لا}}\right)$ " $\frac{1}{2}\left(\text{و}^{\text{لا}} - \text{و}^{-\text{لا}}\right)$

(۳) $\text{ما} = \text{لا}^{\text{لوک}\sqrt{\text{لا}}}$ " $\frac{\text{لوک لا}}{\text{لا}}\sqrt{\text{لا}^{\text{لوک لا}}}$

(۴) $\text{ما} = \text{ا}^{\text{لوک}\sqrt{1-\text{لا}}}$ " $\frac{\text{ما لوک ا}}{2\,(\text{لا}-1)}$

۵ $\text{ما} = \left(\text{لوک لا}\right)^{\text{لوک لا}}$ " $\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\left\{1 + \text{لوک}\left(\text{لوک لا}\right)\right\}$

(۶) $\text{ما} = \frac{1}{2}\left(\text{و}^{\frac{\text{لا}}{2}} + \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{2}}\right)$ " $\frac{1}{4}\left(\text{و}^{\frac{\text{لا}}{2}} + \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{2}}\right)$

(۷) اگر $\text{لا}\,(1+\text{ما})^{\frac{1}{2}} + \text{ما}\,(1+\text{لا})^{\frac{1}{2}} = 0$ تو بتاؤ کہ

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = -\frac{1}{(1+\text{لا})^2}$$

(۸) اگر ما = $\frac{۱}{\text{لا}}$ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{فر ما}}{\sqrt{۱ + \text{ما}^۴}} + \frac{\text{فر لا}}{\sqrt{۱ + \text{لا}^۴}} = ۰$$

(۹) لا = $\text{و}^{\frac{\text{لا} - \text{ما}}{\text{ما}}}$ ثابت کرو کہ $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{لوک لا}}{(۱ + \text{لوک لا})^۲}$

(۱۰) $\text{ما} = \cfrac{\text{لا}^۲}{۱ + \cfrac{\text{لا}^۲}{۱ + \cfrac{\text{لا}^۲}{۱ + \text{وغیرہ لاتناہی تک}}}}$ $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ دریافت کرو

[حل ۔ $\text{ما} = \frac{\text{لا}^۲}{۱ + \text{ما}}$ پس $\text{ما}^۲ + \text{ما} = \text{لا}^۲$ اور $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{۲\text{لا}}{۱ + ۲\text{ما}}$

ما کی دو درجی مساوات حل کرنے سے $۲\text{ما} = -۱ \pm \sqrt{۱ + ۴\text{لا}^۲}$

لہذا $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{لا}^۲ + \frac{۱}{۴}}}$]

۲۴ $\frac{\text{فرجب د}}{\text{فر لا}}$ کی تعیین جبکہ د مسلسل تفاعل لا ہے۔

فرض کرو کہ ما = جب لا جس میں لا کی نیم قطریوں میں پیمایش کی گئی ہے۔

تب $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{جب (لا + مف لا) - جب لا}}{\text{مف لا}}$

$$= \frac{۲ \text{ جم } \frac{۱}{۲}(۲\text{لا} + \text{مف لا}) \text{ جب } \frac{۱}{۲}\text{مف لا}}{\text{مف لا}}$$

$$= \text{جم}\left(\text{لا} + \frac{\text{مف لا}}{۲}\right) \frac{\text{جب } \frac{\text{مف لا}}{۲}}{\frac{\text{مف لا}}{۲}}$$

$$\text{نہا}_{\text{مف لا}\to 0}\ \text{جم}\left(\text{لا}+\frac{\text{مف لا}}{2}\right)=\text{جم لا}\quad\text{اور}\quad \text{نہا}_{\text{مف لا}\to 0}\ \frac{\text{جب}\ \frac{\text{مف لا}}{2}}{\frac{\text{مف لا}}{2}}=1$$

(جیسا کہ علمِ مثلث مستوی کی ابتدائی کتب میں طالب علم نے پڑھا ہوگا)

$$\text{پس}\quad \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\ \text{جب لا}=\text{جم لا}$$

اگر ما = جب ء جبکہ ء مسلسل تفاعل لا ہے تو تفرق کے قاعدہ (ح) کی رو سے

$$\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\ \text{جب ء}=\text{جم ء}\ \frac{\text{فر ء}}{\text{فر لا}}$$

۵۔ $\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\ \text{جم ء}$ کی تعیین، جبکہ ء مسلسل تفاعلِ لا ہے :۔

$$\text{فرض کرو جم لا}=\text{ما}\quad\text{تب}\quad \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}=\frac{\text{جم}(\text{لا}+\text{مف لا})-\text{جم لا}}{\text{مف لا}}$$

$$=-\frac{2\ \text{جب}\ \frac{\text{مف لا}}{2}\ \text{جب}\left(\text{لا}+\frac{\text{مف لا}}{2}\right)}{\text{مف لا}}$$

$$=-\frac{\text{جب}\ \frac{\text{مف لا}}{2}\ \text{جب}\left(\text{لا}+\frac{\text{مف لا}}{2}\right)}{\frac{\text{مف لا}}{2}}$$

$$\text{نہا}_{\text{مف لا}\to 0}\ \frac{\text{جب}\ \frac{\text{مف لا}}{2}}{\frac{\text{مف لا}}{2}}=1\quad\text{اور}\quad \text{جب}\left(\text{لا}+\frac{\text{مف لا}}{2}\right)=\text{جب لا}$$

$$\therefore\quad \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\ \text{جم لا}=-\text{جب لا}$$

$$\text{اور اس لیے}\quad \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\ \text{جم ء}=-\text{جب لا}\ \frac{\text{فر ء}}{\text{فر لا}}$$

یہ نتیجہ ع۴ سے براہِ راست مستنبط ہوتا ہے اگر

$$\text{ما} = \text{جم}\,\text{ی} = \text{جب}\left(\frac{\pi}{2} - \text{ی}\right)$$ لکھا جائے

کیونکہ $\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\,\text{جب}\left(\frac{\pi}{2} - \text{ی}\right) = \text{جم}\left(\frac{\pi}{2} - \text{ی}\right)\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left(\frac{\pi}{2} - \text{ی}\right) = -\,\text{جب لا}\,\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$

واضح ہے کہ ع۴ اور ع۵ کے نتائج مندرجۂ ذیل متشاکل وضعوں میں لکھے جاسکتے ہیں :-

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}(\text{جب}\,\text{ی}) = \text{جب}\left(\text{ی} + \frac{\pi}{2}\right)\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$$

اور $$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}(\text{جم}\,\text{ی}) = \text{جم}\left(\text{ی} + \frac{\pi}{2}\right)\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$$

ع۶ $\frac{\text{فرمس ی}}{\text{فرلا}}$ کی تعیین، جبکہ ی مسلسل تفاعلِ لا ہے۔

فرض کرو $\text{ما} = \text{مس لا}$

تب $$\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \frac{\text{مس}(\text{لا} + \text{مف لا}) - \text{مس لا}}{\text{مف لا}}$$

$$= \frac{\dfrac{\text{جب}(\text{لا} + \text{مف لا})}{\text{جم}(\text{لا} + \text{مف لا})} - \dfrac{\text{جب لا}}{\text{جم لا}}}{\text{مف لا}}$$

$$= \frac{\text{جب مف لا}}{\text{مف لا}\ \text{جم لا}\ \text{جم}(\text{لا} + \text{مف لا})}$$

$$\underset{\text{مف لا}\to 0}{\text{نہا}}\ \frac{\text{جب مف لا}}{\text{مف لا}} \times \frac{1}{\text{جم لا}\ \text{جم}(\text{لا} + \text{مف لا})} = \frac{1}{\text{جم}^{2}\,\text{لا}}$$

$$\therefore\ \frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}(\text{مس لا}) = \frac{1}{\text{جم}^{2}\,\text{لا}} = \text{قط}^{2}\,\text{لا}$$

پس (فر / فر لا) (مس ی) = قط² ی (فر ی / فر لا)

واضح ہے (فر مس ی / فر لا) = (فر / فر لا) (جب ی / جم ی) اور حاصل تقسیم کے تفرق کے قاعدہ سے

= (جم ی (فر / فر لا) جب ی - جب ی (فر / فر لا) جم ی) / جم² ی

= ((جم² ی + جب² ی) / جم² ی) × (فر ی / فر لا) = قط² ی (فر ی / فر لا)

۷ (فر / فر لا) مم ی کی تعیین جبکہ ی مسلسل تفاعلِ لا ہے۔

۵ کے طریقوں سے یا مم لا کو (۱ / مس لا) لکھ کر طالب علم بآسانی ثابت کرسکتا ہے کہ

(فر مم لا / فر لا) = - (۱ / جب² لا) = - قم² لا

اور (فر / فر لا) (مم ی) = - قم² ی (فر ی / فر لا)

۸ (فر قط ی / فر لا) کی تعیین، جبکہ ی مسلسل تفاعلِ لا ہے

فرض کرو ما = قط لا = (۱ / جم لا)

∴ (فر ما / فر لا) = (جب لا / جم² لا) = مس لا قط لا

اور (فر قط ی / فر لا) = مس ی قط ی (فر ی / فر لا)

اسی طرح فر قم د / فر لا = - مم د قم د · فر د / فر لا

مثال (۱) ما = ا جم ک ت + ب جب ک ت، فر ما / فر ت دریافت کرو۔

فر ما / فر ت = - (ا جب ک ت) ک + (ب جم ک ت) ک

= - ا ک جب ک ت + ب ک جم ک ت

مثال (۲) ما = ا مس (جب لا) کو تفرق کرو۔

فرض کرو جب لا = د ∴ ما = ا مس د

فر ما / فر لا = فر (ا مس د) / فر د · فر د / فر لا = ا قط² د · فر د / فر لا

= ا قط² (جب لا) · فر جب لا / فر لا = ا قط² (جب لا) جم لا

۹۔ فر جب⁻¹ د / فر لا کی تعیین جبکہ د مسلسل تفاعل لا ہے۔

اور - π/۲ ≦ جب⁻¹ د ≦ π/۲

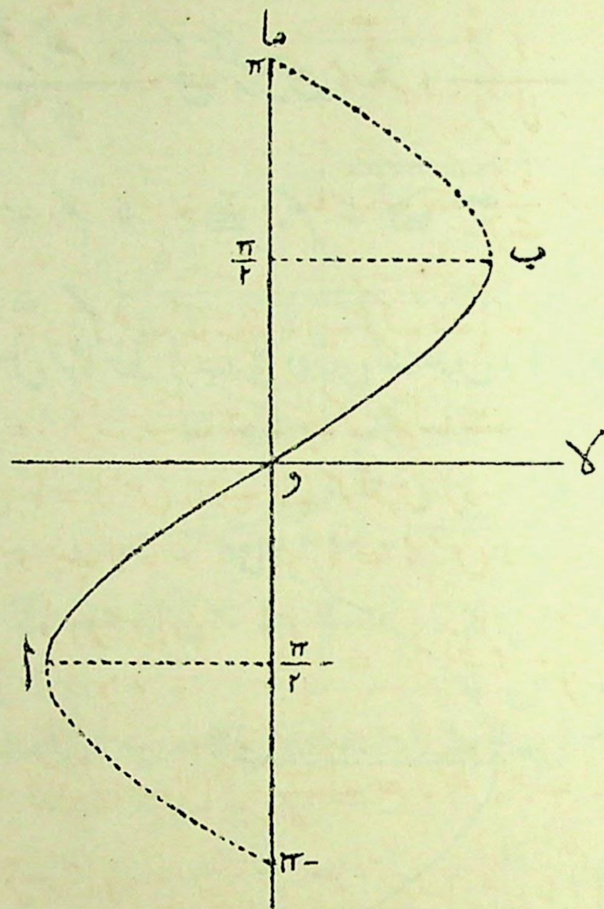
فرض کرو ما = جب⁻¹ لا ، - π/۲ ≦ جب⁻¹ لا ≦ π/۲ .... (ا)

لا = جب ما .... (ب)

شکل (۵) میں مسلسل موٹا خط ا و ب دونوں تفاعلوں (ا) اور (ب) کی ترسیم ہے۔

ما کو جب - π/۲ سے π/۲ تک کے وقفہ میں محدود رکھتے ہیں تو تفاعل ما = جب⁻¹ لا وحید القیمت ہوتا ہے۔

(ب) کو بلحاظ لا تفرق کرنے سے ۱ = جم ما فر ما / فر لا



شکل عث

ترسیم ما = جب$^{-1}$ لا

لیکن جم ما = $\sqrt{\text{۱} - \text{جب}^{2}\,\text{ما}} = \sqrt{\text{۱} - \text{لا}^{2}}$

$$\therefore \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{لا}^{2}}}$$

پس $\dfrac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\,\text{جب}^{-1}\,\text{ی} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \text{ی}^{2}}} \cdot \dfrac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$ ،

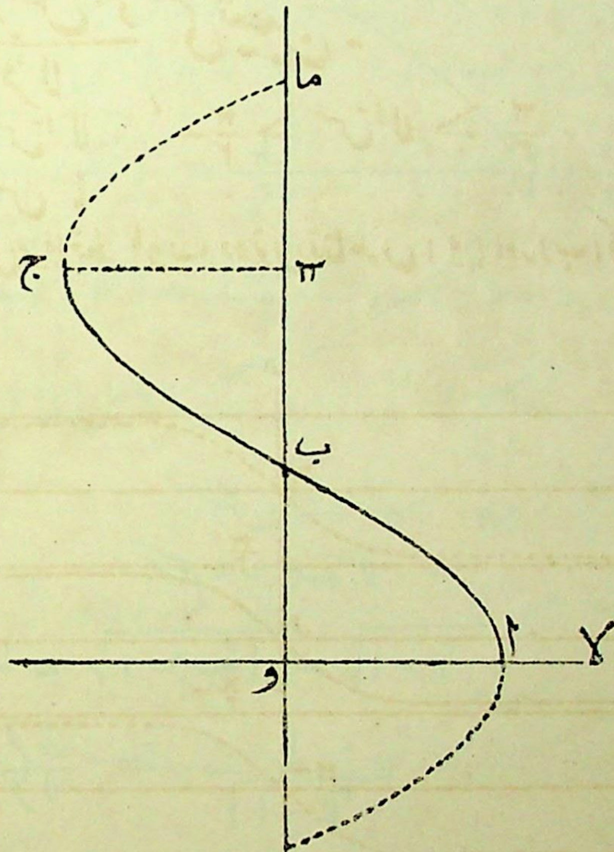
$$-\frac{\pi}{2} \leqq \text{جب}^{-1}\,\text{ی} \leqq \frac{\pi}{2}$$

۱۰ $\dfrac{\text{فرجم}^{-1}\text{لا}}{\text{فرلا}}$ کی تعیین -

فرض کرو ما = جم$^{-1}$ لا ، ۰ ≦ جم$^{-1}$ لا ≦ π .... (ا)

لا = جم ما .... (ب)

شکل ۶ میں مسلسل موٹا خط ا ب ج دونوں تفاعلوں (ا) اور (ب) کی ترسیم ہے -



شکل ۶

ترسیم ما = جم$^{-1}$ لا

(ب) کو بلحاظ لا تفرق کرنے سے ۱ = - جب ما $\dfrac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$

لیکن $جب\ ما = \sqrt{۱ - جم^{۲}\ ما} = \sqrt{۱ - لا^{۲}}$

$\therefore \quad \dfrac{فر\ ما}{فر\ لا} = -\dfrac{۱}{\sqrt{۱ - لا^{۲}}}$

پس $\dfrac{ف}{فر\ لا} جم^{-۱}\ ء = -\dfrac{۱}{\sqrt{۱ - ء^{۲}}}\ \dfrac{فر\ ء}{فر\ لا}$ ،

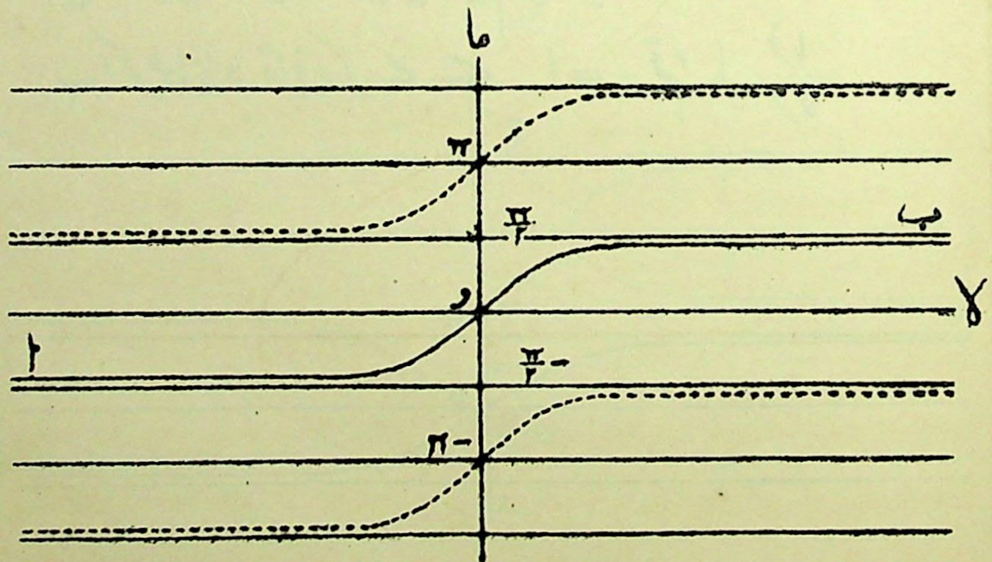
$۰ \leqq جم^{-۱}\ ء \leqq \pi$

۱۱ $\dfrac{فر\ مس^{-۱}\ ء}{فر\ لا}$ کی تعیین۔

فرض کرو $ما = مس^{-۱}\ لا$ ، $-\dfrac{\pi}{۲} < مس^{-۱}\ لا < \dfrac{\pi}{۲}$ .... (ا)

$لا = مس\ ما$ .... (ب)

شکل ۷ میں مسلسل موٹا خط ا و ب دونوں تفاعلوں (ا) اور (ب) کی ترسیم ہے۔



شکل ۷

ترسیم $ما = مس^{-۱}\ لا$

(ب) کو بلحاظ لا تفرق کرنے سے $۱ = \text{قط}^{۲}\,\text{ما}\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$

لیکن $\text{قط}^{۲}\,\text{ما} = ۱ + \text{مس}^{۲}\,\text{ما} = ۱ + \text{لا}^{۲}$

$$\therefore\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{۱}{۱ + \text{لا}^{۲}}$$

پس $\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\,\text{مس}^{-۱}\,\text{ء} = \frac{۱}{۱+\text{ء}^{۲}}\,\frac{\text{فرء}}{\text{فرلا}}\ ،\ -\frac{\pi}{۲} < \text{مس}^{-۱}\,\text{ء} < \frac{\pi}{۲}$

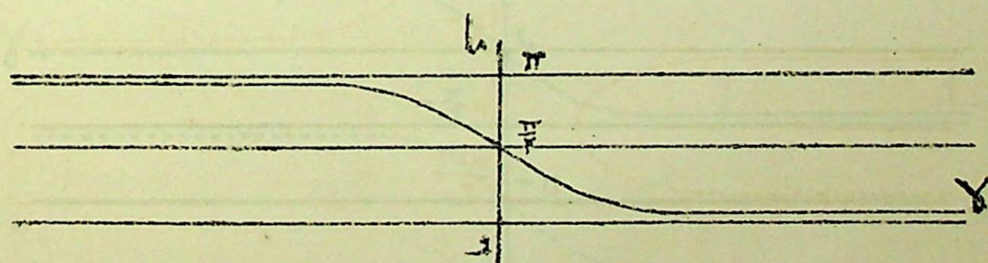
۱۳ $\frac{\text{فر قم}^{-۱}\,\text{ء}}{\text{فرلا}}$ کی تعیین۔

فرض کرو $\text{ما} = \text{قم}^{-۱}\,\text{لا}$ ، $۰ < \text{قم}^{-۱}\,\text{لا} < \pi$ ..... (ا)

$\text{لا} = \text{قم}\,\text{ما}$ .... (ب)

شکل عشہ میں دونوں تفاعلوں کی ترسیم درج ہے۔

(ب) کو بلحاظ لا تفرق کرنے سے $۱ = -\text{قم}^{۲}\,\text{ما}\ \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$



شکل عشہ

ترسیم $\text{ما} = \text{قم}^{-۱}\,\text{لا}$

لیکن $\text{قم}^{2}\,\text{ما} = 1 + \text{مم}^{2}\,\text{ما} = 1 + \text{لا}^{2}$

$$\therefore \quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = -\frac{1}{1+\text{لا}^{2}}$$

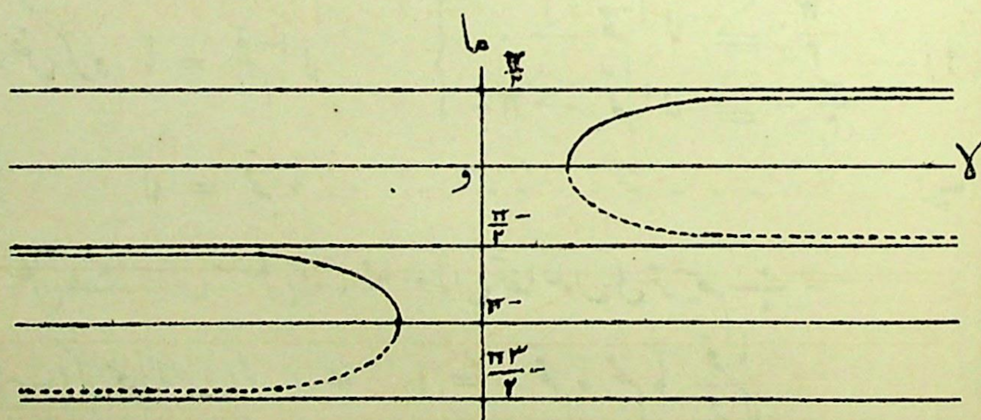
پس $\dfrac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\,\text{مم}^{-1}\,\text{ء} = -\dfrac{1}{1+\text{لا}^{2}}\,\dfrac{\text{فر ء}}{\text{فر لا}}$ ، $0 < \text{مم}^{-1}\,\text{ء} < \pi$

۱۳ $\dfrac{\text{فر قط}^{-1}\,\text{ء}}{\text{فر لا}}$ کی تعیین۔

فرض کرو $\text{ما} = \text{قط}^{-1}\,\text{لا}$ ، $\left\{ \begin{array}{l} 0 \leqq \text{قط}^{-1}\,\text{لا} < \frac{\pi}{2} \\ -\pi \leqq \text{قط}^{-1}\,\text{لا} < -\frac{\pi}{2} \end{array} \right.$ ....(ا)

$\text{لا} = \text{قط ما}$ ....(ب)

شکل ۹ میں مسلسل موٹا خط دونوں تفاعلوں کی ترسیم ہے۔



شکل ۹
ترسیم $\text{ما} = \text{قط}^{-1}\,\text{لا}$

(ب) کو بلحاظ لا تفرق کرنے سے $\text{۱} = \text{قط ما مس ما} \dfrac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$

$$\therefore \quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{۱}}{\text{قط ما مس ما}}$$

لیکن چونکہ $\text{قط}^{2}\text{ ما} = \text{۱} + \text{مس}^{2}\text{ ما}$ لہذا $\text{مس}^{2}\text{ ما} = \text{قط}^{2}\text{ ما} - \text{۱} = \text{لا}^{2} - \text{۱}$

$$\therefore \quad \text{مس ما} = \sqrt{\text{لا}^{2} - \text{۱}}$$

اور $$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{۱}}{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^{2} - \text{۱}}}$$

پس $$\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\,\text{قط}^{-1}\text{ی} = \frac{\text{۱}}{\text{ی}\sqrt{\text{ی}^{2} - \text{۱}}}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{۰} \leqq \text{قط}^{-1}\text{ی} < \frac{\pi}{2} \\ -\pi \leqq \text{قط}^{-1}\text{ی} < -\frac{\pi}{2} \end{array} \right.$$

۱۴ — $\dfrac{\text{فر قم}^{-1}\text{ی}}{\text{فر لا}}$ کی تعیین -

فرض کرو $$\text{ما} = \text{قم}^{-1}\text{لا}, \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{۰} < \text{قم}^{-1}\text{لا} \leqq \frac{\pi}{2} \\ -\pi < \text{قم}^{-1}\text{لا} \leqq -\frac{\pi}{2} \end{array} \right. \quad \text{.....(ا)}$$

$$\text{لا} = \text{قم ما} \quad \text{.............. (ب)}$$

شکل ع۱۰ میں مسلسل موٹا خط دونوں تفاعلوں کی ترسیم ہے -

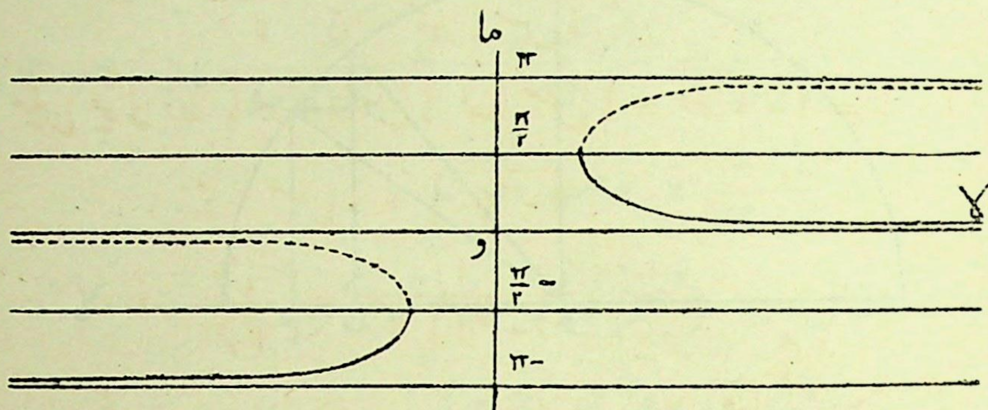
(ب) کو بلحاظ لا تفرق کرنے سے $\text{۱} = -\,\text{قم ما مم ما} \dfrac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$

$$\therefore \quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = -\frac{\text{۱}}{\text{قم ما مم ما}}$$

لیکن چونکہ $\text{قم}^{2}\text{ ما} = \text{۱} + \text{مم}^{2}\text{ ما}$ لہذا $\text{مم}^{2}\text{ ما} = \text{قم}^{2}\text{ ما} - \text{۱} = \text{لا}^{2} - \text{۱}$

$$\therefore \quad \text{مم ما} = \pm\sqrt{\text{لا}^{2} - \text{۱}}$$

اور $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = - \frac{1}{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^2 - 1}}$



شکل ۱۰

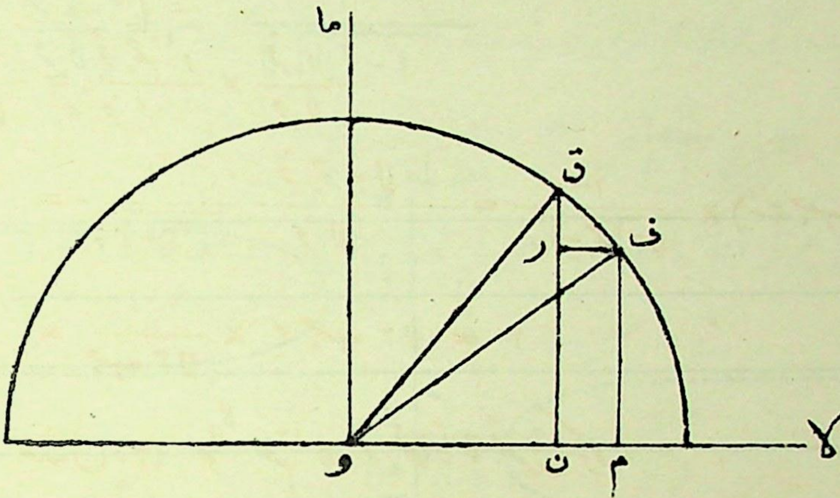
ترسیم ما = قم$^{-1}$ لا

پس $\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}} \text{قم}^{-1} \text{ی} = \frac{1}{\text{ی}\sqrt{\text{ی}^2 - 1}} \frac{\text{فر ی}}{\text{فر لا}}$ $\left\{ \begin{array}{l} 0 < \text{قم}^{-1}\text{ی} \leqq \frac{\pi}{2} \\ -\pi < \text{قم}^{-1}\text{ی} \leqq -\frac{\pi}{2} \end{array} \right.$

۱۵ جب ط کے تفرق کا ہندسی ثبوت۔

شکل ۱۱ میں و مرکز کا نصف دائرہ کھینچا گیا ہے۔ و لا ، و ما علی الترتیب لا اور ما کے محدد ہیں۔ زاویہ لا و ف کو اگر نیم قطری پیمانہ پر ط سے تعبیر کیا جائے تو

$$\text{ط} = \frac{\text{قوس ف لا}}{\text{و ف}} \quad \text{اور مف ط} = \frac{\text{قوس ف ق}}{\text{و ف}}$$



شکل ۱۱

$$\text{پس جب (طہ + مف طہ) - جب طہ} = \frac{\text{ق ر}}{\text{و ف}} = \frac{\text{ق ر}}{\text{ف ق}} \times \frac{\text{ف ق}}{\text{و ف}}$$

$$= \text{جم ف} \widehat{\text{ق}} \text{ر} \times \frac{\text{ف ق}}{\text{و ف}}$$

$$\therefore \frac{\text{جب (طہ + مف طہ) - جب طہ}}{\text{مف طہ}} = \text{جم ف} \widehat{\text{ق}} \text{ر} \times \frac{\text{ف ق}}{\text{قوس ف ق}}$$

$$\text{لیکن } \lim_{\text{مف طہ} \to 0} \frac{\text{ف ق}}{\text{قوس ف ق}} = 1 \text{ اور ساتھ ہی ف} \widehat{\text{ق}} \text{ر} = \text{طہ}$$

$$\text{اس لیے } \frac{\text{ف جب طہ}}{\text{ف طہ}} = \text{جم طہ}$$

شکل ۱۱ کے ذریعہ طالب علم بآسانی جم طہ، جب$^{-1}$ طہ اور جم$^{-1}$ طہ کے تفرق کے ضابطے بھی اخذ کر سکیگا۔ اسی طرح ہندسی طریقہ سے مس طہ، مس$^{-1}$ طہ وغیرہ کے تفرق کے ضابطے بھی مناسب عمل کے ذریعہ حاصل کیے جا سکتے ہیں۔

مثال (۱) ما = جم$^{-1}$ (جم ۲ لا) کا مشتق دریافت کرو۔

فرض کرو جم ۲ لا = ی

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{فر جم}^{-1}\text{ی}}{\text{فر ی}} \times \frac{\text{فر ی}}{\text{فر لا}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-\text{ی}^{2}}}\ \frac{\text{فر جم ۲ لا}}{\text{فر لا}} = \frac{-1}{\sqrt{1-\text{جم}^{2}\,\text{۲ لا}}} \times (-\text{۲ جب ۲ لا})$$

$$= \frac{1}{\text{جب ۲ لا}} \times \text{۲ جب ۲ لا} = 2$$

مثال (۲) $\text{و}^{\text{لا}}\,\text{جم}^{-1}\text{لا}$ کو بلحاظ لا تفرق کرو۔

فرض کرو $\text{و}^{\text{لا}}\,\text{جم}^{-1}\text{لا} = \text{ما}$

لوکارتم لینے سے $\text{لوک ما} = \text{لوک و}^{\text{لا}} + \text{لوک جم}^{-1}\text{لا}$

$$= \text{لا}^{\text{لا}} + \text{لوک جم}^{-1}$$

$$\therefore\ \frac{1}{\text{ما}}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{لا}^{\text{لا}}(1+\text{لوک لا}) - \frac{1}{\text{جم}^{-1}\text{لا}\ \sqrt{1-\text{لا}^{2}}}$$

$$\therefore\ \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ما}\left[\text{لا}^{\text{لا}}(1+\text{لوک لا}) - \frac{1}{\text{جم}^{-1}\sqrt{1-\text{لا}^{2}}}\right]$$

مثال (۳) اگر $\text{ما} = \text{۲ مس}^{-1}\left(\frac{1-\text{لا}}{1+\text{لا}}\right)^{\frac{1}{2}}$

تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{-1}{\sqrt{1-\text{لا}^{2}}}$

چونکہ $\frac{\text{ما}}{2} = \text{مس}^{-1}\left(\frac{1-\text{لا}}{1+\text{لا}}\right)^{\frac{1}{2}}$ لہذا $1 + \text{مس}^{2}\frac{\text{ما}}{2} = 1 + \frac{1-\text{لا}}{1+\text{لا}}$

یعنے $\text{قط}^{2}\,\frac{\text{ما}}{2} = \frac{2}{1+\text{لا}}$

$$\therefore \text{جم}^2\frac{\text{ما}}{2} = \frac{1+\text{لا}}{2} \quad \text{اور} \quad 2\,\text{جم}^2\frac{\text{ما}}{2} - 1 = \text{لا} = \text{جم ما}$$

تفرق کرنے سے $1 = \frac{\text{فر جم ما}}{\text{فر لا}} = -\text{جب ما}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ پس $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{-1}{\text{جب ما}}$

$$\text{جب ما} = \sqrt{1 - \text{لا}^2}$$

$$\therefore \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{-1}{\sqrt{1-\text{لا}^2}}$$

مثال (۴) $\text{ما} = \frac{\text{و}^{\text{اسں}^{-1}\text{لا}} \times (\text{الا} - 1)}{\sqrt{1+\text{لا}^2}}$ کو بلحاظ لا تفرق کرو۔

$$\text{ما}\,(1+\text{لا}^2)^{\frac{1}{2}} = \text{و}^{\text{اسں}^{-1}\text{لا}} \times (\text{الا} - 1)$$

لوکارتم لینے سے $\text{لوک ما} + \frac{1}{2}\,\text{لوک}\,(1+\text{لا}^2) = \text{اسں}^{-1}\text{لا} + \text{لوک}\,(\text{الا} - 1)$

$$\therefore \frac{1}{\text{ما}}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \frac{2\,\text{لا}}{2\,(1+\text{لا}^2)} = \frac{\text{ا}}{1+\text{لا}^2} + \frac{\text{ا}}{\text{الا}-1}$$

$$\frac{1}{\text{ما}}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{ا}}{1+\text{لا}^2} + \frac{\text{ا}}{\text{الا}-1} - \frac{\text{لا}}{1+\text{لا}^2}$$

$$= \frac{\text{ا}\,(\text{الا}-1) + \text{ا}\,(1+\text{لا}^2) - \text{لا}\,(\text{الا}-1)}{(\text{الا}-1)\,(1+\text{لا}^2)}$$

$$\therefore \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{ما}\,(1+\text{ا}^2)\,\text{لا}}{(\text{الا}-1)\,(1+\text{لا}^2)}$$

$$= \frac{\text{و}^{\text{اسں}^{-1}\text{لا}}\,(\text{الا}-\text{لا})}{(1+\text{لا}^2)^{\frac{1}{2}}} \times \frac{(1+\text{ا}^2)\,\text{لا}}{(\text{الا}-1)\,(1+\text{لا}^2)}$$

$$= \frac{(1+\text{ا}^2)\,\text{لا}\,\text{و}^{\text{اسں}^{-1}\text{لا}}}{(1+\text{لا}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

مثال (۵) $\text{ما} = \text{مس}^{-1} \dfrac{\sqrt{1+\text{لا}^2} + \sqrt{1-\text{لا}^2}}{\sqrt{1+\text{لا}^2} - \sqrt{1-\text{لا}^2}}$

$\therefore \text{مس ما} = \dfrac{\sqrt{1+\text{لا}^2} + \sqrt{1-\text{لا}^2}}{\sqrt{1+\text{لا}^2} - \sqrt{1-\text{لا}^2}}$

نسبتوں کے خواص سے $\dfrac{\text{مس ما} + 1}{\text{مس ما} - 1} = \dfrac{\sqrt{1+\text{لا}^2}}{\sqrt{1-\text{لا}^2}}$

مربع کرنے سے $\dfrac{(\text{مس ما}+1)^2}{(\text{مس ما}-1)^2} = \dfrac{1+\text{لا}^2}{1-\text{لا}^2}$

اور بالآخر $\text{لا}^2 = \dfrac{(1+\text{مس ما})^2 - (1-\text{مس ما})^2}{(1+\text{مس ما})^2 + (1-\text{مس ما})^2} = \dfrac{2\,\text{مس ما}}{1+\text{مس}^2\,\text{ما}} = \text{جب}\ 2\,\text{ما}$

$\therefore \dfrac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\ \text{جم}\ 2\,\text{ما} = \text{لا} \quad \therefore \dfrac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \dfrac{\text{لا}}{\text{جم}\ 2\,\text{ما}} = \dfrac{\text{لا}}{\sqrt{1-\text{لا}^4}}$

مثالیں

ذیل کے تفاعلوں کو بلحاظ لا تفرق کرو۔

(۱) $\text{ما} = \text{لوک}\,(\text{لوک لا})$ جواب $\dfrac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \dfrac{1}{\text{لا لوک لا}}$

(۲) $\text{ما} = \text{لا}^{\text{لا}^{\text{ن}}}$ $= \text{لا}^{\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ن} - 1}\,(\text{ن لوک لا} + 1)$

(۳) $\text{ما} = \text{مس}\,\dfrac{\text{ا لا}}{1+\text{ب لا}}$ جواب $= \dfrac{\text{ا}}{(1+\text{ب لا})^2}\,\text{قط}^2\,\dfrac{\text{ا لا}}{1+\text{ب لا}}$

(۴) $\text{ما} = \dfrac{\text{جم لا}}{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}}$ جواب $= \dfrac{\text{لا}^2\,\text{جب لا} + \text{لا جم لا} - \text{ا}^2\,\text{جب لا}}{(\text{ا}^2 - \text{لا}^2)^{\frac{3}{2}}}$

(۵) $\text{ما} = (\text{ا جب}^{۲}\text{لا} + \text{ب جم}^{۲}\text{لا})^{\text{ن}}$ جواب $= \text{ن}\,(\text{ا}-\text{ب})\,\text{جب}\,۲\text{لا}\,(\text{ا جب}^{۲}\text{لا} + \text{ب جب}^{۲}\text{لا})^{\text{ن}-۱}$

(۶) $\text{ما} = \sqrt{\text{قط}\sqrt{۱-\text{لا}^{۲}}}$ جواب $= \frac{۱}{۲\sqrt{۱-\text{لا}^{۲}}}\,\text{مس}\sqrt{۱-\text{لا}^{۲}}\,\sqrt{\text{قط}\sqrt{۱-\text{لا}^{۲}}}$

(۷) $\text{ما} = \text{و}^{\text{لا}}\,\text{مس}^{-۱}\text{لا}$ جواب $= \text{و}^{\text{لا}}\left\{\frac{۱}{۱+\text{لا}^{۲}} + \text{لا}^{\text{لا}}\,\text{مس}^{-۱}(۱+\text{لوک لا})\right\}$

(۸) $\text{ما} = \text{جم}^{-۱}\frac{\text{و}^{\text{لا}} - \text{و}^{-\text{لا}}}{\text{و}^{\text{لا}} + \text{و}^{-\text{لا}}}$ جواب $= -\frac{۲}{(\text{و}^{\text{لا}} + \text{و}^{-\text{لا}})}$

(۹) $\text{ما} = \text{مس}^{-۱}\sqrt{\frac{۱-\text{جم لا}}{۱+\text{جم لا}}}$ جواب $= \frac{۱}{۲}$

(۱۰) $\text{ما} = \text{جم}^{-۱}\frac{\text{ب} + \text{ا جم لا}}{\text{ا} + \text{ب جم لا}}$ جواب $= \frac{\sqrt{\text{ا}^{۲} - \text{ب}^{۲}}}{\text{ا} + \text{ب جم لا}}$

(۱۱) $\text{ما} = \text{مم}^{-۱}\frac{۱+\sqrt{۱+\text{لا}^{۲}}}{\text{لا}}$ جواب $= \frac{۱}{۲(۱+\text{لا}^{۲})}$

(۱۲) $\text{ما} = \frac{\text{مم}^{-۱}\text{لا}}{\text{مس}^{-۱}\text{لا}}$ جواب $= -\frac{\text{مس}^{-۱}\text{لا} + \text{مم}^{-۱}\text{لا}}{(۱+\text{لا}^{۲})(\text{مس}^{-۱}\text{لا})^{۲}}$

(۱۳) $\text{ما} = \text{مس}^{-۱}\frac{۲\text{لا} - \text{ب}}{\text{ب}\sqrt{۳}} + \text{مس}^{-۱}\frac{۲\text{ب} - \text{لا}}{\text{لا}\sqrt{۳}}$ جواب $= ۰$

(۱۴) $\text{ما} = \sqrt{\text{لا}^{۲} - ۱}\;\text{قط}^{-۱}\sqrt{\text{لا}^{۲}-۱}$

جواب $= \frac{\text{لا}}{\sqrt{\text{لا}^{۲}-۱}}\Big[\text{قط}^{-۱}\sqrt{\text{لا}^{۲}-۱} + \frac{۱}{\sqrt{\text{لا}^{۲}-۲}}$

(۱۵) $\text{ما} = \text{مس}^{-۱}\frac{\sqrt{\text{لا}} + \sqrt{\text{ا}}}{۱ - \sqrt{\text{ا لا}}}$ اشارہ ـ یہاں $\text{ما} = \text{مس}^{-۱}\sqrt{\text{لا}} + \text{مس}^{-۱}\sqrt{\text{ا}}$

جواب $= \frac{۱}{۲\sqrt{\text{لا}}\,(۱+\text{لا})}$

(۱۶) $\text{لوک}\left(\frac{۱+\text{لا}}{۱-\text{لا}}\right)^{\frac{۱}{۴}} - \frac{۱}{۲}\,\text{مس}^{-۱}\text{لا}$ جواب $= \frac{\text{لا}^{۲}}{۱-\text{لا}^{۴}}$

(۱۷) $\text{ما} = \text{لو}\sqrt{\dfrac{\text{لا}^2 + \sqrt{2}\,\text{لا} + 1}{\text{لا}^2 - \sqrt{2}\,\text{لا} + 1}} + \text{مس}^{-1}\dfrac{\sqrt{2}\,\text{لا}}{1 - \text{لا}^2}$ جواب $= \dfrac{2\sqrt{2}}{1 + \text{لا}^4}$

(۱۸) $\text{ما} = \text{لو}\dfrac{(1 + \text{لا}^2)^{\frac{1}{2}}}{(\text{لا} + 1)^{\frac{1}{2}}} + \dfrac{1}{2}\,\text{مس}^{-1}\,\text{لا}$ جواب $= \dfrac{\text{لا}}{(\text{لا} + 1)(\text{لا}^2 + 1)}$

(۱۹) $\text{ما} = \text{لو}\dfrac{\text{لا} + 1}{\text{لا} - 1} + \dfrac{1}{2}\,\text{لو}\dfrac{\text{لا}^2 + \text{لا} + 1}{\text{لا}^2 - \text{لا} + 1} + \sqrt{3}\,\text{مس}^{-1}\dfrac{\sqrt{3}\,\text{لا}}{\text{لا}^2 - 1}$

جواب $= \dfrac{6}{\text{لا}^6 - 1}$

(۲۰) ثابت کرو کہ $\dfrac{\text{ف}}{\text{ف ط}}\left(\text{جب ط جم ط}\sqrt{1 - \text{ج}^2\,\text{جب}^2\,\text{ط}}\right)$

$$= \frac{\text{ا جب}^4\,\text{ط} + \text{ب جب}^2\,\text{ط} + \text{ج}}{\sqrt{1 - \text{ج}^2\,\text{جب}^2\,\text{ط}}}$$

جس میں $\text{ا} = 3\,\text{ج}^2$، $\text{ب} = -2(1 + \text{ج}^2)$ اور $\text{ج} = 1$

پانچواں باب

متواتر تفرق

۱۔ متواتر تفرق ــــ اب تک ہم نے واحد متغیر کے مختلف تفاعلوں کو تفرق کرنے کے قاعدوں کا مطالعہ کیا۔ چونکہ ما = ف (لا) کا تفرقی سر یا مشتق عموماً لا کا ایک دوسرا تفاعل ہوتا ہے اس لیے بلحاظ لا اس کو مکرر تفرق کر سکتے ہیں۔ $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کا یہ تفرقی سر یا مشتق بلحاظ لا ابتدائی تفاعل یعنی ما کا دوسرا تفرقی سر یا دوسرا مشتق کہلاتا ہے اور اِس کے لیے علامات $\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}}$ یا $\text{ما}''$ یا $\text{عف}^{2}\,\text{ما}$ یا $\text{عف}_{\text{لا لا}}\,\text{ما}$ استعمال کیے جاتے ہیں۔

اسی طرح $\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}}$ کا مشتق بلحاظ لا، ابتدائی تفاعل ما کا تیسرا تفرقی سر یا تیسرا مشتق بلحاظ لا کہلاتا ہے۔ اور $\frac{\text{فر}^{3}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{3}}$ وغیرہ سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ تین سے بالاتر یا اعلیٰ مشتقات کے لیے بھی اسی اصول کے بموجب نام مستعمل ہیں۔ چنانچہ ما کا ن۔واں مشتق بلحاظ لا $\frac{\text{فر}^{\text{ن}}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{\text{ن}}}$، یا $\text{ما}^{(\text{ن})}$، یا $\text{عف}^{\text{ن}}\,\text{ما}$ وغیرہ

تعبیر کیا جاتا ہے اور ما کو بلحاظ لا متواتر ن مرتبہ تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

متواتر تفرق کو میکانیات اور ہندسہ میں بڑی اہمیت حاصل ہے۔

مثال $\frac{1}{\text{لا}+1}$ کا دوسرا اور ن۔واں تفرقی سر یا مشتق دریافت کرو۔

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\left(\frac{1}{\text{لا}+1}\right)=\frac{\text{فر}(\text{لا}+1)^{-1}}{\text{فرلا}}=-(\text{لا}+1)^{-2}\,\frac{\text{فر}(\text{لا}+1)}{\text{فرلا}}$$

$$=-(\text{لا}+1)^{-2}$$

$$\therefore\ \frac{\text{فر}^2}{\text{فرلا}^2}\left(\frac{1}{\text{لا}+1}\right)=\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}-(\text{لا}+1)^{-2}=\frac{2}{(\text{لا}+1)^3}=2(\text{لا}+1)^{-3}$$

اسی طرح $\frac{\text{فر}^{\text{ن}}}{\text{فرلا}^{\text{ن}}}\left(\frac{1}{\text{لا}+1}\right)=(-1)^{\text{ن}}\,\underline{|\text{ن}}\,(\text{لا}+1)^{-(\text{ن}+1)}$

۳۔ لا$^{\text{ن}}$ کے مشتق تفاعلات۔ جس میں ن ایک مستقل ہے۔

فرض کرو ما = لا$^{\text{ن}}$

تب $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}=\text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}-1}$ ، $\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فرلا}^2}=\text{ن}(\text{ن}-1)\,\text{لا}^{\text{ن}-2}$

اور عام طور پر $\frac{\text{فر}^{\text{ر}}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ر}}}=\text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)\cdots(\text{ن}-\text{ر}+1)\,\text{لا}^{\text{ن}-\text{ر}}$

اگر ن مثبت صحیح عدد ہو تو $\frac{\text{فر}^{\text{ن}}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}}}=\text{ن}(\text{ن}-1)\cdots\cdots 1=\underline{|\text{ن}}$

اور ن سے بالاتر مشتقات معدوم ہوتے ہیں۔

اگر ن کسر یا منفی قوت نما ہو تو ن کے بعد کے مشتقات میں سے کوئی مشتق معدوم نہ ہو سکیگا۔

۳۔ اگر ما = لا$^{\text{ن}-۱}$ لوک لا تو $\frac{\text{فر}^{\text{ن}}\text{ما}}{\text{فر لا}^{\text{ن}}}$ کی تعیین ۔

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = (\text{ن}-۱)\,\text{لا}^{\text{ن}-۲}\,\text{لوک لا} + \frac{۱}{\text{لا}}\,\text{لا}^{\text{ن}-۱} = (\text{ن}-۱)\,\text{لا}^{\text{ن}-۲}\,\text{لوک لا} + \text{لا}^{\text{ن}-۲}$$

$$\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} = (\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)\,\text{لا}^{\text{ن}-۳}\,\text{لوک لا} + \frac{(\text{ن}-۱)\,\text{لا}^{\text{ن}-۲}}{\text{لا}} + (\text{ن}-۲)\,\text{لا}^{\text{ن}-۳}$$

$$= (\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)\,\text{لا}^{\text{ن}-۳}\,\text{لوک لا} + (\overline{\text{ن}-۱} + \overline{\text{ن}-۲})\,\text{لا}^{\text{ن}-۳}$$

. . . .

اور $\frac{\text{فر}^{\text{ن}-۱}\text{ما}}{\text{فر لا}^{\text{ن}-۱}} = (\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)\ldots\ldots۱\,\text{لوک لا} + (\text{ن}-۱)(\text{ن}-۲)\ldots\ldots۱$

$$+ (\overline{\text{ن}+۱} + \overline{\text{ن}-۲} + \ldots\ldots)\,۱$$

$$\therefore \frac{\text{فر}^{\text{ن}}\text{ما}}{\text{فر لا}^{\text{ن}}} = \frac{\overline{\text{ن}-۱}}{\text{لا}} + ۰ + ۰ \ldots$$

اس مثال میں ظاہر ہے کہ عمل تفرق جیسا جیسا آگے کو بڑھتا جاتا ہے وہ تمام رقوم نظر انداز کیے جاسکتے ہیں جن میں لوک لا بطور جزو ضربی موجود نہیں ہوتا ہے ۔

۴۔ ما = جب م لا کے مشتق تفاعلات ۔

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{م جم م لا} \qquad \text{اور} \qquad \frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} = -\text{م}^{۲}\,\text{جب م لا}$$

اور عام طور پر

$$\begin{cases} \dfrac{\text{فر}^{۲\text{ن}}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲\text{ن}}} = (-۱)^{\text{ن}}\,\text{م}^{۲\text{ن}}\,\text{جب م لا} \\[2ex] \dfrac{\text{فر}^{۲\text{ن}+۱}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲\text{ن}+۱}} = (-۱)^{\text{ن}}\,\text{م}^{۲\text{ن}+۱}\,\text{جم م لا} \end{cases}$$

یہ دونوں نتائج ایک مساوات کے ذریعہ ظاہر کیے جاسکتے ہیں چنانچہ

$$\left(\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\right)^{\text{ر}} \text{جب م لا} = \text{م}^{\text{ر}}\,\text{جب}\left(\text{م لا} + \text{ر}\,\frac{\pi}{۲}\right)$$

اسی طرح

$$\left(\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\right)^{\text{ر}} \text{جم م لا} = \text{م}^{\text{ر}}\,\text{جم}\left(\text{م لا} + \text{ر}\,\frac{\pi}{۲}\right)$$

۵ ما = و^ا لا کے مشتق تفاعلات۔

فر ما / فر لا = ا و^ا لا ، فر² ما / فر لا² = ا² و^ا لا اور اسی طرح فرن ما / فر لان = ان و^ا لا

اگر فرن ما / فر لان کے عوض سہولت کی خاطر ن - ویں مشتق کے لیے (فر / فر لا)^ن لکھا جائے تو اس ترقیم کے بموجب

{ ا. (فر / فر لا)^ن + ا, (فر / فر لا)^{ن-١} + ا٢ (فر / فر لا)^{ن-٢} + ... + ان } و^ا لا

= ا. (فر / فر لا)^ن و^ا لا + ا, (فر / فر لا)^{ن-١} و^ا لا + ا٢ (فر / فر لا)^{ن-٢} و^ا لا + ...

= ا. ا^ن و^ا لا + ا, ا^{ن-١} و^ا لا + ا٢ ا^{ن-٢} و^ا لا + ... + ان و^ا لا

= { ا. ا^ن + ا, ا^{ن-١} + ا٢ ا^{ن-٢} + ... + ان } و^ا لا

اور اگر ا. لا^ن + ا, لا^{ن-١} + ... ان کو فہ (لا) تفاعل سے تعبیر کیا جائے تو مصرحۂ بالا نتیجہ بشکل فہ (فر / فر لا) و^ا لا = فہ (ا) و^ا لا لکھا جا سکتا ہے، اس مفروضہ پر کہ تفاعل فہ (ا) میں ا کی صرف مثبت صحیح قوتیں شریک ہیں۔

٦ ما = و^ا لا جب ب لا کا ن - وال تفرقی سر۔

فر ما / فر لا = و^ا لا (ا جب ب لا + ب جم ب لا)

اگر مس فہ = ب / ا تو ب = √(ا² + ب²) جب فہ

اور $ا = \sqrt{ا^{۲} + ب^{۲}}$ جم فہ

پس $\frac{فرما}{فرلا} = (ا^{۲} + ب^{۲})^{\frac{۱}{۲}}$ $و^{الا}$ جب (ب لا + فہ)

اور $\frac{فر^{۲}ما}{فرلا^{۲}} = (ا^{۲} + ب^{۲})$ $و^{الا}$ جب (ب لا + ۲ فہ)

∴ $\frac{فر^{ن}ما}{فرلا^{ن}} = (ا^{۲} + ب^{۲})^{\frac{ن}{۲}}$ $و^{الا}$ جب (ب لا + ن فہ)

اسی طرح $\left(\frac{فر}{فرلا}\right)^{ن}$ $و^{الا}$ جم ب لا $= (ا^{۲} + ب^{۲})^{\frac{ن}{۲}}$ $و^{الا}$ جم (ب لا + ن فہ)

۷۔ $مس^{-۱}\left(\frac{۱}{لا}\right)$ اور $مس^{-۱}$ لا کے مشتقوں کی تعیین۔

(۱) فرض کرو ما $= مس^{-۱}\left(\frac{۱}{لا}\right)$ یا لا = مم ما

تب $\frac{فرلا}{فرما} = -قم^{۲}$ ما $= -(۱ + لا^{۲})$

∴ $\frac{فرما}{فرلا} = \frac{-۱}{۱ + لا^{۲}} = -جب^{۲}$ ما

اس لیے $\frac{فر^{۲}ما}{فرلا^{۲}} = \frac{فر}{فرلا}\left(\frac{فرما}{فرلا}\right) = -\frac{فر}{فرلا}(جب^{۲}ما) = -\frac{فرما}{فرلا}\,\frac{فر}{فرما}(جب^{۲}ما)$

$= جب^{۲}ما\,\frac{فر}{فرما}(جب^{۲}ما) = جب^{۲}$ ما جب ۲ ما

مکرر $\frac{فر^{۳}ما}{فرلا^{۳}} = \frac{فر}{فرلا}(جب^{۲}$ ما جب ۲ ما$) = -جب^{۲}$ ما (۲ جب ما جم ما جب ۲ ما + ۲ $جب^{۲}$ ما جم ۲ ما)

$= -۲\,جب^{۳}$ ما (جب ما جم ۲ ما + جم ما جب ۲ ما) $= -۲\,جب^{۳}$ ما جب ۳ ما

اسی طرح $\frac{فر^{۴}ما}{فرلا^{۴}} = ۱ \times ۲ \times ۳\,جب^{۴}$ ما جب ۴ ما

اور عام طور پر $\frac{\text{فرن ما}}{\text{فرلان}} = (-۱)^{\text{ن}} \; |\text{ن}-۱ \; \text{جب}^{\text{ن}} \text{ما جب ن ما}$

(ب) چونکہ $\text{مس}^{-۱} \text{لا} = \frac{\pi}{۲} - \text{مس}^{-۱} \frac{۱}{\text{لا}}$

$$\frac{\text{فرن}(\text{مس}^{-۱}\text{لا})}{\text{فرلان}} = (-۱)^{\text{ن}-۱} \; |\text{ن}-۱ \; \text{جب}^{\text{ن}} \text{ما جب ن ما}$$

جس میں $\text{ما} = \text{مم}^{-۱} \text{لا}$، حسب سابق

مندرجۂ بالا نتیجہ اس طرح سے بھی لکھا جا سکتا ہے:

$$\frac{\text{فرن}(\text{مس}^{-۱}\text{لا})}{\text{فرلان}} = (-۱)^{\text{ن}-۱} \; |\text{ن}-۱ \; \frac{\text{جب}(\text{ن مس}^{-۱}\frac{۱}{\text{لا}})}{(۱+\text{لا}^۲)^{\frac{\text{ن}}{۲}}}$$

۸- اگر $\text{ما} = \text{جب}(\text{م جب}^{-۱}\text{لا})$ تو ثابت کرو کہ

$$(۱-\text{لا}^۲)\frac{\text{فر}^۲\text{ما}}{\text{فرلا}^۲} - \text{لا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{م}^۲\text{ما} = ۰$$

دیے ہوئے تفاعل کو بلحاظ لا تفرق کرنے سے

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{م جم}(\text{م جب}^{-۱}\text{لا})}{\sqrt{۱-\text{لا}^۲}}$$

$$\therefore (۱-\text{لا}^۲)\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^۲ = \text{م}^۲ \text{جم}^۲(\text{م جب}^{-۱}\text{لا})$$

دوبارہ تفرق کرنے سے

$$۲(۱-\text{لا}^۲)\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\frac{\text{فر}^۲\text{ما}}{\text{فرلا}^۲} - \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^۲ ۲\text{لا} = -\frac{۲\text{م}^۲\text{جم}(\text{م جب}^{-۱}\text{لا})\,\text{جب}(\text{م جب}^{-۱}\text{لا})\,\text{م}}{\sqrt{۱-\text{لا}^۲}}$$

$$\therefore (۱-\text{لا}^۲)\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\frac{\text{فر}^۲\text{ما}}{\text{فرلا}^۲} - \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^۲ \text{لا} = -\frac{\text{م}^۳\text{جم}(\text{م جب}^{-۱}\text{لا})\,\text{جب}(\text{م جب}^{-۱}\text{لا})}{\sqrt{۱-\text{لا}^۲}}$$

$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ پر تقسیم کرنے سے

$$(۱-\text{لا}^۲)\frac{\text{فر}^۲\text{ما}}{\text{فرلا}^۲} - \text{لا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \frac{\frac{\text{م}^۳\text{جم}(\text{م جب}^{-۱}\text{لا})\,\text{جب}(\text{م جب}^{-۱}\text{لا})}{\sqrt{۱-\text{لا}^۲}}}{\frac{\text{م جم}(\text{م جب}^{-۱}\text{لا})}{\sqrt{۱-\text{لا}^۲}}} = ۰$$

$$\therefore\ (\text{۱}-\text{لا}^{\text{۲}})\,\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{۲}}}-\text{لا}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}+\text{م}^{\text{۲}}\,\text{ما}=\text{۰}$$

مثال (۱) اگر $\text{ما}=\dfrac{(\text{ا لا}+\text{ب})}{(\text{ج لا}+\text{د})}$ تو ثابت کرو کہ

$$\text{۲}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\times\frac{\text{فر}^{\text{۳}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{۳}}}=\text{۳}\left(\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{۲}}}\right)^{\text{۲}}$$

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}=\frac{-(\text{ا لا}+\text{ب})}{(\text{ج لا}+\text{د})^{\text{۲}}}+\frac{\text{ا}}{\text{ج لا}+\text{د}}$$

$$\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{۲}}}=\frac{\text{۲ ج}^{\text{۲}}(\text{ا لا}+\text{ب})}{(\text{ج لا}+\text{د})^{\text{۳}}}-\frac{\text{۲ ا ج}}{(\text{ج لا}+\text{د})^{\text{۲}}}$$

$$\frac{\text{فر}^{\text{۳}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{۳}}}=-\frac{\text{۶ ج}^{\text{۳}}(\text{ا لا}+\text{ب})}{(\text{ج لا}+\text{د})^{\text{۴}}}+\frac{\text{۶ ا ج}^{\text{۲}}}{(\text{ج لا}+\text{د})^{\text{۳}}}$$

پس
$$\text{۲}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\times\frac{\text{فر}^{\text{۳}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{۳}}}=\text{۲}\left\{\frac{\text{۶ ج}^{\text{۴}}(\text{ا لا}+\text{ب})^{\text{۲}}}{(\text{ج لا}+\text{د})^{\text{۶}}}-\frac{\text{۶ ا ج}^{\text{۳}}(\text{ا لا}+\text{ب})}{(\text{ج لا}+\text{د})^{\text{۵}}}-\frac{\text{۶ ا ج}^{\text{۳}}(\text{ا لا}+\text{ب})}{(\text{ج لا}+\text{د})^{\text{۵}}}+\frac{\text{۶ ا}^{\text{۲}}\text{ج}^{\text{۲}}}{(\text{ج لا}+\text{د})^{\text{۴}}}\right\}$$

اور
$$\text{۳}\left(\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{۲}}}\right)^{\text{۲}}=\text{۳}\left\{\frac{\text{۴ ج}^{\text{۴}}(\text{ا لا}+\text{ب})^{\text{۲}}}{(\text{ج لا}+\text{د})^{\text{۶}}}-\frac{\text{۸ ا ج}^{\text{۳}}(\text{ا لا}+\text{ب})}{(\text{ج لا}+\text{د})^{\text{۵}}}+\frac{\text{۴ ا}^{\text{۲}}\text{ج}^{\text{۲}}}{(\text{ج لا}+\text{د})^{\text{۴}}}\right\}$$

اور واضح ہے کہ یہ دونوں مساوی ہیں ۔

مثال (۲) اگر ما = ک جم (لوک لا) + ل جب (لوک لا) تو بتاؤ کہ

$$\text{لا}^{\text{۲}}\,\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{۲}}}+\text{لا}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}+\text{ما}=\text{۰}$$

ما کو بلحاظ لا تفرق کرنے سے

$$\text{لا}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}=-\text{ک جب (لوک لا)}+\text{ل جم (لوک لا)}$$

مکرر تفرق سے $\text{لا}\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} + \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = -\frac{\text{ک جم (لوک لا)}}{\text{لا}} - \frac{\text{ل جب (لوک لا)}}{\text{لا}}$

$$\therefore\ \text{لا}^2\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} + \text{لا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ک جم (لوک لا)} + \text{ل جب (لوک لا)} = 0$$

یعنے $\text{لا}^2\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} + \text{لا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ما} = 0$

۹ لائبنٹس (Leibniz) کا مسئلہ —

لا کے دو تفاعلوں کے حاصل ضرب کا ن۔ واں تفرقی سر دریافت کرنے کے لیے لائبنٹس کا مندرجۂ ذیل مسئلہ استعمال کیا جاتا ہے:

فرض کرو د اور و، لا کے دو تفاعل ہیں اور ما = د و تب

$$\frac{\text{فر}^{\text{ن}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}}} \equiv \frac{\text{فر}^{\text{ن}}(\text{دو})}{\text{فرلا}^{\text{ن}}} = \text{د}\frac{\text{فر}^{\text{ن}}\text{و}}{\text{فرلا}^{\text{ن}}} + \text{ن}\frac{\text{فرد}}{\text{فرلا}}\,\frac{\text{فر}^{\text{ن}-1}\text{و}}{\text{فرلا}^{\text{ن}-1}} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{2\times1}\,\frac{\text{فر}^2\text{د}}{\text{فرلا}^2}\,\frac{\text{فر}^{\text{ن}-2}\text{و}}{\text{فرلا}^{\text{ن}-2}} + \ldots + \text{ن}\frac{\text{فر}^{\text{ن}}\text{د}}{\text{فرلا}^{\text{ن}}}$$

بنظر سہولت $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$، $\frac{\text{فرد}}{\text{فرلا}}$ اور $\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}}$ کے لیے علی الترتیب $\text{ما}'$، $\text{د}'$ اور $\text{و}'$ لکھو

اِس طرح ما، د اور و کے دوسرے تفرقی سروں کو علی الترتیب $\text{ما}''$، $\text{د}''$ اور $\text{و}''$ سے تعبیر کرو اور اسی طریقۂ ترقیم کے بموجب ان کے ن۔ ویں تفرقی سروں کو $\text{ما}^{(\text{ن})}$، $\text{د}^{(\text{ن})}$ اور $\text{و}^{(\text{ن})}$ سے تعبیر کرو۔

ما کو بلحاظ لا پہلے مرتبہ تفرق کرنے سے $\text{ما}' = \text{د}\text{و}' + \text{و}\text{د}'$

دوسرے مرتبہ تفرق کرنے سے $\text{ما}'' = \text{د}\text{و}'' + \text{د}'\text{و}' + \text{و}'\text{د}' + \text{و}\text{د}'' = \text{د}\text{و}'' + 2\text{د}'\text{و}' + \text{و}\text{د}''$

تیسرے مرتبہ تفرق کرنے سے $\text{ما}''' = \text{د}\text{و}''' + \text{د}'\text{و}'' + 2\text{د}'\text{و}'' + 2\text{د}''\text{و}' + \text{و}'\text{د}'' + \text{و}\text{د}'''$

$$= \text{د}\text{و}''' + 3\text{د}'\text{و}'' + 3\text{د}''\text{و}' + \text{و}\text{د}'''$$

جس سے ظاہر ہے کہ جملہ مندرجہ بالا کی رقمیں $(\text{ا}+\text{ب})^3$ کے پھیلاؤ کی رقموں کے

مشابہ ہیں۔

فرض کرو کہ ن - ویں تفرقی سر کے جملہ کی رقمیں بھی اسی کلیہ کے تابع ہیں۔

اور $\text{ا}^{(\text{ن})} = \text{ی}\,\text{و}^{(\text{ن})} + \text{ن}\,\text{یَ}\,\text{و}^{(\text{ن}-1)} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{1\times 2}\,\text{یً}\,\text{و}^{(\text{ن}-2)}$

$+ \cdots\cdots + \text{ن}\,\text{ی}^{(\text{ن}-1)}\,\text{وَ} + \text{ی}^{(\text{ن})}\,\text{و}$

اس کو مکرر تفرق کرنے سے

$$\text{ا}^{(\text{ن}+1)} = \text{ی}\,\text{و}^{(\text{ن}+1)} + \text{یَ}\,\text{و}^{(\text{ن})} + \text{ن}\left\{\text{یَ}\,\text{و}^{(\text{ن})} + \text{یً}\,\text{و}^{(\text{ن}-1)}\right\} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{1\times 2}\left\{\text{یً}\,\text{و}^{(\text{ن}-1)} + \text{یٌ}\,\text{و}^{(\text{ن}-2)}\right\}$$

$$+ \cdots\cdots + \text{ی}^{(\text{ن}+1)}\,\text{و}$$

$$= \text{ی}\,\text{و}^{(\text{ن}+1)} + (\text{ن}+1)\,\text{یَ}\,\text{و}^{(\text{ن})} + \frac{(\text{ن}+1)\text{ن}}{1\times 2}\,\text{یً}\,\text{و}^{(\text{ن}-1)} + \cdots\cdots + \text{ی}^{(\text{ن}+1)}\,\text{و}$$

غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ اس جملہ میں رقموں کے سر مسئلۂ ثنائی کے کلّیہ کے تابع ہیں۔
پس واضح ہے کہ اگر تفرق کا یہ کلیہ ن کی کسی ایک صحیح قیمت کے لیے صادق آتا ہے تو اس سے ایک عدد زائد کی صحیح قیمت کے لیے بھی صادق ثابت ہوتا ہے چونکہ ہم نے اس کو بطور امر واقعی ن = ۳ کے لیے ثابت کرکے بتایا اس لیے وہ ن = ۴ اور اس سے بالاتر صحیح قیمتوں کے لیے بھی ثابت ہو سکتا ہے۔ پس یہ کلیہ ن کی تمام مثبت صحیح قیمتوں کے لیے صادق آتا ہے۔

۱۰ لائبنٹس کے کلیے کے ذریعے ثابت کرو کہ اگر ن ایک صحیح مثبت عدد ہو اور ی تفاعل لا ہو تو

$$\left(\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)^{\text{ن}}\left(\text{ہ}^{\text{لا}}\,\text{ی}\right) = \text{ہ}^{\text{لا}}\left(1 + \frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)^{\text{ن}}\text{ی}$$

فرض کرو $\text{و} = \text{ہ}^{\text{لا}}$ - تب چونکہ

$$\frac{\text{فرو}}{\text{فرلا}} = 1\,\text{ہ}^{\text{لا}}،\ \frac{\text{فر}^2\text{و}}{\text{فرلا}^2} = 1^2\,\text{ہ}^{\text{لا}}،\ \cdots\cdots \text{ اور } \frac{\text{فر}^{\text{ن}}\text{و}}{\text{فرلا}^{\text{ن}}} = 1^{\text{ن}}\,\text{ہ}^{\text{لا}}$$

اس لیے

$$\left(\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)^{\text{ن}}\left(\text{و}^{\text{لا}}\text{د}\right) = \text{و}^{\text{لا}}\left\{\text{ا}^{\text{ن}}\text{د} + \text{ن}\,\text{ا}^{\text{ن}-1}\frac{\text{فر د}}{\text{فرلا}} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{1\times 2}\text{ا}^{\text{ن}-2}\frac{\text{فر}^{2}\text{د}}{\text{فرلا}^{2}} + \ldots\ldots + \frac{\text{فر}^{\text{ن}}\text{د}}{\text{فرلا}^{\text{ن}}}\right\}$$

جو بشکلِ ذیل لکھا جا سکتا ہے :

$$\left(\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)^{\text{ن}}\left(\text{و}^{\text{لا}}\text{د}\right) = \text{و}^{\text{لا}}\left\{\text{ا}^{\text{ن}} + \text{ن}\,\text{ا}^{\text{ن}-1}\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}} + \frac{\text{ن}(\text{ن}-1)}{1\times 2}\text{ا}^{\text{ن}-2}\left(\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)^{2} + \ldots\ldots + \left(\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)^{\text{ن}}\right\}\text{د}$$

$$\text{یا}\quad \left(\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)^{\text{ن}}\left(\text{و}^{\text{لا}}\text{د}\right) = \text{و}^{\text{لا}}\left(\text{ا} + \frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)^{\text{ن}}\text{د}$$

جس میں فرض کیا جاتا ہے کہ علامتی جملہ $\left(\text{ا} + \frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)^{\text{ن}}$ مسئلۂ ثنائی کے ذریعے پھیلایا جا سکتا ہے اور حاصل شدہ پھیلاؤ میں

$\left(\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)\text{د}$ ، $\left(\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)^{2}\text{د}$ ...... $\left(\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)^{\text{ر}}\text{د}$ کے عوض علی الترتیب

$\frac{\text{فر د}}{\text{فرلا}}$ ، $\frac{\text{فر}^{2}\text{د}}{\text{فرلا}^{2}}$ ...... $\frac{\text{فر}^{\text{ر}}\text{د}}{\text{فرلا}^{\text{ر}}}$ لکھے جاتے ہیں۔

۱۱ عام طور پر اگر فہ (لا) کسی بھی جملہ کو تعبیر کرتا ہے جس میں لا کی صرف مثبت صحیح قوتیں شامل ہیں تو

$$\text{فہ}\left(\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)\text{و}^{\text{لا}}\text{د} = \text{و}^{\text{لا}}\,\text{فہ}\left(\text{ا} + \frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)\text{د}$$

اس لیے کہ فرض کرو فہ $\left(\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)$ کو پھیلانے سے اس کی شکل

$$\text{ا}_{.}\left(\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)^{\text{ن}} + \text{ا}_{1}\left(\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)^{\text{ن}-1} + \ldots\ldots + \text{ا}_{\text{ن}}$$ ہوتی ہے۔

تب مسئلہ کا ضابطہ مندرجۂ بالا جملہ کی ہر ایک رقم پر حاوی ہوتا ہے اور اس لیے ان تمام رقموں کے مجموعہ پر بھی ۔ پس

$$\text{فہ}\left(\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)\text{و}^{\text{الا}}\,\text{ی} = \text{و}^{\text{الا}}\,\text{فہ}\left(\text{ا} + \frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)\text{ی}$$

اس نتیجہ کو مندرجۂ ذیل شکل میں بھی لکھ سکتے ہیں جو مستقل سروں والی تفرقی مساواتوں کے حل کرنے میں بہت اہمیت رکھتی ہے۔

$$\text{فہ}\left(\text{ا} + \frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)\text{ی} = \text{و}^{-\text{الا}}\,\text{فہ}\left(\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)\text{و}^{\text{الا}}\,\text{ی}$$

۱۲ ــ اگر ما = جب$^{-۱}$ تو ثابت کرو کہ

$$(\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}})\frac{\text{فر}^{\text{ن}+\text{۲}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}+\text{۲}}} - (\text{۲ن} + \text{۱})\,\text{لا}\frac{\text{فر}^{\text{ن}+\text{۱}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}+\text{۱}}} - \text{ن}^{\text{۲}}\frac{\text{فر}^{\text{ن}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}}} = \text{۰}$$

یہاں $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}}}}$ یعنی $(\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}})^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{۱}$

پس عمل تفرق سے $(\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}})^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}}\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{۲}}} - \frac{\text{۱}}{(\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}})^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}}}\,\text{لا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$

$$\therefore\ (\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}})\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{۲}}} - \text{لا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{۰}$$

لائبنٹس کے مسئلے سے

$$\left(\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)^{\text{ن}}\left\{(\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}})\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{۲}}}\right\} = (\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}})\frac{\text{فر}^{\text{ن}+\text{۲}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}+\text{۲}}} - \text{۲ن}\,\text{لا}\frac{\text{فر}^{\text{ن}+\text{۱}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}+\text{۱}}} - \text{ن}(\text{ن} - \text{۱})\frac{\text{فر}^{\text{ن}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}}}$$

(اس لیے کہ $(\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}})$ کے تیسرے اور اس کے بعد کو آنے والے تفرقی سر صفر ہیں)۔

معہذا $\left(\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)^{\text{ن}}\left(\text{لا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right) = \text{لا}\frac{\text{فر}^{\text{ن}+\text{۱}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}+\text{۱}}} + \text{ن}\frac{\text{فر}^{\text{ن}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}}}$

اس آخری جملہ کو اس سے پہلے کے جملہ میں سے وضع کرنے سے مساوات کے سیدھے جانب کی مقدار صفر ہوتی ہے اس لیے $(\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}})\frac{\text{فر}^{\text{۲}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{۲}}} - \text{لا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{۰}$ پس

$$(\text{۱} - \text{لا}^{\text{۲}})\frac{\text{فر}^{\text{ن}+\text{۲}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}+\text{۲}}} - (\text{۲ن} + \text{۱})\,\text{لا}\frac{\text{فر}^{\text{ن}+\text{۱}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}+\text{۱}}} - \text{ن}^{\text{۲}}\frac{\text{فر}^{\text{ن}}\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}}} = \text{۰}$$

اور یہی ثابت کرنا مقصود تھا۔

اگر مندرجۂ بالا مساوات میں لا کو صفر لکھیں تو

$$\left(\frac{\text{فر}^{\text{ن}+۲}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}+۲}}\right)_{۰} = \text{ن}^{۲}\left(\frac{\text{فر}^{\text{ن}}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}}}\right)_{۰}$$

جس میں $\left(\frac{\text{فر}^{\text{ن}}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}}}\right)_{۰}$ سے مُراد $\frac{\text{فر}^{\text{ن}}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}}}$ کی قیمت ہے جبکہ لا صفر ہو جاتا ہے۔

چونکہ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = (۱-\text{لا}^{۲})^{-\frac{۱}{۲}}$ اور $\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} = -\frac{۱}{۲}(۱-\text{لا}^{۲})^{-\frac{۳}{۲}}(-۲\,\text{لا})$

$$\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)_{۰} = ۱ \quad \text{اور} \quad \left(\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}}\right)_{۰} = ۰$$

جو رابطہ ثابت کیا گیا ہے اِس میں باری باری سے ن = ۱، ۲، ۳ .... وغیرہ لکھنے سے

$$\left(\frac{\text{فر}^{۳}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{۳}}\right)_{۰} = ۱^{۲}\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)_{۰} = ۱^{۲}$$

$$\left(\frac{\text{فر}^{۴}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{۴}}\right)_{۰} = ۰،\quad \left(\frac{\text{فر}^{۵}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{۵}}\right)_{۰} = ۳^{۲}\left(\frac{\text{فر}^{۳}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{۳}}\right)_{۰} = ۳^{۲}\times۱^{۲}،\quad \left(\frac{\text{فر}^{۶}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{۶}}\right)_{۰} = ۰ \quad \text{وغیرہ}$$

یعنی ن جب طاق صحیح عدد ہوتا ہے تو

$$\left(\frac{\text{فر}^{\text{ن}+۲}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}+۲}}\right)_{۰} = ۱^{۲}\times۳^{۲}\times۵^{۲}\times\ldots\ldots\times\text{ن}^{۲}$$

اور ن جب جفت صحیح عدد ہوتا ہے تو $\left(\frac{\text{فر}^{\text{ن}}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{\text{ن}}}\right)_{۰} = ۰$

مثالیں

(۱) اگر ما = لا جب لا تو $\frac{\text{فر}^{۵}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{۵}}$ کی قیمت دریافت کرو اور بتاؤ کہ

$$\frac{\text{فر}^{۵}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{۵}} - \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۴\,\frac{\text{ما}}{\text{لا}}$$

(۲) $\text{ما} = \text{لا لوک لا}$ ثابت کرو کہ $\frac{\text{فرن ما}}{\text{فرلان}} = (-۱)^{\text{ن}} \frac{۱ \times ۲ \times \cdots \times (\text{ن}-۲)}{\text{لا}^{\text{ن}-۱}}$

(۳) $\text{ما} = \text{لوک} \sqrt{\frac{۱+\text{لا}\sqrt{۲}+\text{لا}^۲}{۱-\text{لا}\sqrt{۲}+\text{لا}^۲}} + \text{مس}^{-۱}\frac{\text{لا}\sqrt{۲}}{۱-\text{لا}^۲}$

بتاؤ کہ $\frac{\text{فر}^۲\,\text{ما}}{\text{فر لا}^۲} = -\frac{۸\sqrt{۲}\,\text{لا}^۳}{(۱+\text{لا}^۴)^۲}$

(۴) $\text{ما} = \text{و}^{\text{رلا}}\,\text{جب لا}$ ثابت کرو کہ $\frac{\text{فرن ما}}{\text{فرلان}} = \frac{\text{و}^{\text{رلا}}\,\text{جب}(\text{لا}+\text{ن فہ})}{\text{جب}^{\text{ن}}\,\text{فہ}}$

جس میں $\text{فہ} = \text{مس}^{-۱}\frac{۱}{\text{ر}}$

(۵) $\text{ما} = \text{و}^{\text{ا جب}^{-۱}\text{لا}}$ تو $(۱-\text{لا}^۲)\frac{\text{فر}^۲\,\text{ما}}{\text{فرلا}^۲} - \text{لا}\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{ا}^۲\,\text{ما}$

(۶) $\text{ما} = \text{جب}(\text{جب لا})$ تو $\frac{\text{فر}^۲\,\text{ما}}{\text{فرلا}^۲} + \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\,\text{مس لا} + \text{ما جم}^۲\,\text{لا} = ۰$

(۷) اگر $\text{ما} = \frac{۱}{\text{ا}^۲+\text{لا}^۲}$ تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{فرن ما}}{\text{فرلان}}$

$= (-۱)^{\text{ن}} \frac{\underline{\text{لن}}\ \text{جب}^{\text{ن}+۱}\text{فہ جب}(\text{ن}+۱)\,\text{فہ}}{\text{ا}^{\text{ن}+۲}}$

جس میں $\text{مس فہ} = \frac{\text{ا}}{\text{لا}}$

[اشارہ - یہ نتیجہ عـ کی مدد سے فوراً مستنبط ہوتا ہے اس لیے کہ

$\left(\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\right)\left(\text{مس}^{-۱}\frac{\text{ا}}{\text{لا}}\right) = \frac{-\text{ا}}{\text{ا}^۲+\text{لا}^۲}$]

(۸) اس طرح ثابت کرو کہ

اگر $\text{ما} = \frac{\text{لا}}{\text{ا}^۲+\text{لا}^۲}$ تو $\frac{\text{فرن ما}}{\text{فرلان}} = (-۱)^{\text{ن}} \frac{\underline{\text{لن}}\ \text{جب}^{\text{ن}+۱}\text{فہ جم}(\text{ن}+۱)\,\text{فہ}}{\text{ا}^{\text{ن}+۱}}$

(۹) اگر ی = لا ما تو بتاؤ کہ $\frac{\text{فن ی}}{\text{ف لان}} = \text{لا}\,\frac{\text{فن ما}}{\text{ف لان}} + \text{ن}\,\frac{\text{فن-۱ ما}}{\text{ف لان-۱}}$

(۱۰) اگر ی = $(\text{جب}^{-1}\ \text{لا})^{2}$ تو $(\text{۱} - \text{لا}^{2})\,\frac{\text{ف}^{2}\,\text{ی}}{\text{ف لا}^{2}} - \text{لا}\,\frac{\text{ف ی}}{\text{ف لا}} = \text{۲}$

اور اس کی مدد سے ثابت کرو کہ

$(\text{۱} - \text{لا}^{2})\,\frac{\text{فن+۲ ی}}{\text{ف لان+۲}} - (\text{۲ن} + \text{۱})\,\frac{\text{فن+۱ ی}}{\text{ف لان+۱}} - \text{ن}^{2}\,\frac{\text{فن ی}}{\text{ف لان}} = \text{۰}$

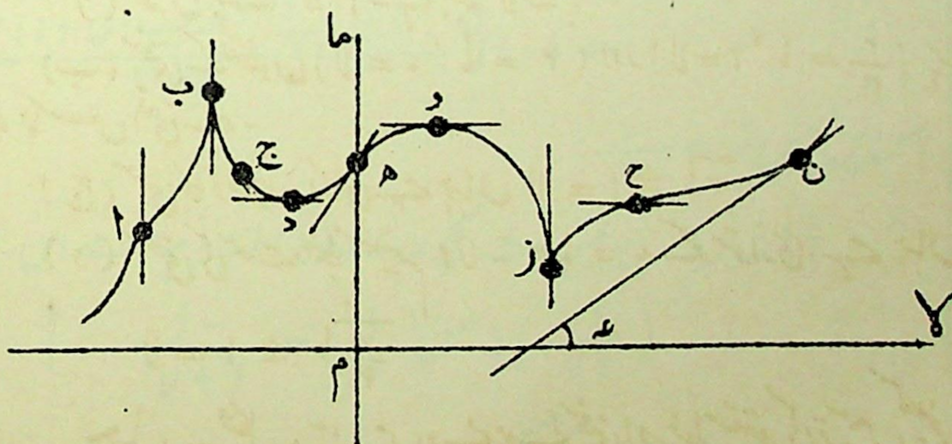
اور $\left(\frac{\text{فن+۲ ی}}{\text{ف لان+۲}}\right) = \text{ن}^{2}\left(\frac{\text{فن ی}}{\text{ف لان}}\right)$

[اشارہ - دیکھو ۱۲]

چھٹا باب

تفرقی سر (یا مشتق) کے استعمال سے متعلق چند ہندسی و دیگر مثالیں

ع۱ منحنی کی سمت — اگر کسی منحنی کی مساوات ما = ف (لا) ہے تو قبل ازیں بتایا گیا ہے کہ $\frac{\text{قرما}}{\text{قرلا}}$ = فَ (لا) = منحنی کے نقطہ (لا، ما) پر کے خطِ مماس کا ڈھلان ہے۔ دیکھو شکل ع۱۲



شکل ع۱۲

اگر یہ خطِ مماس محور لا کے ساتھ زاویہ عہ بناتا ہے تو $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ = مس عہ

اور منحنی کے کسی نقطہ پر اس کی سمت سے مُراد منحنی کے اس نقطہ پر کے خطِ مماس کی سمت ہے

یعنے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ = مس عہ = منحنی کے کسی نقطہ (لا، ما) پر اس منحنی کا ڈھلان

د، و، ح جیسے نقطوں پر جہاں منحنی کی سمت محور لا کے متوازی ہے اور خطِ مماس اُفقی،

زاویہ عہ = ۰ پس $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ = ۰

ا، ب، ز جیسے نقطوں پر جہاں منحنی کی سمت محور لا کے علی القوائم ہے اور خطِ مماس انتصابی،

زاویہ عہ = ۹۰° پس $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی قیمت نامتناہی ہوجاتی ہے۔

توضیحی مثالیں (۱) منحنی ما = $\frac{\text{لا}^3}{3}$ - لا^2 + ۲ کو مرتسم کرو اور بتاؤ کہ

(ا) عہ کی قیمت ۱۳۵° ہے جبکہ لا = ۱

(ب) منحنی کے نقطوں (لا = ۰، ما = ۲) اور (لا = ۲، ما = $\frac{2}{3}$) پر خطِ مماس اُفقی ہے۔

(ج) منحنی کا ڈھلان اکائی ہے جہاں لا = ۱ ± $\sqrt{2}$

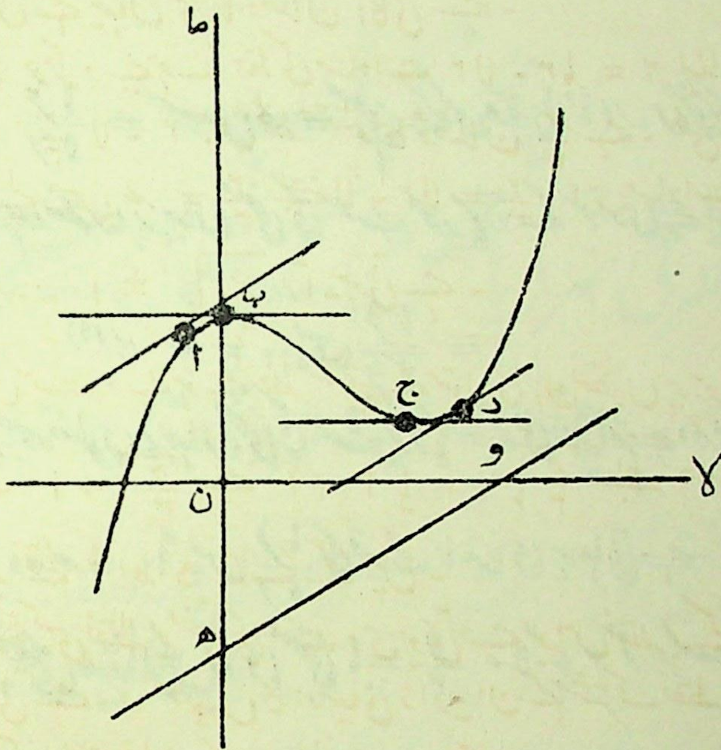
(د) منحنی کی سمت خطِ مستقیم ۲لا - ۳ما = ۸ کے متوازی ہے جہاں

لا = ۱ ± $\sqrt{\frac{5}{3}}$

حل - شکل ۱۳ میں دیے ہوئے منحنی اور خطِ مستقیم کی ترسیمیں کھینچی گئی ہیں۔

ما = $\frac{\text{لا}^3}{3}$ - لا^2 + ۲ کو تفرق کرنے سے

فرما / فرلا = لا^۲ ۔ ۲ لا = مس عہ



شکل ۱۳

(ا) جہاں لا = ۱ وہاں مس عہ = ۱ ۔ ۲ = ۔ ۱

لہٰذا عہ = ۱۳۵°

(ب) فرما / فرلا = مس عہ = ۰ جبکہ عہ = ۰

پس لا^۲ ۔ ۲ لا = ۰ یعنے لا (لا ۔ ۲) = ۰

پس لا = ۰ یا لا ۔ ۲ = ۰ یعنے لا = ۲

لا کی جب یہ قیمتیں منحنی کی مساوات (ما = لا^۳/۳ ۔ لا^۲ + ۲) میں تعویض کی جاتی ہیں تو ما کی قیمت = ۲ حاصل ہوتی ہے جبکہ لا = ۰ اور ما = ۲/۳ جبکہ لا = ۲ لہٰذا خطِ مماس منحنی کے نقطوں ب (یعنے ۰، ۲) اور ج (یعنے ۲، ۲/۳) پر اُفقی ہوتا ہے۔

(ج) جبکہ ھ = ۴۵° مس ھ = ۱ ∴ لا² - ۲ لا = ۱ اس مساوات کو حل کرنے سے لا کی قیمت ۱ ± √۲ حاصل ہوتی ہے۔ پس اس طرح ان نقطوں کی تعیین ہو جاتی ہے جہاں منحنی کا ڈھلان اکائی ہے۔

(د) چونکہ دیے ہوئے خط کی مساوات ۲ لا - ۳ ما = ۶ لہذا ۳ ما = ۲ لا - ۸ یعنے ما = ۲/۳ لا - ۲ پس خطِ مستقیم کا ڈھلان ۲/۳ ہے۔ منحنی کا یہ ڈھلان ہونے کے لیے مس ھ = ۲/۳ یعنے لا² - ۲ لا = ۲/۳ اس مساوات کو حل کرنے

سے لا کی قیمت ۱ ± √(۵/۳) برآمد ہوتی ہے۔

پس منحنی کی سمت دیے ہوئے خطِ مستقیم کے متوازی ان نقطوں پر ہوتی ہے جہاں

لا کی قیمت ۱ + √(۵/۳) یعنے ۲٫۲۹ یا ۱ - √(۵/۳) یعنے ۰٫۲۹ ہوتی ہے۔

شکل میں یہ نقطے ا اور د بتائے گئے ہیں۔

چونکہ کسی نقطہ پر منحنی کی سمت وہی ہوتی ہے جو اس نقطہ پر کے خطِ مماس کی سمت ہوتی ہے۔ دو منحنیوں کا درمیانی زاویہ ان کے مشترک نقطہ پر ان کے اس نقطہ پر کے مماسی خطوں کا درمیانی زاویہ ہے۔

توضیحی مثال (۲)۔ مندرجۂ ذیل دائروں کی ترسیمیں کھینچو اور اُن کا زاویۂ تقاطع دریافت کرو:۔

(ا) لا² + ما² - ۴ ما = ۱

(ب) لا² + ما² - ۲ لا = ۹

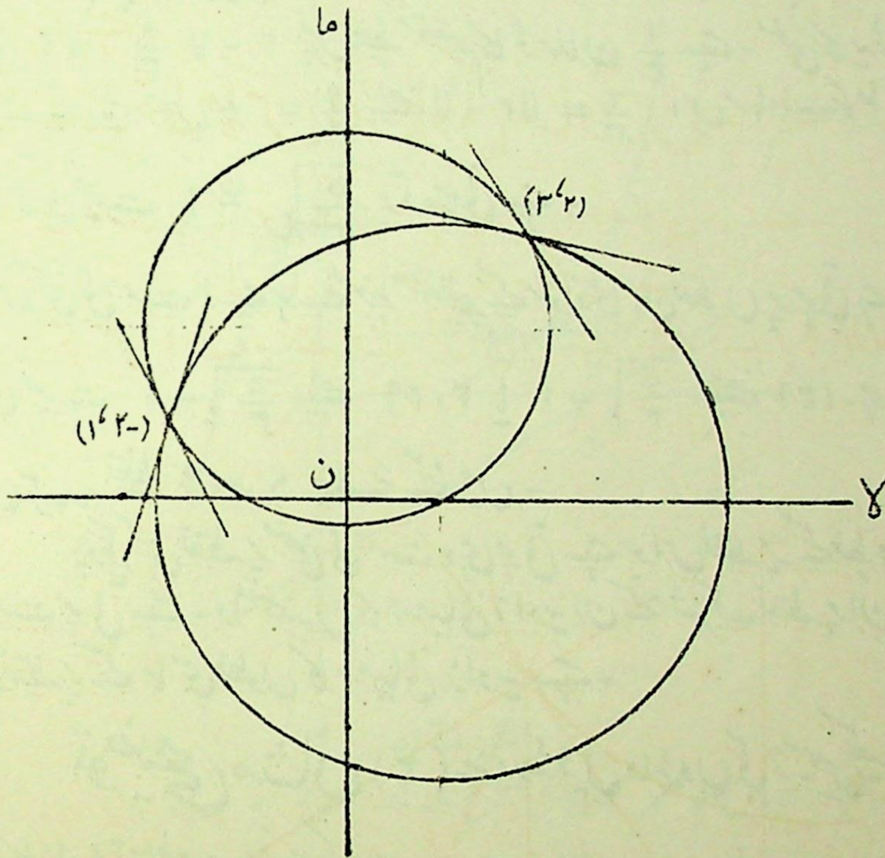
حل۔ لا، ما کی ان دو ہمزاد مساواتوں کو حل کرنے سے نقاطِ تقاطع کے محدد (لا = ۲، ما = ۳) اور (لا = -۲، ما = ۱) برآمد ہوتے ہیں دیکھو شکل ۱۲۔

فرض کرو کہ م₁ دائرہ (ا) کے نقطہ (لا، ما) پر کے خطِ مماس کا ڈھلان ہے۔

اور م₂ " (ب) . . . .

تب (ا) کے لیے $م_1 = \frac{فر\,ما}{فر\,لا} = \frac{لا}{۲ - ما}$

اور (ب) ..... $م_۲ = \frac{فر\,ما}{فر\,لا} = \frac{۱ - لا}{ما}$



شکل ۱۴

نقطۂ تقاطع (۲، ۳) پر کے خطِ مماس کے لیے

$$م_1 = \frac{۲}{۳ - ۲} = -۲$$

اور $م_۲ = \frac{۲ - ۱}{۳} = -\frac{۱}{۳}$

پس اِن مماسی خطوں کے درمیانی زاویہ طہ کے لیے

$$\text{مس ط} = \frac{م_۱ - م_۲}{۱ + م_۱ م_۲} = \frac{-۲ + \frac{۱}{۳}}{۱ + \frac{۲}{۳}}$$

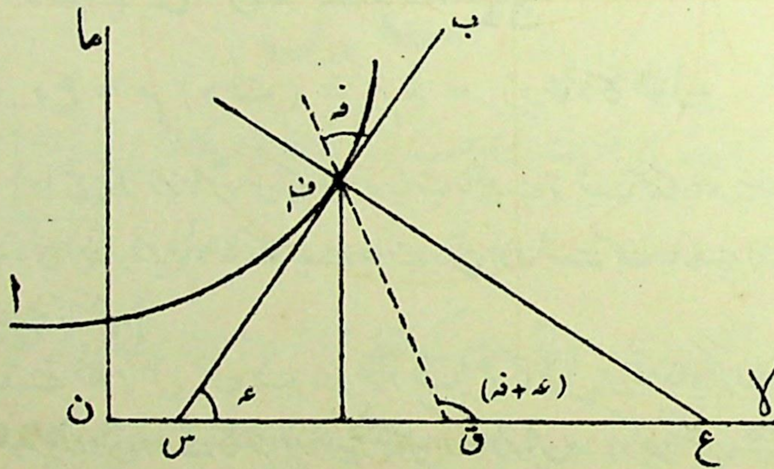
$$= -۱ \text{ پس } ط = ۱۳۵^\circ$$

اسی طرح نقطۂ تقاطع (-۲، ۱) پر کے خطوطِ مماس کا درمیانی زاویہ ۴۵° یا ۱۳۵° برآمد ہوتا ہے۔

۲۷۔ خطِ مماس اور عماد کی مساواتیں ۔ ایسے خطِ مستقیم کی مساوات جو نقطہ لا۱، ما۱ میں سے گزرتا ہے اور جس کا ڈھلان م ہے۔

$$(ما - ما_۱) = م (لا - لا_۱) \text{ ہے}$$

اگر یہ خطِ منحنی اب کو نقطہ ف۱ پر مس کرتا ہے (یعنے ف۱ پر کا خط مماس ہے)



شکل ۱۵

اور ف۱ کے محدد لا۱، ما۱ ہیں تو م اس نقطہ پر منحنی کا ڈھلان ہے۔ م کی اس خاص قیمت کو م۱ سے تعبیر کرو۔ پس نقطۂ تماس ف۱ (لا۱، ما۱) پر منحنی کے خطِ مماس س ف۱ کی مساوات

ما - ما، = م (لا - لا،) ہے .... (۱)

چونکہ عماد خطِ مماس کے عملی القوائم ہوتا ہے اس کا ڈھلان م کا منفی متکافی ہے - اور چونکہ وہ نقطہ تماس ف، (لا، ما،) میں سے گزرتا ہے اس لیے عماد ف ع کی مساوات

ما - ما، = - ۱/م، (لا - لا،) ہے .... (۲)

خطِ مماس کا وہ حصّہ جو نقطۂ مماس اور محور لا کے مابین منقطوعہ ہے - (یعنی س ف،) خطِ مماس کا طول کہلاتا ہے - اور اس کا ظل محور لا پر (یعنی س د) زیر مماس کا طول کہلاتا ہے - اسی طرح ف، ع عماد کا طول ہے - اور د ع زیر عماد کا طول ہے -

مثلث س ف، د میں مس ھ = م، = د ف، / س د

∴ س د = د ف، / م، = زیر مماس کا طول .... (۳)

مثلث د ف، ع میں مس ھ = م، = د ع / د ف،

∴ د ع = م، (د ف،) = م، ما، = زیر عماد کا طول ..... (۴)

[واضح ہو کہ زیر مماس س کے سیدھے جانب واقع ہے تو مثبت سمجھا جاتا ہے اور اگر بائیں جانب ہو تو منفی - اسی طرح اگر زیر عماد د کے سیدھے جانب واقع ہو تو مثبت سمجھا جاتا ہے اور اگر عماد کے بائیں جانب ہو تو منفی -]

ان کی مدد سے خطِ مماس س ف، اور عماد ف، ع کا طول فوراً معلوم کر لیا جا سکتا ہے - کیونکہ یہ معلوم بازوؤں والے قائم الزاویہ مثلثوں کے وتر ہیں - (دیکھو شکل ۱۵) -

جب کسی منحنی پر کے نقطہ کے زیر مماس و زیر عماد کا طول معلوم ہو جاتا ہے تو اس کا خطِ مماس اور عماد بآسانی تیار کر لیا جا سکتا ہے -

۳ - ایسے خط کی مساوات جو کسی منحنی کو دیے ہوئے زاویہ پر قطع کرے -

خط ف، ق کی مساوات مطلوب ہے جو منحنی کو نقطہ لا، ما، پر منقطع کرے اور اس کے ساتھ زاویہ ھ بنائے - دیکھو شکل ۱۵ -

منحنی کی مساوات ما = ف (لا) فرض کرو ۔ فَ (لا) یعنے $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = م۱

چونکہ خطِ مماس کا ڈھلان عہ ہے اس لیے خط زیرِ بحث کا ڈھلان (عہ + فہ) ہے

پس م = مس (عہ + فہ) = $\frac{\text{مس عہ + مس فہ}}{\text{۱ - مس عہ مس فہ}}$

= $\frac{\text{م۱ + مس فہ}}{\text{۱ - م۱ مس فہ}}$

لہٰذا خط مذکور کی مساوات

ما - ما۱ = $\frac{\text{م۱ + مس فہ}}{\text{۱ - م۱ مس فہ}}$ (لا - لا۱)

مثالیں

(۱) مصرحۂ بالا تعریف کے بموجب بتاؤ کہ خطِ مماس کا طول $\frac{\text{ما۱}}{\text{م۱}}$ $\sqrt{\text{۱ + (م۱)}^2}$ ہے ۔

(۲) .... عماد کا طول ما۱ $\sqrt{\text{۱ + (م۱)}^2}$ ہے ۔

(۳) منحنی ما = ۳ لا^2 + ۴ کے نقطہ (۱، ۷) پر ثابت کرو کہ خطِ مماس کی

مساوات ما - ۶ لا - ۱ = ۰ ہے اور عماد کی مساوات لا + ۶ لا - ۴۳ = ۰ ہے

(۴) بتاؤ کہ منحنی ما^2 - ۴ لا = ۰ کو نقطہ ۹، ۶ پر ۴۵° زاویہ پر قطع کرنے والے

خطِ مستقیم کی مساوات ۲لا - ما - ۱۲ = ۰ ہے ۔

(۵) خط ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{۹}}$ + $\frac{\text{ما}^2}{\text{۴}}$ = ۱ کے پہلے ربعی حصہ میں نقطہ لا = ۱

پر زیرِ مماس کا طول ۳ اور زیرِ عماد کا طول $\frac{\text{۹}}{\text{۴}}$ ہے ۔

(۶) ثابت کرو کہ دائرہ لا^2 + ما^2 = ص^2 کے نقطہ لا۱، ما۱ پر خطِ مماس کی

مساوات $لا\,لا_1 + ما\,ما_1 = ص^2$ ہے اور عماد کی مساوات $لا_1\,ما - ما_1\,لا = ۰$ ۔

(۷) خطِ زائد $\frac{لا^2}{ا^2} - \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کے نقطہ لاَ ، ماَ پر خطِ مماس کی مساوات $\frac{لا\,لاَ}{ا^2} - \frac{ما\,ماَ}{ب^2} = ۱$ ہے اور عماد کی مساوات

$$\frac{لا_1\,ما}{ا^2} + \frac{ما_1\,لا}{ب^2} = لا_1\,ما_1\left(\frac{1}{ا^2} + \frac{1}{ب^2}\right)$$ ہے۔

(۸) بتاؤ کہ خطِ مکافی کا $ما^2 = ۲\,ا\,لا$ کے زیرِ عماد کا طول ا ہے اور اس لیے خطِ مذکور کے ہر نقطہ کے لیے مستقل ہے۔ نیز یہ بھی بتاؤ کہ اس کا زیرِ مماس راس پر اس کی تنصیف کرتا ہے۔

(۹) منحنی $لا\,ما = ا^2$ کے خطوطِ مماس اور محددوں کے محوروں کے مابین جو مثلث تیار ہوتا ہے اس کا رقبہ مستقل ہے اور $= ۲\,ا^2$

(۱۰) بتاؤ کہ $ما = و^{لا}$ کے زیرِ مماس کا طول = ۱

(۱۱) زنجیرہ $ما = \frac{ا}{۲}\left(و^{\frac{لا}{ا}} + و^{-\frac{لا}{ا}}\right)$ کے کسی بھی نقطہ پر کے عماد کا طول مستقل اور $= \frac{ما^2}{ا}$ ہے۔

(۱۲) ثابت کرو کہ (ا) درتدویر (hypocycloid) $\left\{\begin{array}{l} لا = ا\,جم^3\,طہ \\ ما = ا\,جب^3\,طہ \end{array}\right\}$ کے ایسے نقطہ پر جہاں طہ = طہ. خطِ مماس کی مساوات

$$ما - ا\,جب^3\,طہ. = -\,مس\,طہ.\,(لا - جم^3\,طہ.)$$ ہے

اور عماد کی مساوات $ما - ا\,جب^3\,طہ = مم\,طہ.\,(لا - جم^3\,طہ)$ ہے

اور (ب) اس خطِ مماس کے قطع کا جو لا و ما کے محوروں سے مقطوع ہے طول ا ہے۔

(۱۳) منحنی لوک $(لا^2 + ما^2) = ۲\,مس^{-1}\frac{ما}{لا}$ کے ساتھ خطِ مستقیم $ما = م\,لا$ جو زاویہ بناتا ہے مستقل اور $= \frac{\pi}{۴}$ ہے۔

(۱۴) لبلابی سسائیڈ (Cissoid)

$$م^{۲} = \frac{لا^{۳}}{۲ ا - لا}$$

کی ترسیم کھینچو - اور بتاؤ کہ (أ) اس کے نقطہ (ا، ا) پر کے خطِ مماس کی مساوات
م = ۲ لا - ا ہے اور عماد کی مساوات ۲ م + لا = ۳ ا ہے۔
اور (ب) اس کے زیر مماس کا طول $\frac{ا}{۲}$ اور زیر عماد کا طول ۲ ا ہے۔
نیز (ج) اس کے خطِ مماس کا طول $\frac{ا}{۲}\sqrt{۵}$ ہے اور عماد کا طول $ا\sqrt{۵}$ ہے۔

(۱۵) دائرہ $لا^{۲} + م^{۲} = ۸ ا لا$ اور لبلابی (Cissoid) $م^{۲} = \frac{لا^{۳}}{۲ ا - لا}$ -
(ا) مبدا پر باہم دیگر علی القوائم ہیں۔
(ب) دوسرے دو نقطوں پر ایک دوسرے کو ۴۵° زاویہ پر منقطع کرتے ہیں۔

۷- واحد متغیر کے تفاعلوں کی اعظم و اقل قیمتوں پر

تمہیدی بحث - خالص اور اطلاقی ریاضیات جن میں کے کثیر التعداد سوالوں میں ایسے تغیر پذیر مقادیر سے سابقہ پڑتا ہے جو ان سے عین پہلے اور عین بعد کو آنے والے مقادیر سے زائد (یا کمتر) قیمت کے ہوتے ہیں۔ یہاں ہم مسلسل تفاعلوں کی ان اعظم اور اقل قیمتوں کی تعیین کے مسائل پر بحث کرینگے۔

تعریفات - (۱) اگر ف (لا) کا بڑھنا ختم ہو جاتا ہے اور گھٹنا شروع ہوتا ہے جبکہ لا، لا۱ میں سے گزرتا ہے تو کہا جاتا ہے کہ لا = لا۱ پر ف (لا) کا ایک اعظم ہے۔ اور اس کی قیمت ف (لا۱) ہے۔

(۲) اگر ف (لا) کا گھٹنا ختم ہو جاتا ہے اور بڑھنا شروع ہوتا ہے جیسے کہ لا، لا۱ میں سے گزرتا ہے تو کہا جاتا ہے کہ لا = لا۱ پر ف (لا) کا ایک اقل ہے۔ اور اس کی قیمت ف (لا۱) ہے۔

[یہاں یہ یاد رکھنا چاہیے کہ کسی تفاعل کی ایک اعظم (یا ایک اقل) قیمت لازماً سب سے بڑی (یا سب سے چھوٹی) قیمت ہوتی ہے۔ وہ صرف ایک معینہ وقفہ کے اندر کی سب سے

بڑی (یا سب سے چھوٹی) قیمت ہے]۔

اعظم کے لیے شرائط - کسی تفاعل کا لا = لا پر بڑھنا ختم ہو جاتا ہے اور گھٹنا شروع ہوتا ہے (یا بالفاظ دیگر اس تفاعل کا لا = لا پر ایک اعظم ہوتا ہے) اگر مشتق فَ (لا) یعنے ف (لا) کا تفرقی سر' لا سے عین پہلے کی تمام قیمتوں کے لیے مثبت ہے۔ اور اس سے عین بعد کی تمام قیمتوں کے لیے منفی ہے۔

اقلّ کے لیے شرائط - کسی تفاعل کا لا = لا پر گھٹنا ختم ہو جاتا ہے اور بڑھنا شروع ہوتا ہے (یا بالفاظ دیگر اس تفاعل کا لا = لا پر ایک اقلّ ہوتا ہے) اگر مشتق فَ (لا) یعنے ف (لا) کا تفرقی سر' لا سے عین پہلے کی تمام قیمتوں کے لیے منفی ہے۔ اور اس سے عین بعد کی تمام قیمتوں کے لیے مثبت ہے۔

واضح ہو کہ مصرحۂ بالا شرائط واقعات ذیل کے نتائج ہیں جن کو ہم یہاں ثبوت کا محتاج نہیں سمجھتے:-

(۱) لا کے بڑھنے سے ف (لا) بڑھتا ہے اگر فَ (لا) مثبت ہے۔

(۲) لا کے بڑھنے سے ف (لا) گھٹتا ہے اگر فَ (لا) منفی ہے۔

تفاعل کی اعظم اور اقلّ قیمتوں کے پاس تفرقی سر یا مشتق کی کیفیت

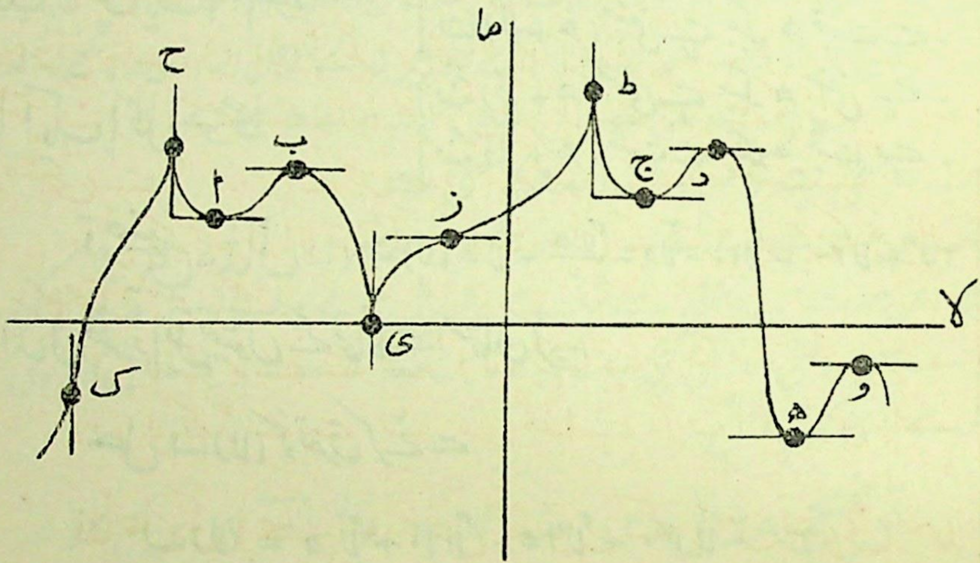
یا مشتق کی کیفیت - کسی تفاعل کے مشتق پر غور کر کے اس تفاعل کی اعظم و اقلّ قیمتوں کے مقام دریافت کیے جا سکتے ہیں۔ شکل ۱۶ کے ملاحظہ سے مندرجۂ ذیل امور کی تصدیق ہو سکتی ہے۔

(۱) مسلسل مشتق والے تفاعل کی اعظم و اقلّ قیمتیں صرف ایسے نقطوں پر پائی جاتی ہیں جہاں یہ مشتق (یعنے تفاعل کے منحنی کا ڈھلان) صفر ہوتا ہے۔ ملاحظہ ہو نقطے ا' ب' ج' د' ہ' و'۔

(۲) اعظم قیمتیں صرف اس صورت میں رونما ہوتی ہیں جبکہ لا کے بڑھنے سے تفاعل کے مشتق کی علامت بدلتی ہے اور وہ بالترتیب +' ۰' - ہوتا ہے - جیسے ب' د اور و پر۔

(۳) اقل قیمتیں صرف ایسے نقطوں یا موقعوں پر پائی جاتی ہیں جہاں لا کے بڑھنے سے مشتق کی علامت تبدیل ہوتی ہے اور وہ بالترتیب -، ۰، + ہوتا ہے۔ جیسے ا، ج، ہ پر۔

(۴) مشتق ایسے نقطوں پر بھی صفر ہوتا ہے جہاں نہ تو اعظم قیمتیں ہوتی ہیں اور نہ اقل قیمتیں۔ جیسے ز پر۔ ان نقطوں پر مشتق کی علامت نہیں بدلتی۔



شکل ۱۶

اطلاقی ریاضیات میں کسی تفاعل کے اعظم و اقل میں عموماً مشتق کی تبدیلیٔ علامت پر غور کیے بغیر امتیاز کیا جاسکتا ہے۔ سوال کی نوعیت ہی سے عام طور پر اس امر کا بآسانی تصفیہ ہو جاتا ہے۔

ف (لا) کے اعظم و اقل دریافت کرنے کا طریقۂ عمل۔

(۱) ف (لا) کو بلحاظ لا تفرق کر کے اس کا مشتق فَ (لا) معلوم کیا جائے۔

(۲) فَ (لا) کو صفر کے مساوی لکھ کر اس مساوات کو حل کرکے اس کی حقیقی اصلیں لا$_{۱}$، لا$_{۲}$، لا$_{۳}$ ...... دریافت کی جائیں۔

(۳) اگر ممکن ہو تو مطالعہ ہی سے معلوم کیا جائے آیا لا$_{۱}$، لا$_{۲}$، لا$_{۳}$ ..... سے اعظم یا اقل قیمتیں مل جاتی ہیں۔ ورنہ

(۱) فَ (لا) میں لا کی بجائے (لا$_{۱}$ + ھ) لکھا جائے جس میں ھ کافی چھوٹی مقدار ہے۔

تب لا$_{۱}$ پر ایک اعظم ہوگا اگر
فَ (لا$_{۱}$ + ھ) مثبت ہے جبکہ ھ منفی ہے۔
فَ (لا$_{۱}$ + ھ) منفی ہے جبکہ ھ مثبت ہے۔

یا ایک اقل ہوگا
فَ (لا$_{۱}$ + ھ) منفی ہے جبکہ ھ منفی ہے۔
فَ (لا$_{۱}$ + ھ) مثبت ہے جبکہ ھ مثبت ہے۔

توضیحی مثال

(۱) ف(لا) = لا^{۵} + $\frac{۵لا^{۴}}{۲}$ - ۵لا^{۳} - ۲۰لا^{۲} - ۲۰لا + ۱۵

کا اس کی اعظم و اقل قیمتوں کے لحاظ سے امتحان کرو۔

حل ف (لا) کو تفرق کرنے سے

فَ (لا) = ۵لا^{۴} + ۱۰لا^{۳} - ۱۵لا^{۲} - ۴۰لا - ۲۰

= ۵ (لا^{۴} + ۲لا^{۳} - ۳لا^{۲} - ۸لا - ۴)

= ۵ {(لا^{۴} + ۲لا^{۳} + لا^{۲}) - (۴لا^{۲} + ۸لا + ۴)}

= ۵ {لا^{۲} (لا^{۲} + ۲لا + ۱) - ۴ (لا^{۲} + ۲لا + ۱)}

= ۵ (لا^{۲} - ۴) (لا + ۱)^{۲} = ۵ (لا + ۲) (لا - ۲) (لا + ۱)^{۲}

اس مشتق کو صفر کے مساوی لکھ کر مساوات کو حل کرنے سے

لا = -۲، +۲، -۱، -۱ حاصل ہوتا ہے۔

(۱) لا$_{۱}$ = -۲ تو فَ (لا) کے جملہ میں لا کے عوض (-۲ + ھ) لکھنے سے، (جس میں ھ کافی چھوٹی مقدار ہے) فَ (-۲ + ھ) = ۵ ھ (-۴ + ھ) (-۱ + ھ)^{۲}

جب ھ منفی ہے تو فَ (-۲ + ھ) مثبت ہے۔

جب ھ مثبت ہے تو فَ (-۲ + ھ) منفی ہے۔

پس ف (لا) نقطہ لا = -۲ پر ایک اعظم قیمت رکھتا ہے اور وہ +۲۳ ہے۔

(ب) لا = +۲ تو فَ (لا) کے جملہ میں لا کے عوض (۲ + ھ) لکھنے سے

فَ(۲ + ھ) = ۵ (۴ + ھ) (ھ) (۳ + ھ)^۲

جب ھ منفی ہے تو فَ (۲ + ھ) منفی ہے۔

جب ھ مثبت ہے تو فَ (۲ + ھ) مثبت ہے۔

پس ف (لا) نقطہ لا = +۲ پر ایک اقل قیمت رکھتا ہے اور وہ -۳، ہے

(ج) لا = -۱ تو فَ (لا) کے جملہ میں لا کے عوض (-۱ + ھ) لکھنے سے

فَ (-۱ + ھ) = ۵ (۱ + ھ) (-۳ + ھ) ھ^۲

جب ھ منفی ہے تو فَ (-۱ + ھ) منفی ہے

جب ھ مثبت ہے تو فَ (-۱ + ھ) منفی ہے

یعنے اس صورت میں ھ منفی سے مثبت میں تبدیل ہونے پر فَ (-۱ + ھ) کی علامت نہیں بدلتی وہ منفی ہی رہتا ہے۔ پس نقطہ لا = -۱ پر تفاعل کا نہ کوئی اعظم ہے اور نہ کوئی اقل۔

توضیحی مثال (۲)

ف (لا) = قو^لا ^لا کا اس کی اعظم اور اقل قیمتوں کے لحاظ سے امتحان کرو۔

حل۔ ف (لا) کو تفرق کرنے سے فَ (لا) = قو^لا (۱ - ۲ لا) / ۲ لا^{۱/۲}

فَ (لا) کو صفر کے مساوی لکھنے سے لا = ۱/۲ حاصل ہوتا ہے۔

اب فَ (لا) کے جملہ میں بجائے لا کے ۱/۲ + ھ لکھنے سے (جس میں ھ کافی چھوٹی مقدار ہے)۔

فَ (۱/۲ + ھ) = قو^{(۱/۲ + ھ)} (-۲ھ) / ۲(۱/۲ + ھ)^{۱/۲}

غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ فَ (۱/۲ + ھ) مثبت سے منفی میں تبدیل ہوتا ہے

جبکہ ھ منفی سے مثبت میں تبدیل ہوتا ہے ۔ پس ف (لا) کی نقطہ لا = $\frac{1}{2}$ پر ایک اعظم قیمت ہے اور وہ = (۲ و)$^{-\frac{1}{2}}$ = $\frac{1}{\sqrt{2 و}}$ ہے ۔

ف (لا) کی اعظم و اقل قیمتیں جبکہ فَ (لا) لامتناہی ہوتا ہے اور ف (لا) مسلسل تفاعل ہے ۔

شکل $\frac{16}{ع}$ کے ملاحظہ سے معلوم ہوگا کہ ح یا ط پر ف (لا) مسلسل ہے اور ایک اعظم قیمت رکھتا ہے لیکن فَ (لا) لامتناہی ہو جاتا ہے اس لیے کہ خط مماس ان نقطوں پر محور ما کے متوازی ہے ۔ نقطہ ی پر ف (لا) مسلسل ہے اور ایک اقل قیمت رکھتا ہے لیکن یہاں بھی فَ (لا) لامتناہی ہو جاتا ہے ۔ ایسی صورتوں میں چونکہ فَ (لا) = ∞

$$\therefore \frac{1}{فَ (لا)} = 0$$

دیکھو کہ لا کی کس "فاصل" (critical) قیمت کے لیے $\frac{1}{فَ (لا)}$ = ۰ اگر یہ قیمت لا ہے تو دیکھو کہ لا کی لا سے خفیف سی چھوٹی قیمت کے لیے آیا فَ (لا) مثبت ہے اور لا سے خفیف سی بڑی قیمت کے لیے فَ (لا) منفی ہے ۔ اگر ایسا ہے تو ف (لا) نقطہ لا پر ایک اعظم قیمت رکھتا ہے ۔ لیکن اگر پہلی صورت میں یعنے لا کی لا سے خفیف سی چھوٹی قیمت کے لیے فَ (لا) منفی ہے اور دوسری صورت میں یعنے لا کی لا سے خفیف سی بڑی قیمت کے لیے فَ (لا) مثبت ہے تو نقطہ لا پر ف (لا) ایک اقل قیمت رکھتا ہے ۔

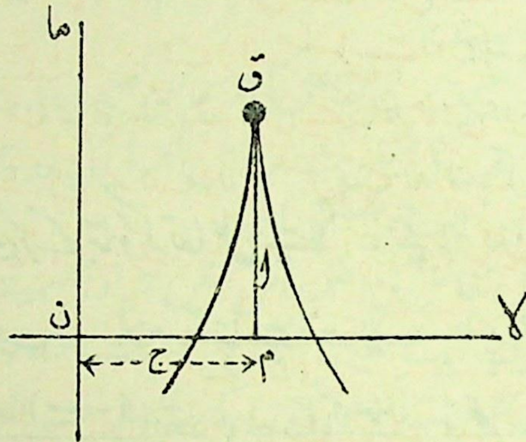
شکل $\frac{16}{ے}$ میں منحنی کے نقطہ ک پر بھی فَ (لا) لامتناہی ہو جاتا ہے لیکن یہاں تفاعل نہ تو ایک اعظم قیمت رکھتا ہے اور نہ ایک اقل قیمت ۔

توضیحی مثال ۔ تفاعل ا - ب (لا - ج)$^{\frac{2}{3}}$ کا اس کی اعظم و اقل قیمتوں کے لیے امتحان کرو ۔

حل ۔ تفرق کرنے سے

$$\text{ف}'(\text{لا}) = -\frac{2\,\text{ب}}{3\,(\text{لا}-\text{ج})^{\frac{1}{3}}}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\text{ف}'(\text{لا})} = -\frac{3\,(\text{لا}-\text{ج})^{\frac{1}{3}}}{2\,\text{ب}}$$



شکل ۱۷

چونکہ لا = ج ایک خاص قیمت ہے جس کے لیے $\frac{1}{\text{ف}'(\text{لا})} = 0$ (اور ف′(لا) = ∞) لیکن جس کے لیے ف (لا) لامتناہی نہیں ہے پس مصرحہ بالا قاعدہ کے لحاظ سے اس تفاعل کا لا = ج نقطہ پر اعظم و اقل قیمتوں کے لیے امتحان ہو سکتا ہے۔ چنانچہ

جب لا < ج، ف′(لا) = مثبت

جب لا > ج، ف′(لا) = منفی

پس جب لا = ج = ن م (دیکھو شکل ۱۷)، اس تفاعل کی ایک اعظم قیمت ف (ج) = ا = ق م ہے۔

مثالیں

(۱) ذیل کے تفاعل کا اعظم و اقل قیمت کے لیے امتحان کرو :

۳ لا۵ - ۵ لا۳ + ۱۵ جواب لا = - ۱ پر اعظم قیمت = ۱۷، لا = ۱ پر اقل قیمت = ۱۳، لا = ۰ پر نہ اعظم نہ اقل -

(۲) امتحان کر کے بتاؤ کہ تفاعل ۱/۳ لا۳ - ۱/۲ لا۲ - ۲ لا + ۲

لا = - ۱ پر اعظم قیمت = ۳ ۱/۶ رکھتا ہے اور لا = ۲ پر اقل قیمت = - ۱ ۱/۳

(۳) (لا - ا) (ب - لا) / لا۲ نقطہ لا = ۲ ا ب / (ا + ب) پر اعظم = (ب - ا)۲ / ۴ ا ب ہے

(۴) (۲ لا - ا)^۱/۳ (لا - ا)^۲/۳ نقطہ لا = ۲ ا / ۳ پر اعظم = ا / ۳ ہے،

لا = ا پر اقل = ۰ اور لا = ا / ۲ پر، نہ اعظم نہ اقل -

(۵) (ا - لا)۳ / (ا - ۲ لا) نقطہ لا = ا / ۴ پر اقل = ۲۷ / ۳۲ ا۲ ہے -

اعظم و اقل قیمتوں کے اطلاقی سوالات کے لیے عام ہدایات -

اکثر سوالات میں مقدمات کے شرائط کے بموجب پہلے خود اس تفاعل کو تیار کرنا ہوتا ہے جس کی اعظم و اقل قیمتیں مطلوب ہیں - بعض اوقات اس تیاری میں بڑی دقت پیش آتی ہے - اور کوئی ایسا قاعدہ جو تمام صورتوں پر حاوی ہو بتایا نہیں جا سکتا - البتہ ذیل کی ہدایات بہت سارے سوالات کے حل میں کار آمد ہو سکتی ہیں :-

عام ہدایات - (۱) پہلے وہ تفاعل تیار کر لیا جائے جس کا اعظم یا اقل حل طلب

سوال ہیں شامل ہے۔

(ب) اگر اس تفاعل کا جملہ ایک سے زائد متغیر پر مشتمل ہے تو سوال ہی کے شرائط سے ان متغیروں کے مابین کافی رابطے مہیا ہو سکینگے، جس کی وجہ سے تمام متغیر ایک واحد متغیر کی رقموں میں لکھے جا سکینگے۔

(ج) واحد متغیر کے ماحصل تفاعل پر اعظم و اقل قیمتوں کی تعیین کا قبل ازیں مصرحہ قاعدہ عائد کیا جائے۔

(د) عمل کی تنقیح کے لیے تفاعل کی ترسیم بھی کھینچ لی جائے۔

اعظم و اقل قیمتوں کی تعیین مندرجۂ ذیل اصول کی مدد سے (جو بدیہی تصور کیے جا سکتے ہیں) اکثر آسان ثابت ہو سکتی ہے۔

(ا) مسلسل تفاعل کی اعظم و اقل قیمتیں متبادلاً صورت پذیر ہونی چاہئیں۔

(ب) ک جب ایک مثبت مستقل ہوتا ہے ک ف (لا) ایک اعظم ہوتا ہے یا اقل لا کی ایسی اور صرف ایسی قیمتوں کے لیے جو ف (لا) کو اعظم یا اقل بناتی ہیں۔ [پس لا کی فاصل قیمتوں کی تعیین اور تفاعل کے اعظم و اقل کے امتحان میں مستقل جزو ضربی متروک کر دیا جا سکتا ہے]۔

اسی طرح اگر ک ایک منفی مستقل ہے تو ک ف (لا) اعظم ہے جبکہ ف (لا) اقل ہے اور ک ف (لا) اقل ہے جبکہ ف (لا) اعظم ہے۔

(ج) اگر ک ایک مستقل ہے تو لا کی جس قیمت پر ف (لا) کی قیمت اعظم یا اقل ہوتی ہے ک + ف (لا) کی قیمت بھی لا کی اسی قیمت پر اعظم یا اقل ہوتی ہے۔ [پس لا کی فاصل قیمتوں کی تعیین اور تفاعل کے امتحان میں مستقل رقم متروک کر دی جا سکتی ہے]

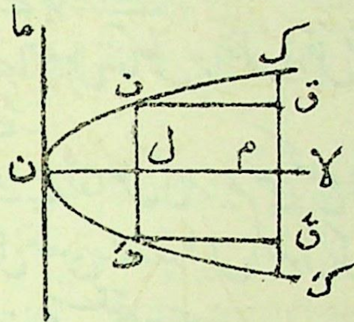
توضیحی مثالیں۔ (ا) خطِ مکافی کے دیے ہوئے قطع ن ک کَ میں جو مستطیل کھینچا جا سکتا ہے اس کا رقبہ اعظم ہوتا ہے جبکہ اس کی چوڑائی محوری طول ط کا $\frac{2}{3}$ حصہ ہوتی ہے۔

حل۔ ن م = ط، فرض کرو اور ن ل = لا

اور ل ف = ما

پس مستطیل کا رقبہ = ف فَ × ل م

= ۲ ما (ط - لا)



شکل ۱۸

چونکہ ف خطِ مکانی پر ہے اس لیے ما^۲ = ۲ ار لا پس ما = √(۲ ار لا)

اور رقبہ = ۲ (ط - لا) (۲ ار لا)^½

فر (رقبہ) / فر لا = ۲ { (ط - لا) فر (۲ ار لا)^½ / فر لا + (۲ ار لا)^½ فر (ط - لا) / فر لا }

= ۲ { (ط - لا) ½ (۲ ار لا)^-½ ۲ ار - (۲ ار لا)^½ }

جب یہ رقبہ اعظم ہوتا ہے تو فر (رقبہ) / فر لا = ۰

یعنی ار (ط - لا) / (۲ ار لا)^½ = (۲ ار لا)^½ ∴ ار (ط - لا) = ۲ ار لا

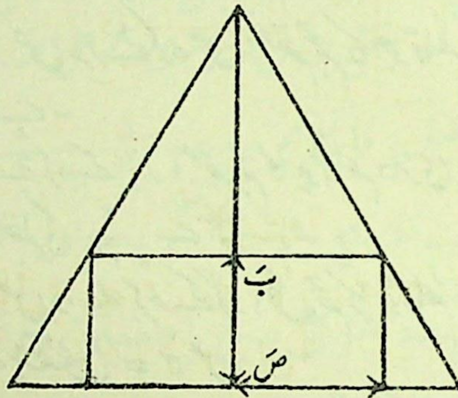
پس ط - لا = ۲ لا لا = ط / ۳

پس ط - لا = ط - ط / ۳ = ۲/۳ ط

سوال کی نوعیت سے ظاہر ہے کہ رقبہ کے لیے جو تفاعل لا لکھا گیا ہے اس کا مشتق صفر ہوتا ہے تو اس کی اعظم قیمت ہی صورت پذیر ہوتی ہے ۔

(۲) اعظم حجم کے اُسطوانہ کا نصف قطر اور بلندی دریافت کرو جو ص نصف قطر اور ب بلندی کے قائم دائری مخروط کے اندر تیار ہو سکتا ہے۔

حل - فرض کرو کہ صَ اور بَ مخروط کا اندرونی اُسطوانہ ہے۔ اس کا حجم ح = π صَ^{2} بَ جو دو متغیروں کا تفاعل ہے۔ ہم سوال کے ہندسہ کی مدد سے ایک متغیر کو دوسرے کی رقموں میں تعبیر کر سکتے ہیں۔ چنانچہ شکل ۱۹ سے واضح ہے کہ متشابہ مثلثوں کے خواص سے



شکل ۱۹

$$\frac{\text{ب} - \text{بَ}}{\text{صَ}} = \frac{\text{ب}}{\text{ص}}$$

$$\therefore \ \text{بَ} = \text{ب} - \frac{\text{صَ}\,\text{ب}}{\text{ص}}$$

پس حجم ح $= \pi\, \text{صَ}^2 \left(\text{ب} - \frac{\text{صَ}\,\text{ب}}{\text{ص}}\right)$

اس کو تفرق کرنے سے $\frac{d\,\text{ح}}{d\,\text{صَ}} = \pi\, \text{صَ}^2 \left(-\frac{\text{ب}}{\text{ص}}\right) + 2\pi\, \text{صَ} \left(\text{ب} - \frac{\text{صَ}\,\text{ب}}{\text{ص}}\right)$

$$= \frac{\pi\, \text{ب}}{\text{ص}} \left(-3\,\text{صَ}^2 + 2\,\text{صَ}\,\text{ص}\right)$$

اس جملہ کو صفر کے مساوی لکھ کر صَ کے لیے حل کرنے سے صَ کی قیمت صفر یا $\frac{2\,\text{ص}}{3}$ برآمد ہوتی ہے۔

واضح ہے کہ صَ = ۰ تفاعل کی اقل قیمت سے متعلق ہے اور صَ = $\frac{۲ ص}{۳}$
اس کی اعظم قیمت سے ۔
پس مطلوبہ اعظم اسطوانہ کی بلندی ب ۔ $\frac{۲}{۳}$ ب یعنے $\frac{ب}{۳}$ ہے ۔

مثالیں

ثابت کرو کہ :-

(۱) نصف قطر ص والے کرہ میں اعظم حجم کا جو قائم دائری مخروط بن سکتا ہے اس کی بلندی $\frac{۴}{۳}$ ص ہے ۔

(۲) ایک دیے ہوئے کرہ کے اندر اعظم حجم کا جو قائم دائری اسطوانہ تیار کیا جا سکتا ہے، اس کی بلندی کرہ کے نصف قطر کی $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ ہے ۔

(۳) نصف قطر ص والے کرہ کے گرد اقل حجم کا جو قائم دائری مخروط بنایا جا سکتا ہے اس کا ارتفاع (یعنے بلندی) = ۴ ص

(۴) ب^۲ لا^۲ + ا^۲ ما^۲ = ا^{۲}ب^۲ خطِ ناقص کے اندر اعظم متساوی الساقین مثلث جس کا راس ناقص کے محور اقل کے سرے پر واقع ہے $\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$ اب رقبہ رکھتا ہے ۔

(۵) دیے ہوئے محیط کے اعظم رقبہ والے دائری قطع کا مرکز دائرہ پر کا زاویہ ۲ نیم قطریاں ہے ۔

(۶) اقل مجموعی رقبہ سطح کے ایک دیے ہوئے حجم والے قائم دائری مخروط کے لیے $\frac{\text{بلندی}}{\text{نصف قطر}}$ کی نسبت ۲ $\sqrt{۲}$ ہے ۔

(۷) $\frac{لا^۲}{ا^۲} + \frac{ما^۲}{ب^۲}$ = ا کے ناقص کے اندر جو اعظم مستطیل کھینچا جا سکتا ہے، اس کے ضلعوں کا طول $\sqrt{۲}$ ا اور $\sqrt{۲}$ ب ہے ۔

(۸) ڈائن اگنیسی (Witch of Agnesi) کی مساوات
ما = $\frac{۸ ا^۳}{لا^۲ + ۴ ا^۲}$ ہے ۔

اس کی ترسیم کھینچو اور بتاؤ کہ مستطیل جس کا قاعدہ محور لا پر ہو اور جس کے دو راس ڈائن پر ہوں اس کا اعظم رقبہ = ۴ اُ

(۹) مستطیل شہتیر کی مضبوطی اس کی چوڑائی اور اس کی موٹائی کے مکعب کے حاصل ضرب کے لحاظ سے بدلتی ہے۔ اعظم مضبوطی کی مستطیل شہتیر کے ابعاد دریافت کرو جو ص نصف قطر والے اسطوانہ سے تراشی جا سکتی ہے۔

جواب۔ چوڑائی = ص، موٹائی = ص $\sqrt{3}$

(۱۰) دائری لچھے پر سے گزرنے والی برقی رو کا مقناطیسی میدان ایسے نقطہ پر جو لچھے کے محور پر (یعنے خطِ مستقیم جو اس کے مستوی کے علی القوائم اور اس کے مرکز میں سے گزرتا ہو) مرکز سے لا فاصلہ پر واقع ہو $\frac{لا}{(ص^2 + لا^2)^{\frac{5}{2}}}$ کے متناسب ہے۔ جس میں ص لچھے کا نصف قطر ہے۔ ثابت کرو کہ یہ میدان اعظم ہے جبکہ لا = $\frac{ص}{2}$

۵۔ تفاعل کے تفرقی سر یا مشتق کا تصوّر بطور شرح تبدیلی تفاعل۔

اِس احصاء کی کتاب کے ابتدائی بابوں میں ہم نے دیکھا ہے کہ اگر ما = ف (لا) تو $\frac{مف\ ما}{مف\ لا}$ = ما کی اوسط شرح تبدیلی بلحاظ لا جبکہ لا بدل کر لا + مف لا ہوتا ہے۔

اگر ما = ھ لا + ج جس میں ھ اور ج مستقل ہیں تو $\frac{مف\ ما}{مف\ لا}$ = ھ ایک مستقل۔ یعنے ما کی اوسط شرح تبدیلی بلحاظ لا خطِ مستقیم کی ڈھلان ھ کے مساوی ہے اور مستقل ہے۔ صرف اِس صورت ہی میں ما کی تبدیلی (مف ما) جبکہ لا اپنی کسی قیمت لا سے بدل کر لا + مف لا ہو جاتا ہے، شرح تبدیلی ھ مضروب مف لا کے مساوی ہے۔

آنی شرح تبدیلی - جیسا کہ قبل ازیں بیان ہو چکا ہے، اگر

لا سے لا + مف لا کا وقفہ گھٹتا ہے اور مف لا ← ۰۔ تب ما کی اوسط شرح تبدیلی بلحاظ لا اس وقفہ کے اندر انتہائی حالت میں ما کی آنی شرح تبدیلی بلحاظ لا ہو جاتی ہے - پس مسلّمہ طریق کتابت میں

فر ما / فر لا = ما کی آنی شرح تبدیلی بلحاظ لا ' لا کی ایک معین قیمت کے لیے

مثلاً اگر ما = لا² تو مف ما / مف لا = ((لا + مف لا)² - مف لا) / مف لا = ۲ لا + مف لا

اگر لا = ۵ اور مف لا = ۰٫۰۵ تو مف ما / مف لا = ۱۰٫۰۵ اور ما کی اوسط شرح تبدیلی بلحاظ لا جبکہ لا کی قیمت ۵ سے بڑھ کر ۵٫۰۵ ہوتی ہے تو ۱۰٫۰۵ ہے - اور چونکہ

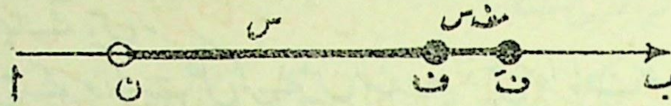
فر ما / فر لا = ۲ لا اس لیے ما کی آنی شرح بلحاظ لا = ۲ × ۵ یعنے ۱۰ اکائیاں فی اکائی تبدیلی لا - اکثر اوقات لفظ "آنی" متروک کر دیا جاتا ہے -

تفاعل لا کی ترسیم کھینچ کر آسانی بتایا جا سکتا ہے کہ ما کی ترسیم کے کسی نقطہ ف (محدد لا 'ما) پر اس کی آنی شرح تبدیلی نقطہ ف پر کے خطِ مماس کی مستقل شرح تبدیلی ہے -

جبکہ لا = لا تب ما یعنے فَ (لا) کی آنی شرح تبدیلی = فَ (لا) - اب اگر لا بدل کر لا + مف لا ہوتا ہے ما کی صحیح (exact) تبدیلی فَ (لا) مف لا کے مساوی نہیں ہوتی ہے الا اس صورت کے جبکہ فَ (لا) مستقل ہے ' جیسا کہ خطِ مستقیم کی مساوات میں مشاہدہ ہوا - بریں ہمہ ہم آگے چل کر دیکھینگے کہ یہ حاصل ضرب مف ما کے تقریباً مساوی ہے جبکہ مف لا کافی چھوٹا ہوتا ہے -

مستقیم خطی حرکت میں رفتار - متغیر متبوع جب وقت ہوتا ہے تو تفاعل کا تفرقی سر یا مشتق شرح بلحاظ وقت یا زمانی شرح کہلاتا ہے - اِس کی سادہ ترین مثال مستقیم خطی حرکت میں ملتی ہے - فرض کرو

شکل نمبر ۲۰ میں ایک نقطہ ف خطِ مستقیم ا ب پر حرکت کر رہا ہے۔ اس کا



شکل نمبر ۲۰

فاصلہ کسی ثابت نقطہ ن سے اس کے کسی مقام تک س ہے اور اس کا متناظر وقت و ہے۔ و کی ہر قیمت کے ساتھ ف کا بھی ایک مقام معین ہے۔ پس فاصلہ س وقت و کا ایک تفاعل ہے۔ یعنے

س = ف (و)

اب اگر و میں اضافہ مف وَ ہوتا ہے تو س میں اضافہ مف س صورت پذیر ہوتا ہے' جو وقت مف و میں طے شدہ فاصلہ ہے۔ اور

$\frac{\text{مف س}}{\text{مف و}}$ = نقطہ ف کی اوسط رفتار جبکہ وہ ف سے فَ تک وقفۂ وقت مف و میں حرکت کرتا ہے۔ اگر ف کی حرکت یکساں ہے یعنے رفتار مستقل ہے تو وقت کے ہر وقفہ کے لیے نسبت $\frac{\text{مف س}}{\text{مف و}}$ کی ایک ہی قیمت ہوگی اور وہ کسی آن کی بھی رفتار ہوگی

حرکت کی عام قسم کے لیے خواہ یکساں ہو یا غیر یکساں کسی آن کی رفتار (یعنے فاصلہ کی زمانی شرح) کی یوں تعریف کی جا سکتی ہے کہ وہ اوسط رفتار کی انتہا ہے جبکہ مف و بطور انتہا صفر کو پہنچتا ہے۔ یعنے

$$\text{ر} = \frac{\text{فر س}}{\text{فر و}}$$

مربوط یا متعلق (Related) شرحیں ۔ اکثر سوالوں میں کئی متغیروں سے سابقہ پڑتا ہے جن میں سے ہر ایک وقت کا تفاعل ہوتا ہے۔

سوال کے شرائط کے لحاظ سے پہلے ان متغیروں کے مابین رابطے قائم کیے جاتے ہیں اور بعد ازاں عملِ تفرق کے ذریعے ان کی تبدیلی کی "بلحاظ وقت شرحوں" میں رابطے دریافت کیے جاتے ہیں۔

شرح کے سوالات حل کرنے میں مندرجۂ ذیل ہدایات مفید ہیں :-

(۱) سوال کی توضیح کے لیے ایک شکل کھینچ لی جائے۔ وقت کے لحاظ سے جو مقادیر بدلتے ہیں ان کو لا، ما، ی وغیرہ سے تعبیر کرو۔

(۲) جن متغیروں سے بحث ہو اُن کے مابین ایسے ضابطے حاصل کرو جو کسی آن کے لیے بھی صحیح ہوں۔

(۳) وقت کے لحاظ سے تفرق کرو۔

(۴) دیے ہوئے مقادیر اور مطلوبہ مقادیر کی ایک فہرست تیار کرو۔

(۵) تفرق کے عمل سے جو نتیجہ دریافت ہوا ہو اس کے اندر معلوم مقادیر کو تعویض کرو۔ اور غیر معلوم مقادیر کی مساواتوں کو حل کرو۔

توضیحی مثالیں

(۱) ل سمر طول کے سادہ رقّاص کے ایک کامل اہتزاز کے وقت دَوران کا ضابطہ کسی مقام پر ل = ۰٫۲۰۷ $\sqrt{\text{ل}}$ ثانیہ ہے۔ رقّاص کے طول کے لحاظ سے وقتِ دَوران کی تبدیلی کی شرح دریافت کرو جبکہ ل = ۲۵ سمر۔ اور اس کے ذریعے بتاؤ کہ وقتِ دَوران میں کیا تقریبی تبدّل واقع ہوگا جبکہ ل ۲۵ سمر سے بڑھ کر ۲۵٫۵ سمر ہو جائیگا۔

حل - چونکہ $\text{و} = ۰٫۲۰۷ (\text{ل})^{\frac{1}{2}}$ ، $\frac{\text{فر و}}{\text{فر ل}} = \frac{۰٫۲۰۷}{۲} (\text{ل})^{-\frac{1}{2}}$

ل جب ۲۵ سمر ہے تو $\frac{\text{فر و}}{\text{فر ل}} = \frac{۰٫۲۰۷}{۵ \times ۲} =$ ۰٫۰۲۰۷ ثانیہ فی سمر

اور ل جب ۲۵ سمر سے بڑھ کر ۲۵٫۵ سمر ہوتا ہے تو و میں تقریبی تبدّل

۰٫۰۲۰۷ × ۰٫۵ = ۰٫۰۱۰۳۵ ثانیہ ہوتا ہے۔

(۲) ایک ذرہ خطِ مکافی $ما^۲ = ۹ لا$ میں اس طرح حرکت کرتا ہے کہ لا کی قیمت جب ۴ ہے تو فصلہ بشرح ۶ فٹ فی ثانیہ بڑھتا ہے۔ بتاؤ اُس وقت معین کے بڑھنے کی کیا شرح ہے۔

حل۔ چونکہ $ما^۲ = ۹ لا$ ∴ وقت کے لحاظ سے تفرق کرنے سے

$$۲ ما \frac{فز ما}{فز و} = \frac{۹ \; فز ما}{فز و}$$

یعنی

$$\frac{فز ما}{فز و} = \frac{۹}{۲ ما} \cdot \frac{فز لا}{فز و}$$

لیکن ازروے مساوات خطِ مکافی $ما = ± ۳ \sqrt{لا}$

پس

$$\frac{فز ما}{فز و} = ± \frac{۹}{۲ × ۳ \sqrt{لا}} \cdot \frac{فز لا}{فز و}$$

$$= ± \frac{۳}{۲ \sqrt{لا}} \cdot \frac{فز لا}{فز و}$$

یعنے مکافی کے کسی نقطہ پر بھی معیّن کی تبدیلی کی شرح $± \frac{۳}{۲\sqrt{لا}}$ شرح تبدیلی فصلہ ہے۔ لا کی قیمت جب ۴ ہے تو دیا گیا ہے کہ $\frac{فز لا}{فز و} = ۶$ فٹ فی ثانیہ

اس لیے درانحالیکہ لا = ۴، $\frac{فز ما}{فز و} = ± \frac{۳}{۲ × ۲} × ۶$ فٹ فی ثانیہ

$= ± \frac{۹}{۲} = ± ۴\frac{۱}{۲}$ فٹ فی ثانیہ

واضح ہو کہ لا کی ہر ایک قیمت پر ما کی دو مساوی قیمتیں ہوتی ہیں ایک مثبت اور دوسری منفی پس لا = ۴ کی صورت میں خطِ مکافی کا ایک معیّن بشرح $۴\frac{۱}{۲}$ فٹ فی ثانیہ بڑھتا ہے اور اس کے مقابل کا معیّن بشرح $۴\frac{۱}{۲}$ فٹ فی ثانیہ گھٹتا ہے۔

مثالیں

(۱) ایک مثلث متساوی الاضلاع کے ضلعے ایک ایک فٹ لمبے ہیں۔ اگر وہ

بشرح $\frac{1}{2}$ انچ فی منٹ بڑھتے جائیں تو بتاؤ کہ مثلث کے رقبے کے بڑھنے کی شرح ۲ $\sqrt{3}$ مربع انچ فی منٹ ہے۔

(۲) گردشی مجسم ناقص نما شکل کے غبارہ کا سب سے بڑا محور اس کے ایک چھوٹے محور کا دوچند ہے اور دوسرے چھوٹے محور کا سہ چند ۔ اگر غبارہ میں گیس بشرح ۱۲۰ مکعب فٹ فی منٹ بھری جا رہی ہے جبکہ وہ ۱۲ فٹ لمبا ہے اور یکساں پھولتا جا رہا ہے تو ثابت کرو کہ اس کے طول کے بڑھنے کی شرح $\frac{۱۰}{\pi}$ فٹ فی منٹ ہے

[اشارہ ۔ گردشی مجسم ناقص نما کا حجم $\frac{۴\pi}{۳}$ ا ب ج ہے جس میں ا، ب، ج مجسم کے نصف محور ہیں]۔

(۳) ۱۲ فٹ قطر کے نصف کروی کٹورے میں مائع بشرح ۶۰ مکعب فٹ فی منٹ ڈالا جا رہا ہے ۔ اگر کٹورے کی آدھی گہرائی بھر گئی ہو تو بتاؤ کہ اس وقت مائع کی سطح کے بلند ہونے کی شرح $\frac{۸}{۹\pi}$ فٹ فی منٹ ہے۔

[اشارہ ۔ کروی قطاع کا حجم = $\frac{1}{6}\pi$ ب (۳ ص^2 + ب^2) جس میں ص مستوی سطح کا نصف قطر ہے اور ب اس کی بلندی]

(۴) ایک سیڑھی ۱۳ فٹ لمبی ہے ۔ اس کا اوپر کا سرا ایک انتصابی دیوار سے لگا ہوا ہے اور نیچے کا سرا سطح زمین پر ٹکا ہوا ہے ۔ اگر یہ نیچے کا سرا دیوار سے مخالف سمت میں بشرح ۳ فٹ فی ثانیہ کھینچا جائے جبکہ وہ دیوار سے ۵ فٹ دور ہو تو بتاؤ کہ اوپر کا سرا دیوار پر سے بشرح $\frac{1}{4}$ ۱ فٹ فی ثانیہ نیچے اترتا جائیگا۔

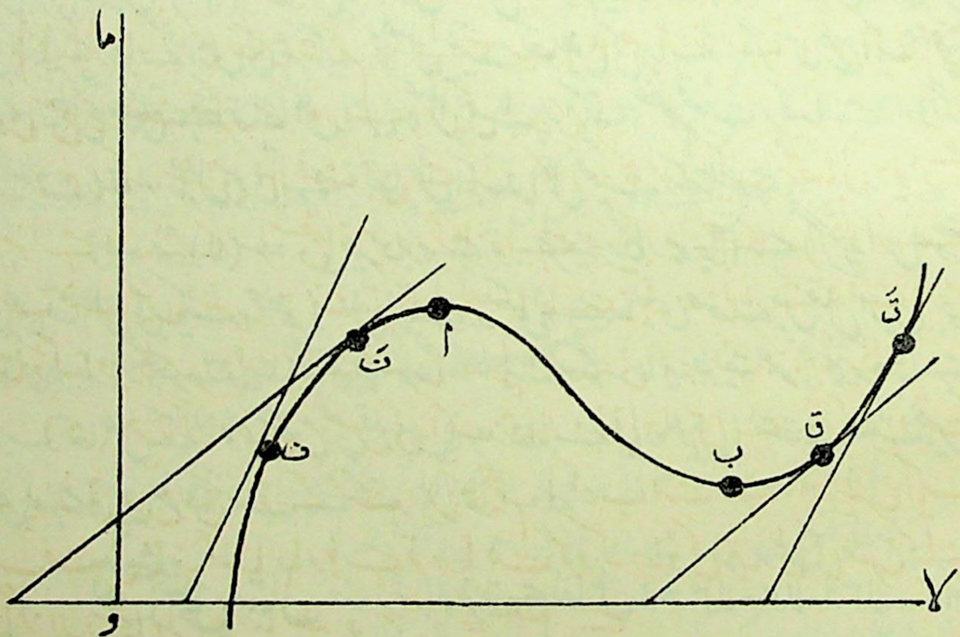
(۵) حرنا گزار طریقہ پر گیس کی ایک مقدار دبائی جا رہی ہے ۔ اگر کسی وقت ۵۶ پونڈ فی مربع انچ دباؤ کے تحت اس کا حجم ۱۰ مکعب فٹ ہے ۔ اور بشرح ایک مکعب فٹ فی ثانیہ گھٹتا جا رہا ہے تو دریافت کرو کہ دباؤ کی تبدیلی کی شرح کیا ہے حرنا گزار استحالوں کا ضابطہ د ح$^{۱٫۴}$ = مستقل ہے۔

[جواب ۔ تقریباً ۷٫۹ پونڈ فی مربع انچ فی ثانیہ اضافہ]

(ب) آسان ہندسی وطبیعی مسائل میں متواتر تفرق کا استعمال۔

۶۔ منحنی کے مُڑنے کی سمت اور اس کے ذریعہ اعظم و اقل قیمتوں کی پہچان کا طریقہ۔

شکل ۲۱ میں ف فَ ا ب ق قَ ایک منحنی ہے جو ایک نقطہ (محدد لا، ما) کی حرکت سے پیدا ہوتا ہے۔ نقطہ سے جیسے جیسے منحنی کو مرتسم ہوتا ہے اُس پر منحنی کے مماس کا ڈھلان بدلتا جاتا ہے۔ خطِ مماس جب منحنی کے اوپر واقع ہوتا ہے تو اس حصہ میں منحنی کا قوس نیچے کی طرف مجوّف ہوتا ہے اور جب خطِ مماس منحنی کے نیچے واقع ہوتا ہے تو یہاں منحنی کا قوس اوپر کی طرف مجوّف ہوتا ہے۔ شکل میں منحنی کا ڈھلان گھٹتا جاتا ہے جبکہ نقطۂ قوس ف ا کو مرتسم کرتا ہے۔ اس حصہ میں ما یعنے فہ (لا) (منحنی جس کی ترسیم ہے) لا کا ایک گھٹنے والا تفاعل ہے۔ اس کے علی الرغم نقطہ (لا، ما) جبکہ قوس ب فَ کو مرتسم کرتا ہے



شکل ۲۱

تو ڈھلان بڑھتا جاتا ہے اور اس حصہ میں فہَ (لا)، لا کا ایک بڑھنے والا تفاعل ہے

پس اول الذکر صورت میں فہَ (لا) کا تفرقی سر یعنے فہً (لا) ایک منفی مقدار ہے اور ثانی الذکر صورت میں فہً (لا) مثبت مقدار ہے - پس کسی نقطہ پر منحنی کے مڑنے کی سمت کا اس طرح پتہ چل سکتا ہے :-

ما = فہ (لا) کی ترسیم نیچے کی طرف مجوّف ہوتی ہے اگر ما کا دوسرا اشتق بلحاظ لا منفی ہے اور اوپر کی طرف مجوّف ہوتا ہے جبکہ یہ مشتق مثبت ہوتا ہے - نقطہ ا پر قوس نیچے کی طرف مجوّف ہے اور منحنی کا معیّن ایک اعظم قیمت رکھتا ہے - یعنے فہَ (لا) = ۰ اور فہً (لا) منفی ہے - نقطہ ب پر قوس اوپر کی طرف مجوّف ہے اور منحنی کا معیّن ایک اقل قیمت رکھتا ہے - یعنے فہَ (لا) = ۰ اور فہً (لا) مثبت ہے - پس تفاعل فہ (لا) کی اعظم و اقل قیمتیں دریافت کرنی ہوں تو

(۱) تفاعل کا مشتق دریافت کر لیا جائے (۲) اس مشتق کو صفر کے مساوی لکھ کر متغیر کی فاصل قیمتیں معلوم کرنے کے لیے مساوات حل کی جائے اور اس کی حقیقی اصلیں حاصل کر لی جائیں (۳) تفاعل کا ثانوی مشتق معلوم کیا جائے (۴) اور اس ثانوی مشتق میں متغیر کی بجائے اس کی ہر ایک فاصل قیمت تعویض کی جائے - اگر اس طرح ایک منفی مقدار حاصل ہوتی ہے تو تفاعل اس فاصل قیمت پر ایک اعظم قیمت رکھتا ہے - اور اگر ایک مثبت مقدار حاصل ہوتی ہے تو تفاعل ایک اقل قیمت رکھتا ہے -

جب فہً (لا) = ۰ یا غیر موجود ہے تو یہ طریقہ بیکار ہو جاتا ہے اگرچہ اس صورت میں بھی تفاعل کی ایک اعظم یا اقل قیمت ہو سکتی ہے - ایسی صورت میں قبل ازیں جو اساسی طریقہ (دیکھو ۳) بتایا گیا ہے کارآمد ثابت ہوگا - حالیہ طریقہ عموماً کام دیتا ہے اور جب تفاعل کے ثانوی مشتق کی تعیین ضرورت سے زیادہ طویل یا مشقت طلب نہیں ہوتی ہے تو یہی طریقہ سب سے مختصر پایا جاتا ہے -

توضیحی مثال - مندرجۂ بالا طریقہ سے تفاعل ما = ۳ لا^{۴} - ۴ لا^{۳} - ۳۶ لا^{۲} + ۶۰ کا اعظم و اقل قیمتوں کے لیے امتحان کرو -

حل : ما = ۳ لا^{۴} - ۴ لا^{۳} - ۳۶ لا^{۲} + ۶۰

$\frac{\text{د ما}}{\text{د لا}}$ = ۱۲ لا^{۳} - ۱۲ لا^{۲} - ۷۲ لا

اس کو صفر کے مساوی لکھنے سے لا (لا^{۲} - لا - ۶) = ۰ لا (لا - ۳) (لا + ۲) = ۰

یعنے لا = ۰ یا لا = ۳ یا لا = -۲

یہ معلوم کرنے کے لیے کہ آیا لا کی ان فاصل قیمتوں پر ما اعظم ہے یا اقل

$\frac{\text{فر}^{۲}\text{ ما}}{\text{فر لا}^{۲}}$ = ۳ لا^{۲} - ۲ لا - ۶ پر غور کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر

لا = ۰ تو $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ ما}}{\text{فر لا}^{۲}}$ = -۶ اور چونکہ یہ منفی ہے اس لیے لا = ۰ پر

ما اعظم ہے اور اس کی قیمت -۶ ہے۔

اگر لا = ۳ تو $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ ما}}{\text{فر لا}^{۲}}$ = ۲۷ - ۶ - ۶ = ۱۵ جو مثبت ہے اس لیے

لا = ۳ پر ما اقل ہے اور اس کی قیمت ۲۴۳ - ۱۰۸ - ۳۲۴ + ۶۰ = -۱۲۹ ہے۔

اگر لا = -۲ تو $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ ما}}{\text{فر لا}^{۲}}$ = ۱۲ + ۴ - ۶ = ۱۰ جو مثبت ہے اس لیے

لا = -۲ پر ما اقل ہے اور اس کی قیمت ۴۸ + ۳۲ - ۱۴۴ + ۶۰ = -۴ ہے۔

مثالیں

(۱) ما = لا^{۳} - ۳ لا^{۲} - ۹ لا + ۵ کی ترسیم کھینچو۔ اور بتاؤ کہ لا = -۱ پر اس کی اعظم قیمت ۱۰ ہے اور لا = ۳ پر اقل قیمت -۲۲ ہے۔

(۲) ثابت کرو کہ ما = $\frac{\text{ا لا}}{\text{لا}^{۲} + \text{ا}^{۲}}$ کی اعظم قیمت = $\frac{۱}{۲}$ جو لا = ا پر واضح ہوتی ہے اور اقل قیمت = -$\frac{۱}{۲}$ جو لا = -ا پر واقع ہوتی ہے۔

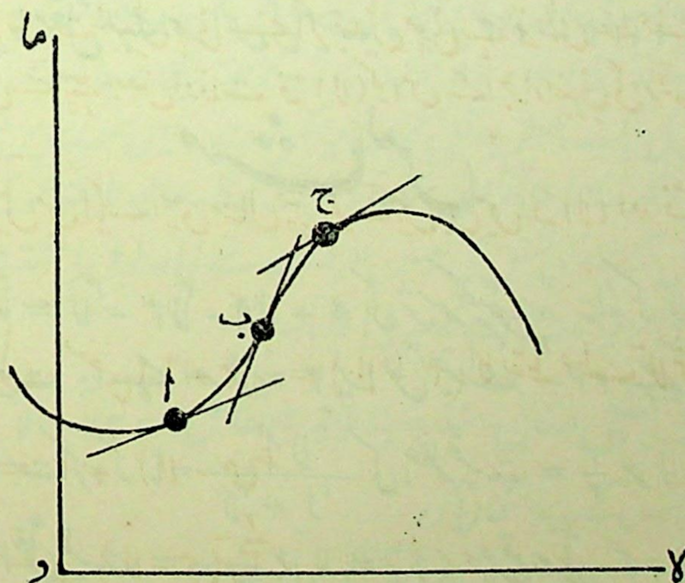
(۳) لا^{۵} - ۵ لا^{۳} - ۲۰ لا + ۱۰ کی اعظم قیمت (= ۵۸) لا = -۲ پر واقع ہوتی ہے اور اقل قیمت (= -۳۸) لا = ۲ پر واقع ہوتی ہے۔

(۴) ثابت کرو کہ ایک دیے ہوئے قطر کے دائرے کے اندر کھینچے ہوئے مثلثوں میں مثلث متساوی الاضلاع کا رقبہ سب سے بڑا ہے۔

(۵) دو قصبے ا اور ب ایک ریل کی سیدھی سڑک ج د سے علی الترتیب ۴ اور ۸ میل فاصلوں پر واقع ہیں۔ اگر قصبۂ ا کے لیے ریل کی سڑک کا قریب ترین مقام ج ہے اور قصبۂ ب کے لیے قریب ترین مقام د اور ج د = ۹ میل تو بتاؤ کہ ریل کا اسٹیشن کہاں قائم کیا جائے تاکہ اس سے ا اور ب تک کی سڑکوں کا مجموعی طول اقل ہو۔ [جواب = ج سے ۳ میل]

۷ نقاطِ عطف۔ منحنی کے نقطۂ عطف سے مراد وہ نقطہ ہے جو مڑنے کی باہم دیگر مخالف سمتوں میں مڑنے والی قوسوں کو ایک دوسرے سے علیحدہ کرتا ہے نقطۂ عطف کے ایک طرف اگر منحنی کی قوس ایک لحاظ سے مجوّف ہے تو اس کے دوسرے طرف اسی لحاظ سے منحنی کی قوس محدّب ہے۔

شکل ۲۲ میں ب منحنی کا ایک نقطۂ عطف ہے۔ ا پر منحنی کی قوس اوپر سے



شکل ۲۲

مجوف ہے اور ج پر اسی لحاظ سے محدب منحنی کا مرتسم نقطہ جب نقطہ عطف ب سے گزرتا ہے تو وہاں تفاعل کے ثانوی مشتق کی علامت تبدیل ہو جاتی ہے اور اگر منحنی مسلسل ہے تو یہ مشتق اس نقطہ پر معدوم ہوتا ہے۔ پس نقطۂ عطف پر فہً (لا) = ۰
اس مساوات کو حل کرنے سے نقاطِ عطف کے فصلے معلوم ہو جاتے ہیں کسی نقطۂ عطف کے قریب منحنی کے مڑنے کی سمت دریافت کرنے کے لیے پہلے اس نقطہ کے فصلہ سے ذرا سی کمتر قیمت اور پھر ذرا سی زائد قیمت کا فصلہ لے کر دیکھو کہ تفاعل کے ثانوی مشتق کی علامت کیا ہے۔ اس سے پتہ چل جائیگا کہ نقطہ عطف کے قریب منحنی کے کس طرف قوس مجوف ہے اور کس طرف محدب۔ شکل کے معائنہ سے واضح ہوگا کہ جہاں منحنی کا حصہ اوپر کی طرف مجوف ہے جیسے کہ ا کے پاس، یہاں منحنی خطِ مماس کے اوپر واقع ہوگا اور جہاں نیچے کی طرف مجوف ہے جیسے ج کے پاس، وہاں منحنی خطِ مماس کے نیچے واقع ہوگا۔ نقطۂ عطف ب پر خطِ مماس منحنی پر سے گزر جاتا ہے۔

پس منحنی ما = فہ (لا) کے کسی نقطۂ عطف کی پہچان کے لیے پہلے فہً (لا) دریافت کرو۔ پھر اس کو صفر کے مساوی لکھ کر مساوات کی حقیقی اصلیں معلوم کرو۔ اس کے بعد ایک ایک اصل سے خفیف سی کمتر اور پھر خفیف سی زائد قیمت کا فصلہ لے کر دیکھو کہ آیا فہً (لا) کی علامت تبدیل ہوتی ہے اگر تبدیل ہوتی ہے تو وہاں نقطہ عطف واقع ہے۔ اس آخری عمل سے پہلے بعض اوقات فہً (لا) کو اس کے اجزاء ضربی کی رقموں میں لکھنا مفید ہوتا ہے۔

ہم ذیل میں ایک ایسی مثال پیش کرتے ہیں جس میں فہَ (لا) اور فہً (لا) دونوں لامتناہی ہیں۔

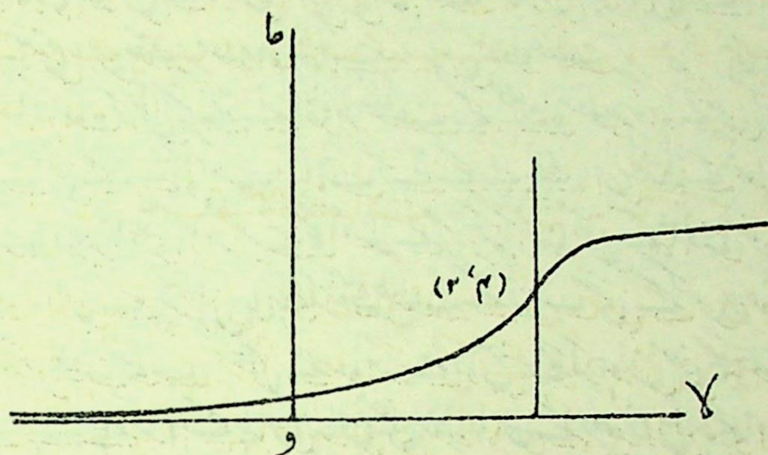
مثال۔ منحنی (ما − ۲)^{۳} = (لا − ۴) کا نقطۂ عطف تلاش کرو۔

چونکہ ما = ۲ + (لا − ۴)$^{\frac{1}{3}}$

$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{3}$ (لا − ۴)$^{-\frac{2}{3}}$

اور $\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فرلا}^2} = \frac{2}{-9}$ (لا − ۴)$^{-\frac{5}{3}}$

جبکہ لا = ۴ پہلا اور دوسرا دونوں مشتق لامتناہی ہو جاتے ہیں۔



شکل ۲۳

جبکہ لا < ۴　$\frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر لا}^2}$ = مثبت

اور جبکہ لا > ۴　$\frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر لا}^2}$ = منفی

جہاں لا = ۴ تو ما = ۲

پس نقطہ (۴، ۲) پر کا خطِ مماس محور لا کے علی القوائم ہے اور اس نقطہ کے بائیں جانب منحنی اوپر کی طرف مجوف ہے اور اس کے سیدھے جانب نیچے کی طرف مجوف۔ لہذا (۴، ۲) ایک نقطہ عطف ہے۔

مثالیں

(۱) ما = لا^3 - ۳ لا^2 - ۴ کی ترسیم کا امتحان کر کے بتاؤ کہ اس کا کونسا حصّہ مقعّر ہے اور کونسا محدّب۔ اور نیز ثابت کرو کہ نقطہ (۱، -۶) اس کا ایک نقطۂ عطف ہے۔

(۲) ما = (لا^2 - ۱)^2 کا اس کے مڑنے کی سمتوں اور نقاطِ عطف سے

متعلق امتحان کرو۔ [جواب۔ نقاطِ عطف کے محدد $(\frac{۱}{\sqrt{۳}}، \frac{۴}{۹})$، $(-\frac{۱}{\sqrt{۳}}، \frac{۴}{۹})$ ہیں]

(۳) بتاؤ کہ $ما = لا^{۳}$ مبداء کے بائیں جانب نیچے کی طرف مقعر ہے اور اس کے سیدھے جانب اوپر کی طرف محدب ہے۔ لیکن $ما = لا^{۴}$ ہر مقام پر اوپر کی طرف مقعر ہے۔

۸۔ ترسیمِ منحنیات ۔ مستوی ہندسۂ تحلیلی میں طالب علم نے دیکھا ہوگا کہ جب کسی منحنی کی مساوات خطی محدّدوں کی رقموں میں دی جاتی ہے تو اس کی ترسیم کھینچنے کے لیے عموماً مساوات کو حل کر کے (اگر وہ حل ہو سکتی ہے) ما یا لا کے لیے ایک جملہ حاصل کیا جاتا ہے اور لا یا ما کی موزوں عددی قیمتیں مان کر ما یا لا کی متناظر قیمتیں دریافت کی جاتی ہیں اور اس طرح منحنی کے کافی نقطوں کے محدّد معلوم کر کے ترسیم تیار کر لی جاتی ہے۔ یہ طریقہ اول تو مساوات کے حل ہونے پر استعمال ہو سکتا ہے اور کسی حالت میں بھی بہت مشقّت طلب ہے۔ اکثر اوقات صرف منحنی کی عام شکل معلوم کرنے کی ضرورت ہوتی ہے۔ مثلاً یہ کہ منحنی کہاں مقعر ہے اور کہاں محدّب، ایک سمت سے دوسری سمت میں کس کس مقام پر مُڑتی ہے وغیرہ، وغیرہ۔ ان امور کی فوری تعیین احصار کے ذریعے بآسانی عمل میں آ سکتی ہے، جیسا کہ مندرجۂ ذیل مثال سے معلوم ہوگا۔

مثال۔ منحنی $ما = لا^{۴} - ۲لا^{۲} + ۱۰$ کی ترسیم کھینچو۔

چونکہ $\frac{فرما}{فرلا}$ سے منحنی کا ہر مقام پر ڈھلان معلوم ہو جاتا ہے اس لیے (ا) تفاعل کا پہلا مشتق (یعنے $\frac{فرما}{فرلا}$) دریافت کر کے صفر کے مساوی لکھا جائیگا۔ پھر اس کو حل کر کے منحنی کے اعظم اور اقل نقطوں کے فصلوں کا پتہ چلایا جائیگا یعنے لا کی وہ قیمتیں معلوم کر لی جائینگی جن کے لیے ما کی قیمتیں اعظم یا اقل ہیں۔ اس کے بعد (ب) تفاعل کا دوسرا مشتق (یعنے $\frac{فر^{۲}ما}{فرلا^{۲}}$) دریافت کیا جائیگا اور اس کو صفر کے مساوی مان کر منحنی کے نقاطِ عطف کے فصلوں کا پتہ چلایا جائیگا۔ پھر (ج) جن نقطوں کے فصلے

پہلے دو عملوں سے معلوم ہو چکے ہیں اُن کے متناظر معینوں کی قیمتیں محسوب کر لی جائینگی۔ بعد ازاں (د) منحنی کی شکل معلوم کرنے کے لیے جتنے بھی اور نقطوں کے محدد لا یا ما کی مناسب قیمتیں فرض کرکے دریافت کیے جا سکتے ہیں دریافت کر لیے جائینگے۔ اس طرح جو نقطے دریافت ہو جائیں ان کے محدّدوں وغیرہ کی ایک جدول تیار کر لی جائیگی۔ پھر اس کے بموجب نقشہ کشی کے کاغذ پر نشانات لگا دیے جائینگے۔ اور اُن نشانات پر سے ایک صاف گزر منحنی کھینچ دیا جائیگا۔

(ا) چونکہ $\text{ما} = \text{لا}^{۴} - ۲\,\text{لا}^{۲} + ۱۰$، $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = ۴\,\text{لا}^{۳} - ۴\,\text{لا}$

جب $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = ۰$ تو $۴\,\text{لا}^{۳} - ۴\,\text{لا} = ۰$ یعنے $۴\,\text{لا}\,(\text{لا}^{۲} - ۱) = ۰$

$\therefore$ $\text{لا} = ۰$ یا $\text{لا} = \pm ۱$

(ب) $\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} = ۱۲\,\text{لا}^{۲} - ۴$ پس جب $\frac{\text{فر}^{۲}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} = ۰$ تو $۱۲\,\text{لا}^{۲} - ۴ = ۰$

$\therefore$ $\text{لا}^{۲} = \frac{۱}{۳}$ یعنے $\text{لا} = \pm \frac{۱}{\sqrt{۳}}$

(ج) $\text{لا} = ۰$ تو $\text{ما} = +۱۰$

$\text{لا} = +۱$ تو $\text{ما} = +۹$

$\text{لا} = -۱$ تو $\text{ما} = +۹$

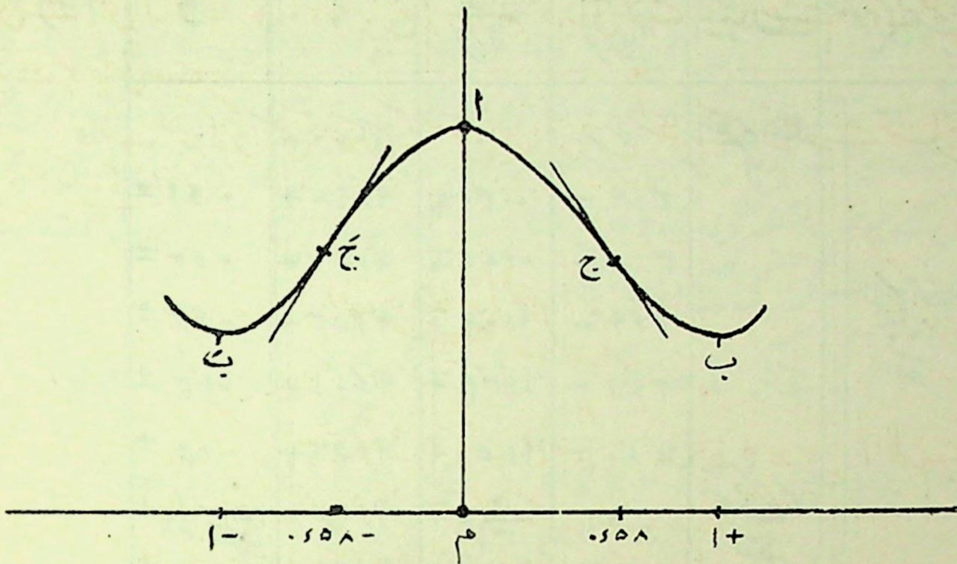
$\text{لا} = +\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ تو $\text{ما} = +۹\frac{۴}{۹}$، $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = -\frac{۸}{۳\sqrt{۳}}$

اور $\text{لا} = -\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ تو $\text{ما} = +۹\frac{۴}{۹}$، $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = +\frac{۸}{۳\sqrt{۳}}$

(د)	لا	ما	فرما / فرلا	فر²ما / فرلا²	کیفیت	منحنی کی سمت
	۰	+۱۰٫۵۰	۰	−۴	اعظم کا نقطہ	نیچے کی جانب مقعر
	±۰٫۱	+۹٫۹۸	∓۰٫۴۰	−۳٫۹		
	±۰٫۲	+۹٫۹۲	∓۰٫۷۷	−۳٫۵		
	±۰٫۳	+۹٫۸۳	∓۱٫۰۹	−۲٫۹		
	±۰٫۴	+۹٫۷۱	∓۱٫۳۴	−۲٫۱		
	±۰٫۵	+۹٫۵۶	∓۱٫۵۰	−۱٫۰		
	±$\frac{1}{\sqrt{3}}$ = ۰٫۵۷۷ تقریباً	+۹٫۴۴	∓$\frac{4}{3\sqrt{3}}$	۰	عطف کا نقطہ	
	±۰٫۶	+۹٫۴۱	∓۱٫۵۴	+۰٫۳		اوپر کی جانب مقعر
	±۰٫۷	+۹٫۲۶	∓۱٫۴۳	+۱٫۹		
	±۰٫۸	+۹٫۱۳	∓۱٫۱۵	+۳٫۷		
	±۰٫۹	+۹٫۰۴	∓۰٫۶۸	+۵٫۷		
	±۱٫۰	+۹٫۰	۰	+۸		
	±۱٫۱	۹٫۰۴	±۰٫۹۲	+۱۰٫۵	اقل کا نقطہ	

اس جدول میں تیرہ نقطوں کے محدد وغیرہ درج ہیں۔ عام طور پر اتنی زحمت اٹھانے کی ضرورت نہیں نقاط اعظم و اقل و عطف کے علاوہ اگر ان کے قریب کے تین چار اور نقطے دریافت کر لیے جائیں تو کافی ہوگا۔

جدول میں لا کی قیمتیں ± اور ان کے متناظر $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کی قیمتیں ∓ لکھی گئی ہیں۔ اس کا یہ مفہوم ہے کہ اگر لا کی قیمت + ۰٫۱ ہے تو اس کے متناظر $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کی قیمت − ۰٫۴۰ ہے اور اگر لا = − ۰٫۱ تو $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = + ۰٫۴۰ لیکن $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2}$ کی قیمت ہر دو صورتوں میں = ۳٫۹ ہے۔



شکل ۲۴

شکل ۲۴ کے مطالعہ سے واضح ہوگا کہ لا = ۰ (یعنے مبداء) پر $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = ۰ اور ما کی قیمت اعظم اور = ۱ پھر جیسے جیسے لا کی قیمت مثبت سمت میں بڑھتی ہے ما کی قیمت گھٹتی ہے $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کی قیمت منفی اور عدداً بڑھتی جاتی ہے۔ $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2}$ کی قیمت منفی اور عدداً گھٹتی جاتی ہے۔ یہاں تک کہ لا = $+\frac{1}{\sqrt{3}}$ = (۰٫۵۸ تقریباً) پر پہنچ کر $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کی قیمت $-\frac{8}{3\sqrt{3}}$ = (۱٫۵۴- تقریباً) ہوجاتی ہے جو عدداً سابقہ اور بعد کو آنے والی قیمتوں سے بڑی ہے۔ یہاں $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2}$ کی قیمت عدداً گھٹ کر لیکن جبری نقطۂ نظر سے بڑھ کر صفر ہو جاتی ہے۔ یہاں تک وہ منفی مقدار تھی اب مثبت ہو جاتی ہے اور اس کے بعد جیسے جیسے لا کی قیمت بڑھتی ہے وہ عدداً اور نیز جبری نقطۂ نظر سے بڑھتی جاتی ہے۔ یعنے اعظم کے نقطہ ا سے عطف کے ایک نقطہ ج تک $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2}$ کی قیمت منفی اور بالآخر صفر ہوتی ہے اس کے بعد وہ مثبت ہوتی ہے۔ منحنی کے جس حصہ میں وہ منفی ہے وہ حصّہ نیچے کی جانب مقعّر ہے اور جس حصہ میں وہ مثبت ہے وہ اوپر کی جانب محدّب۔

نقطۂ عطف پر پہنچنے کے بعد $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی قیمت منفی ہی رہتی ہے۔ لیکن عدداً گھٹتی جاتی ہے حتیٰ کہ لا = + ۰،۱ پر پہنچ کر وہ صفر ہو جاتی ہے۔ یہاں سے وہ آگے چل کر مثبت ہو جاتی ہے۔

طالب علم لا کی منفی قیمتوں کے متعلق بھی اس طرح شکل کے مطالعہ سے نتائج قلمبند کر سکینگے۔

مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ ما = لا^۳ − ۹ لا^۲ + ۲۴ لا − ۷ نقطہ لا = ۲ پر اعظم ہے اور لا = ۴ پر اقل اور لا = ۳ پر اس کا نقطہ عطف ہے۔

اس شکل کی ترسیم بھی کھینچو۔

(۲) مندرجۂ ذیل منحنیوں کو مصرحۂ بالا طریقہ سے مرتسم کرو:۔

(ا) ما = $\frac{\text{۶ لا}}{\text{۱ + لا}^۲}$ جواب [اعظم (۱، ۳) اقل (−۱، −۳) نقاطِ عطف (۰، ۰) اور (± $\sqrt{۳}$، ± $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$)]

(ب) ما = − $\frac{۱}{۴}$ لا^۳ + $\frac{۳}{۴}$ لا^۲ − ۱ جواب [اعظم (۲، ۰) اقل (۰، −۱)]

۹۔ چال، رفتار اور اسراع کی تفرقی سروں یا مشتقوں کے ذریعہ تعبیر

طالب نے حرکیات کی ابتدائی کتابوں میں پڑھا ہوگا کہ اگر کوئی ذرہ خطِ مستقیم یا منحنی مدار میں مساوی فاصلے مساوی وقتوں میں طے کرتا ہے تو کہا جاتا ہے کہ اس کی چال مستقل یا یکساں ہے۔ چال کی تعیین مدت مقررہ میں طے شدہ فاصلہ کو مدت مقررہ پر تقسیم کرنے سے ہوتی ہے۔ اگر ذرہ کی چال یکساں نہ ہو تو کسی مقام پر اس کی تعیین ذیل کے ضابطے سے ہوتی ہے:۔

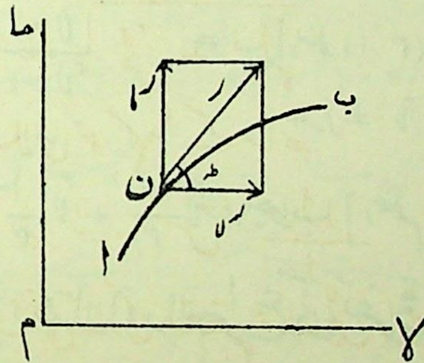
$$\text{چال} = \left[\text{نہا}_{\text{مف لا} \to} \frac{\text{مف لا}}{\text{مف و}} \right] = \frac{\text{فر لا}}{\text{فر و}}$$

جس میں مف لا وہ فاصلہ ہے جو ذرہ اپنے مدار (خطِ مستقیم یا منحنی) میں مقررہ نقطہ سے وقت مف و میں طے کرتا ہے۔ واضح ہو کہ چال ہمیشہ ایک مثبت مقدار ہوتی ہے۔

لیکن رفتار ایک سمتی مقدار ہے اور اس میں (۱) چال (۲) سمت اور (۳) جانب یعنے سمت کا مثبت یا منفی مفہوم، یہ تینوں امور مضمر ہیں — اگر ذرہ خطِ مستقیم میں حرکت کرتا ہے تو اس کی رفتار کسی آن میں

$$ر = \underset{\text{مف و} \to \cdot}{\text{نہا}} \frac{\text{مف س}}{\text{مف و}} = \frac{\text{فر س}}{\text{فر و}}$$

جس میں مف س وہ فاصلہ ہے جو ذرہ مف و وقت میں طے کرتا ہے اور یہ مثبت ہے یا منفی بلحاظ اس امر کہ ذرہ خطِ مذکور کے مثبت یا منفی جانب کو حرکت کرتا ہے۔
اگر ذرہ ایک مستوی منحنی ا ب میں حرکت کرتا ہے (دیکھو شکل ۲۵) تو



شکل ۲۵

نقطہ ن پر اس کی رفتار لا اور ما دو معیّنہ محوروں کی سمتوں میں تحلیل کی جاتی ہے؛ اگر رفتار کا سمتی محور لا کے ساتھ زاویہ ط پر مائل ہے تو

محور لا کی سمت میں اس کا جزوِ ترکیبی $ر_{لا}$ = ر جم ط

اور ما .... $ر_{ما}$ = ر جب ط

ان اجزاءِ ترکیبی کی رقموں میں ر کی مقدار = $\sqrt{ر_{لا}^2 + ر_{ما}^2}$

اور ر کی سمت یعنے زاویہ طہ $= \text{مس}^{-1} \dfrac{\text{رما}}{\text{رلا}}$

رلا اور رما کی علامت کے لحاظ سے جانب کا مفہوم دریافت ہوتا ہے ۔

اسراع بھی ایک سمتی مقدار ہے اور اس کی تعریف وقت کے لحاظ سے رفتار کی شرح تبدیلی ہے ۔ اگر ذرہ خطِ مستقیم میں حرکت کرتا ہے تو رفتار کی صرف مقدار اور جانبِ حرکت (مثبت یا منفی) میں تبدیلی واقع ہوسکتی ہے ۔ ایسی صورت میں

$$\text{اسراع} \quad \text{ا} = \frac{\text{فر ر}}{\text{فر و}} = \frac{\text{فر}^2\,\text{س}}{\text{فر و}^2}$$

اگر حرکت مستوی منحنی میں ہو تو ذرہ کا حاصل مجموعی اسراع اس کے لا، ما کی سمتوں والے اسراعوں $\left(\text{الا} = \dfrac{\text{فر رلا}}{\text{فر و}} \text{ اور } \text{اما} = \dfrac{\text{فر رما}}{\text{فر و}}\right)$ کا سمتی حاصل مجموع ہے جو لا اور ما کی سمتوں میں بلحاظ وقت رفتار ر کی تبدیلی کی شرحیں ہیں ۔ پس حاصل مجموعی اسراع کی مقدار

$$\text{ا} = \sqrt{\text{الا}^2 + \text{اما}^2}$$

اور اس کا زاویہ میلان محور لا کے ساتھ

$$\text{فہ} = \text{مس}^{-1} \frac{\text{اما}}{\text{الا}}$$

واضح ہو کہ اسراع ہمیشہ منحنی مدار کی مقعر سمت میں واقع ہوتا ہے ۔

اسراع کے مماسی اور عمادی اجزاءِ ترکیبی ۔ اکثر ایسے مسائل ہیں جن میں ذرہ مستوی منحنی میں حرکت کرتا ہے اس کے اسراع کو اس کے مدار کے مماس اور عماد کی سمتوں میں تحلیل کرنا مفید ہوتا ہے ۔ چنانچہ اگر ذرہ کی چال ر ہے اور کسی نقطہ پر اس کے مدار کا زاویۂ میلان طہ تو

$$\text{رلا} = \text{ر جم طہ} \qquad \text{اور} \qquad \text{رما} = \text{ر جب طہ}$$

چونکہ ر اور طہ عموماً وقت و کے تفاعل ہوتے ہیں لہذا تفرق کے عمل سے

$$\text{ا}_{\text{لا}} = \frac{\text{فر ر}_{\text{لا}}}{\text{فر و}} = \text{جم طہ}\,\frac{\text{فر ر}}{\text{فر و}} - \text{ر جب طہ}\,\frac{\text{فر طہ}}{\text{فر و}}$$

لیکن $\frac{\text{فر طہ}}{\text{فر و}} = \frac{\text{فر طہ}}{\text{فر س}} \cdot \frac{\text{فر س}}{\text{فر و}}$ اور $\frac{\text{فر طہ}}{\text{فر س}} = \frac{1}{\text{ص}}$ جس میں

ص = نصف قطرِ انحناء۔

[واضح ہو کہ نصف قطرِ انحناء سے اس مماسی دائرہ کا نصف قطر مراد ہے' جو نقطۂ تماس کے پاس منحنی سے قریب ترین انطباق رکھتا ہے۔ اس دائرہ کو دائرۂ انحنا کہتے ہیں اور دائرہ انحناء عموماً منحنی کو نقطہ مذکور پر قطع بھی کرتا ہے۔ لفظ انحناء سے مراد $\frac{1}{\text{ص}}$ ہی ہے۔ اس مسئلہ پر آگے چل کر تفصیل سے بحث کی جائیگی۔ یہاں صرف اتنا بتا دیا جاتا ہے کہ

$$\frac{\dfrac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر لا}^2}}{\left\{1+\left(\dfrac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\text{ص}}$$

اس کا ثبوت ایک دوسرے باب میں دیا جائیگا۔]

$$\frac{\text{فر س}}{\text{فر و}} = \text{ر}\ \text{یعنے ذرّہ کی چال}$$

$$\text{پس}\quad \text{ا}_{\text{لا}} = \text{جم طہ}\,\frac{\text{فر ر}}{\text{فر و}} - \frac{\text{ر}^2}{\text{ص}}\,\text{جب طہ}$$

$$\text{اسی طرح}\quad \text{ا}_{\text{ما}} = \text{جب طہ}\,\frac{\text{فر ر}}{\text{فر و}} + \frac{\text{ر}^2}{\text{ص}}\,\text{جم طہ}$$

$$\text{پس اسراع ا} = \sqrt{\left(\frac{\text{فر ر}}{\text{فر و}}\right)^2 + \left(\frac{\text{ر}^2}{\text{ص}}\right)^2}$$

جس میں $\frac{\text{فر ر}}{\text{فر و}}$ اور $\frac{\text{ر}^2}{\text{ص}}$ اسراع ا کے علی القوائم اجزائے ترکیبی ہیں۔ چونکہ $\frac{\text{فر ر}}{\text{فر و}}$ خطِ مماس کی سمت میں ہے اس لیے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ $\frac{\text{ر}^2}{\text{ص}}$ ذرّہ کے مدار کے علی القوائم ہے۔ پس اس سے واضح ہے کہ اسراع کا مماسی جزوِ ترکیبی بالکلیہ

چال کی تبدیلی کے تابع ہوتا ہے۔ اگر چال بڑھتی جاتی ہے تو مماسی جزو ترکیبی سمتِ حرکت میں مثبت ہے اور اگر چال گھٹتی جاتی ہے تو سمتِ حرکت میں منفی ہے۔

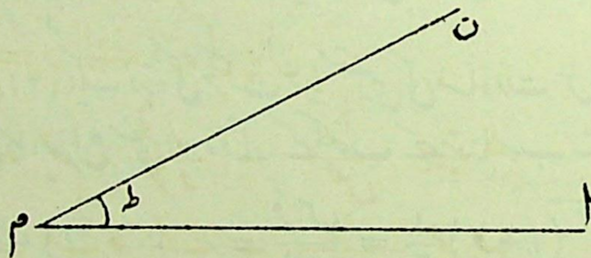
$$\text{اسراع کا مماسی جزوِ ترکیبی} \quad ل_م = \frac{\text{فر ر}}{\text{فر و}} = \frac{\text{فر}^2\text{ س}}{\text{فر و}^2}$$

چال کی تبدیلی کے ساتھ یا تبدیلی بغیر حرکت کی سمت میں جو تبدیلی واقع ہوتی ہے اس سے صرف اسراع کا عمادی جزوِ ترکیبی ($ل_ع$) پیدا ہوتا ہے۔ اس جزو کی سمت مدار کے مقعر جانب ہوتی ہے۔ اس کا ضابطہ

$$ل_ع = \frac{\text{ر}^2}{\text{ص}}$$

جس میں ر = ذرّہ کی چال اور ص = نقطہ زیرِ بحث پر مدار کا نصف قطر انحناء

زاویئی رفتار اور زاویئی اسراع - شکل ۲۶ میں نمیقطر سمتی (radius vector) م ن پر غور کرو جو خط م ا کے ساتھ زاویہ طہ بنا رکھا ہے



شکل ۲۶

اور م مرکز کے گرد مستوی ا م ن میں گھوم رہا ہے۔ اس حرکت میں اگرچہ م ن کے کوئی سے دو نقطوں کی رفتار مساوی نہیں ہے، تاہم م ن کے گھومنے کی شرح سے ان تمام نقطوں کی رفتار معیّن ہو جاتی ہے۔ بدیں وجہ زاویئی رفتار کا تصور پیش کیا گیا۔ خط م ن کی زاویئی رفتار سے مراد وقت کے لحاظ سے زاویہ طہ کی تبدیلی کی

شرح ہے۔ ہم اس کے لیے علامت سہ تجویز کرتے ہیں - پس

$$\text{سہ} = \frac{\text{فر ط}}{\text{فر و}}$$

اسی طریقہ پر زاویئی رفتار کی تبدیلی کی شرح زاویئی اسراع کہلاتی ہے۔ اس کے لیے ہم علامت عہ تجویز کرتے ہیں اور

$$\text{عہ} = \frac{\text{فر سہ}}{\text{فر و}} = \frac{\text{فر}^{۲}\text{ط}}{\text{فر و}^{۲}}$$

مثال (۱) ایک ذرہ خطِ مستقیم میں حرکت کرتا ہے جس کی مساوات $\text{س} = ۱۴۴\text{و} - ۱۶\text{و}^{۲}$ ہے۔ دریافت کرو کہ $\text{و} = ۵$ پر وہ کتنا فاصلہ طے کیا ہوگا، اس کی رفتار کیا ہوگی اور اسراع کیا۔

حل - چونکہ $\text{س} = ۱۴۴\text{و} - ۱۶\text{و}^{۲}$، رفتار $\text{ر} = \frac{\text{فر س}}{\text{فر و}} = ۱۴۴ - ۳۲\text{و}$

اور $\text{و} = ۵$ پر $\text{ر} = ۱۴۴ - ۱۶۰ = -۱۶$ یعنے حرکت کے مخالف جانب

اسراع $\text{ا} = \frac{\text{فر}^{۲}\text{س}}{\text{فر و}^{۲}} = -۳۲$ جو ایک مستقل اور منفی مقدار ہے۔

مثال (۲) ایک ذرہ کی حرکت خطِ مستقیمی کی مساوات $\text{س} = \sqrt{\text{و} + ۱}$ ہے ثابت کرو کہ اس کا اسراع منفی اور رفتار کے مکعب کے متناسب ہے۔

چونکہ $\text{س} = (\text{و} + ۱)^{\frac{۱}{۲}} \quad \therefore \quad \text{ر} = \frac{\text{فر س}}{\text{فر و}} = \frac{۱}{۲}(\text{و} + ۱)^{-\frac{۱}{۲}}$

اور $\text{ا} = \frac{\text{فر}^{۲}\text{س}}{\text{فر و}^{۲}} = -\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}(\text{و}+۱)^{-\frac{۱}{۲}-۱} = -\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۲}(\text{و}+۱)^{-\frac{۳}{۲}}$

$$= -\frac{۱}{۲}\left\{\frac{۱}{۲}(\text{و}+۱)^{-\frac{۱}{۲}}\right\}^{۳} = -\frac{۱}{۲}\,\text{ر}^{۳}$$

مثال (۳) ایک ذرہ منحنی $\text{ما} = \text{جب لا}$ پر سے حرکت کرتا ہے، حرکت کی سمت لا کی مثبت سمت ہے اور ذرہ کی چال ر اکائیاں فی ثانیہ ہے۔ اس کی رفتار کے لا اور ما والے اجزاءِ ترکیبی دریافت کرو اور نیز اس کے اسراع کے مماسی اور عمادی اجزاءِ ترکیبی

محسوب کرو۔

چونکہ ذرہ کی چال ر ہے اس کی رفتار سمت لا میں (یعنے $\text{ر}_{\text{لا}}$) = $\text{ر جم طہ} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرو}}$ اگر اس کی حرکت کے منحنی کے کسی مقام پر حرکت کی سمت محور لا کے ساتھ زاویہ طہ بناتی ہے۔

اس طرح $\text{ر}_{\text{ما}} = \text{ر جب طہ} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرو}}$ اور $\text{مس طہ} = \frac{\text{ر}_{\text{ما}}}{\text{ر}_{\text{لا}}} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$

منحنی کی مساوات ما = جب لا ہے۔

$$\therefore \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{جم لا} \quad \therefore \text{مس طہ} = \text{جم لا}$$

$$\text{چونکہ جم}^2\text{طہ} = \frac{1}{1+\text{مس}^2\text{طہ}} = \frac{1}{1+\text{جم}^2\text{لا}}$$

$$\text{اور جب}^2\text{طہ} = \frac{1}{1+\text{مم}^2\text{طہ}} = \frac{1}{1+\text{قم}^2\text{لا}}$$

$$\text{پس } \frac{\text{فرلا}}{\text{فرو}} = \text{ر}_{\text{لا}} = \text{ر جم طہ} = \frac{\text{ر}}{\sqrt{1+\text{جم}^2\text{لا}}}$$

$$\text{اور } \frac{\text{فرما}}{\text{فرو}} = \text{ر}_{\text{ما}} = \text{ر جب طہ} = \frac{\text{ر}}{\sqrt{1+\text{قم}^2\text{لا}}}$$

مماسی اسراع $\text{ا}_{\text{م}} = \frac{\text{فرر}}{\text{فرو}}$ اور عمادی اسراع $\text{ا}_{\text{ع}} = \frac{\text{ر}^2}{\text{ص}}$ جس میں ص نصف قطر انحنا ہے

ذرہ جس منحنی پر سے گزرتا ہے اس کی مساوات ما = جب لا ہے اور $\text{ص} = \frac{\left\{1+\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2}}$

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{جم لا اور اس لیے } \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} = -\text{جب لا}$$

$$\therefore \text{ص} = \frac{\left\{1+\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{-\text{جب لا}}$$

$$\text{پس ا}_{\text{ع}} = -\frac{\text{ر}^2\text{ جب لا}}{\left(1+\text{جم}^2\text{لا}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

مثالیں

ذیل کی ہر مساوات محور لا پر بوقت و ایک ذرہ کا مقام ظاہر کرتی ہے۔ اس کی رفتار اور اسراع دریافت کرو اور بتاؤ کہ اس حرکت کی کیا خصوصیات ہیں :—

(۱) لا = ۴۰ و − ۸ و^{2}　　جواب　لا = ۴۸

(جبکہ و = ۳)　　ر = −۸

ا = −۱۶

(۲) لا = قو$^{-\text{و}}$ جب π و　　جواب ر = قو$^{-\text{و}}$ (π جم π و − جب π و)

ا = قو$^{-\text{و}}$ [(۱ − π^{2}) جب π و − ۲π جم π و]

(۳) لا = و^{3} + $\frac{1}{\text{و}}$　　جواب ر = ۳ و^{2} − $\frac{1}{2(\text{و})^{3/2}}$

جبکہ و = ۲　　= ۱۲ = $\frac{1}{2\sqrt{2}\,2}$ جبکہ و = ۲

ا = ۶ و + $\frac{3}{4}$ $\frac{1}{(\text{و})^{5/2}}$

= ۱۲ − $\frac{3}{8\sqrt{2}}$ جبکہ و = ۲

(۴) ایک ذرہ منحنی مدار میں حرکت کرتا ہے جس کی مبدّلی مساواتیں (parametric equations)

لا = ر جم ع (و) اور ما = ر جب ع (و) − $\frac{1}{2}$ ج و^{2} ہیں

اس کی رفتار اور اسراع کی مقدار اور ان کی سمتیں دریافت کرو اور بتاؤ کہ مدار کس نوعیت کا منحنی ہے۔

نوٹ ۔ اکثر اوقات سہولت کی خاطر منحنی کے نقطہ کے محدّد لا اور ما ایک تیسرے متغیر یا مبدّل (parameter) کی شکل میں مساواتوں کے ذریعہ دیے جاتے ہیں ۔ یہ مساواتیں مبدّلی کہلاتی ہیں ۔ یہاں اس مثال میں مبدّل وقت و ہے ۔ ملاحظہ ہو باب (۷)

[جواب ر = $\sqrt{\text{ر}^{2} - 2\,\text{ر ج جب ع (و)} + \text{ج}^{2}\text{و}^{2}}$

رفتار کا زاویہ میلان محور لا کے ساتھ

ط = مس$^{-1}$ (مس ع − $\frac{\text{ج و}}{\text{ر جم ع}}$)

ا = −ج، زاویہ میلان اسراع فہ = $\frac{\pi}{2}$] مدار خط مکافی ہے۔

(۵) ایک ذرّہ خطِ ناقص $\frac{\text{لا}^2}{9} + \frac{\text{ما}^2}{16} = 1$ پر سے موافق سمتِ ساعت حرکت کرتا ہے - دریافت کرو کہ کن مقامات پر $\text{ر}_{\text{لا}}$ اور $\text{ر}_{\text{ما}}$ مساوی ہونگے -

[جواب نقطوں ($\text{لا} = +\frac{9}{5}$ ، $\text{ما} = -\frac{16}{5}$) اور ($\text{لا} = -\frac{9}{5}$ ، $\text{ما} = +\frac{16}{5}$) پر]

(۶) ایک ہوائی جہاز افقی خطِ مستقیم میں حرکت کرتا ہے - اگر مبداء سے اس کا فاصلہ و گھنٹوں میں $(\frac{1}{2}\text{و}^4 - 8\text{و}^3 + 20\text{و}^2)$ ہے تو بتاؤ اس کی رفتار $2\text{و}^3 - 24\text{و}^2 + 40\text{و}$ ہے اور اسراع $6\text{و}^2 - 48\text{و} + 40$ ہے اور وہ اپنی سمتِ حرکت بدلنے کے لیے آغازِ پرواز سے ۲ اور ۱۰ گھنٹوں کے بعد ساکن ہو جاتا ہے -

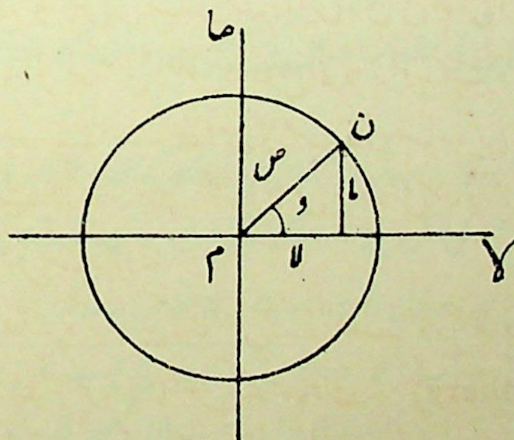
ساتواں باب

مبدّلی اور قطبی مساواتیں۔ علمِ ہندسہ میں ان کا استعمال

۱۔ منحنی کی مبدّلی مساواتیں۔ ڈھلان وغیرہ

اکثر اوقات منحنی کے کسی نقطہ کے محدد لا اور ما بطور ایک تیسرے متغیر یا مبدّل کے تفاعلوں کے ظاہر کیے جاتے ہیں۔ مثلاً بشکل

لا = ف (و) اور ما = فہ (و)



شکل ۲۷

و کی ہر ایک قیمت لا کی ایک قیمت اور ما کی قیمت دیتی ہے اور اس سے منحنی کے

ایک نقطہ کی تعیین ہو جاتی ہے۔ یہ مساواتیں منحنی کی مبدّلی مساواتیں کہلاتی ہیں۔ اگر ان مساواتوں میں سے و کو ساقط کردیا جائے تو منحنی کی مستطیلی (rectangular) مساوات حاصل ہوتی ہے۔ بطور مثال

لا = ص جم و اور ما = جب و دائرہ کی مبدّلی مساواتیں ہیں (دیکھو شکل ۲۷) جن میں و مبدّل ہے۔ کیونکہ اگر ان کے مربعوں کو جمع کیا جائے تو و ساقط ہو جاتا ہے اور

$$\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ص}^2 (\text{جم}^2 \text{و} + \text{جب}^2 \text{و}) = \text{ص}^2$$

جو دائرہ کی مستطیلی مساوات ہے۔ واضح ہے کہ اگر و کی قیمت صفر سے ۲ ۳ تک بدلے تو نقطہ ن (یعنے لا، ما) دائرہ کا مکمل محیط مرتسم کرتا ہے۔

چونکہ ما تفاعل ہے و کا اور و تفاعل (مقلوب) ہے لا کا پس

$$\frac{\text{فر لا}}{\text{فر و}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر و}} \cdot \frac{\text{فر و}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر و}} \cdot \frac{1}{\frac{\text{فر لا}}{\text{فر و}}}$$

یعنے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\frac{\text{فر ما}}{\text{فر و}}}{\frac{\text{فر لا}}{\text{فر و}}} = \frac{\text{فہ (و)}}{\text{ف (و)}} =$ منحنی کا ڈھلان نقطہ ن (لا، ما) پر

اس ضابطہ سے ایسے منحنی کا جس کی مبدّلی مساواتیں دی گئی ہوں ڈھلان معلوم کرلیا جاسکتا ہے۔

مثال (۱) اگر فہ کسی ناقص کا خارج المرکز زاویہ ہے تو (ا) بتاؤ کہ ما = ا جم فہ اور لا = ب جب فہ اس کی مبدّلی مساواتیں ہیں۔ (ب) اس ناقص کے ایسے نقطہ پر جس کے لیے فہ = ۴۵° خطوطِ مماس و عماد کی مساواتیں دریافت کرو اور اس کے زیر مماس اور زیر عماد کے طول معلوم کرو۔

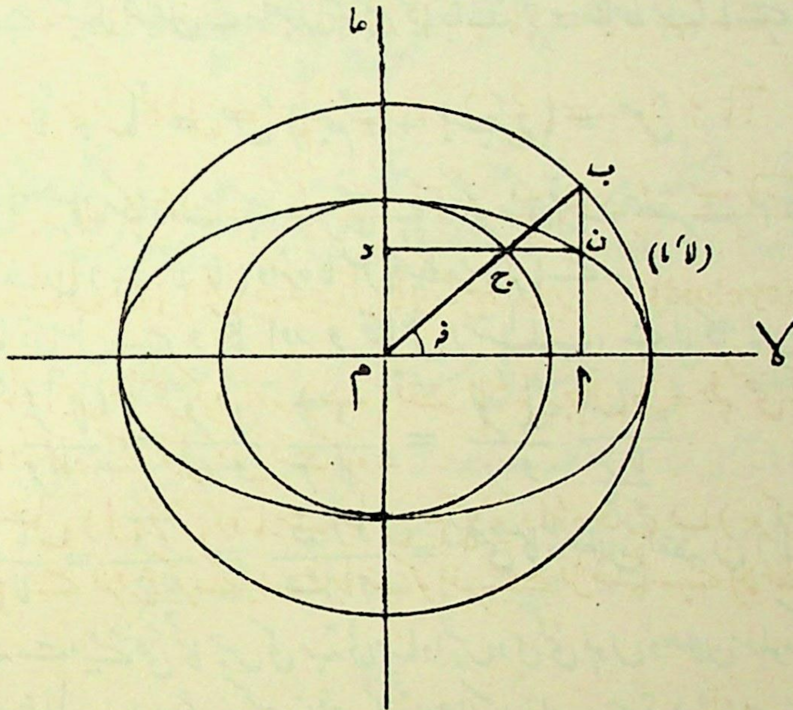
حل (ا) م کو مرکز مان کر ناقص کے نصف محورِ اعظم و نصف محورِ اقل ا اور ب نصف قطر کے دائرے کھینچو۔ یہ ناقص کے معاون (auxiliary) دائرے ہونگے۔ (دیکھو شکل ۲۸)۔ ایک ہی نصف قطر م ج ب کے نقطوں ب اور ج میں سے علی الترتیب ب ن ۲ اور د ج ن خطوط م ما اور م لا کے متوازی کھینچو۔ ان کے تقاطع کا نقطہ ن ناقص پر واقع ہوگا۔ اس کے محدد لا، ما فرض کرو۔

چونکہ لا = م ۲ = م ب جم فہ = ا جم فہ

اور ما = ا ن = م د = م ج جب فہ

= ب جب فہ

اس لیے $\frac{\text{لا}}{\text{ا}}$ = جم فہ اور $\frac{\text{ما}}{\text{ب}}$ = جب فہ



شکل ۲۸

پس $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ جو ناقص کی مستطیلی مساوات ہے ۔

(فہ = ناقص کا خارج المرکزی زاویہ نقطہ ن پر) ۔

(ب) چونکہ منحنی کی مبدّلی مساواتوں میں فہ مبدّل ہے

$\frac{\text{فر لا}}{\text{فر فہ}}$ = ۔ ا جب فہ اور $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر فہ}}$ = ب جم فہ

پس $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ = ۔ $\frac{\text{ب جم فہ}}{\text{ا جب فہ}}$ = ۔ $\frac{\text{ب}}{\text{ا}}$ مم فہ = منحنی کا ڈھلان اس کے کسی نقطہ پر = م اگر فہ = ۴۵° تو اس سے متعلق نقطہ تماس کے لیے

لا$_1$ = $\frac{1}{2}$ ل $\sqrt{2}$ اور ما$_1$ = $\frac{1}{2}$ ب $\sqrt{2}$

اور منحنی کا ڈھلان م = $-$ ب/ل

پس خطِ مماس کی مساوات ب لا + ل ما = $\sqrt{2}$ ل ب ہے

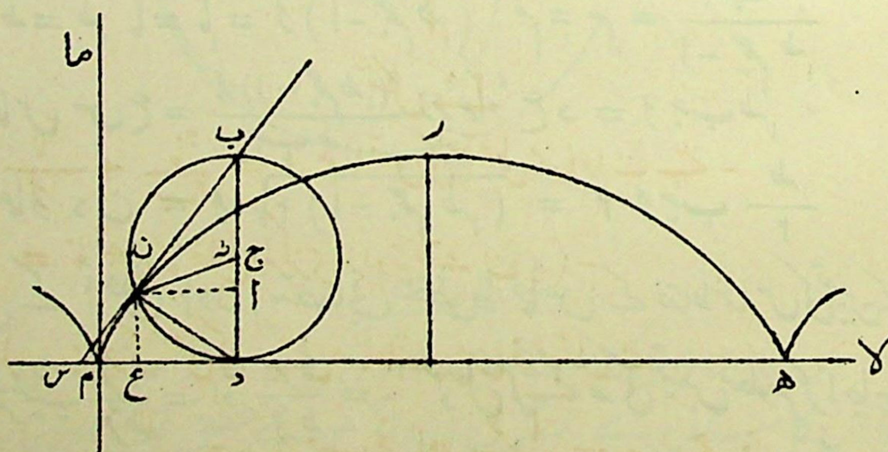
اور عماد کی مساوات $\sqrt{2}$ (ل لا $-$ ب ما) = ل^2 $-$ ب^2 ہے

اس طرح زیرِ مماس کا طول = $\frac{1}{2}$ ب $\sqrt{2}$ ($-$ ل/ب) = $-$ $\frac{1}{2}$ ل $\sqrt{2}$

اور زیرِ عماد کا طول = $\frac{1}{2}$ ب $\sqrt{2}$ ($-$ ب/ل) = $-$ $\frac{1}{2}$ ب^2 $\sqrt{2}$ / ل

مثال (۲) (ا) طہ کو مبدّل مان کر خطِ تدویر (cycloid) کی مبدّلی مساواتیں حاصل کرو اور (ب) نقطہ لا$_1$، ما$_1$ پر جہاں طہ = طہ$_1$ منحنی کے زیرِ مماس زیرِ عماد اور عماد کے طول دریافت کرو۔

حل (ا) فرض کرو ثابت اساس م لا پر دائرہ د ن ب (مرکز ج) مبداء م سے شروع کرکے سیدھے جانب کو بغیر پھسلے لڑھکتا ہے (ملاحظہ ہو شکل ۲۹)



شکل ۲۹

اس حرکت میں اِس کے محیط کا کوئی نقطہ ن جو منحنی مرتسم کرتا ہے خطِ تدویر کہلاتا ہے۔

جب دائرہ لڑھکتے ہوئے محولہ بالا شکل کی وضع میں پہنچتا ہے تو اس کا نقطہ د اساس کو چھوتا ہے۔ اور دائرہ کی قوس د ن کا طول اساس کے جزو م د کے مساوی ہے۔ اگر زاویہ د ج ن = طہ اور دائرہ کا نصف قطر = ا تو

لا = م ع = م د - ع د = ا طہ - ا جب طہ = ا (طہ - جب طہ)

اور ما = ن ع = د ج - ا ج = ا - ا جم طہ = ا (ا - جم طہ)

خطِ تدویر کی یہ مبدّلی مساواتیں ہیں۔ اور طہ دائرہ کے لڑھکنے کا زاویہ طہ مبدّل ہے۔ م ہ = ۲ π ا خطِ تدویر کی ایک کمان کا اساس کہلاتا ہے۔ اور ر اس کا راس۔ طہ کو ساقط کرنے سے مستطیلی مساوات

لا = ا قوس جم ((ا - ما) / ا) - √(۲ ا ما - ما^2)

(ب) منحنی کی مبدّلی مساواتوں کو بلحاظ طہ تفرق کرنے سے

فرلا / فرطہ = ا (ا - جم طہ) اور فرما / فرطہ = ا جب طہ

پس فرما / فرلا = جب طہ / (ا - جم طہ) = م = منحنی کا ڈھلان اس کے کسی بھی نقطہ پر

جبکہ طہ = طہ$_1$، ما = ما$_1$ = ا (ا - جم طہ$_1$)، م = م$_1$ = جب طہ$_1$ / (ا - جم طہ$_1$)

زیر مماس س ع = ا (ا - جم طہ$_1$)^2 / جب طہ$_1$ زیر عماد، ع د = ا جب طہ$_1$

اور عماد د ن = ا √(۲ (ا - جم طہ$_1$)) = ۲ ا جب (طہ$_1$ / ۲)

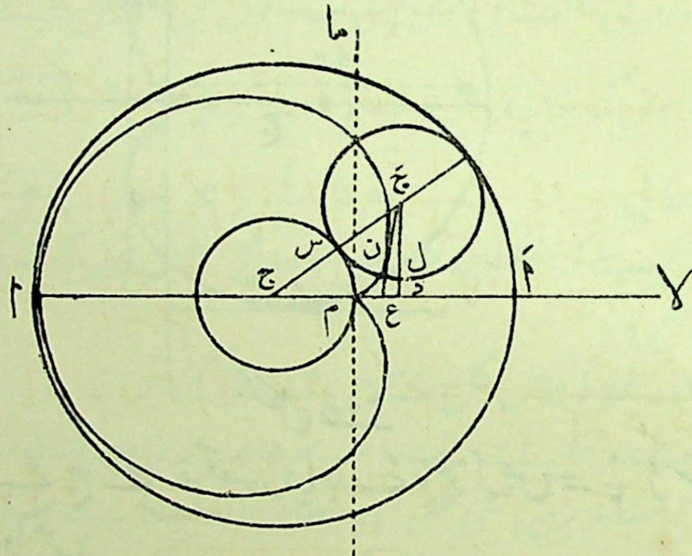
منحنی کے اُفقی اور انتصابی خطوط مماس کے نقاطِ تماس کی تعیین کے لیے علی الترتیب فرما / فرطہ = ۰ اور فرلا / فرطہ = ۰ کو حل کرکے طہ کی قیمتیں معلوم کرنا چاہیے۔

مثال (۳) خطِ صنوبری (cardioid) کے قرن (cusp) کو مبدا مان کر اس کے وسطی نقطہ میں سے گزرنے والے خطِ مستقیم کو اگر محور لا مانیں اور اس کے علی القوائم خط کو محور ما (دیکھو شکل نمبر ۳۰) تو منحنی کی مبدّلی مساواتیں

$$\left.\begin{array}{r} \text{لا} = \text{ا جم طہ} - \frac{1}{2}\ \text{ا جم ۲ طہ} - \frac{1}{2}\ \text{ا} \\ \text{اور} \quad \text{ما} = \text{ا جب طہ} - \frac{1}{2}\ \text{ا جب ۲ طہ} \end{array}\right\}$$

لکھی جا سکتی ہیں، جن میں طہ مبدّل ہے۔ منحنی کے افقی و انتصابی مماسوں کے نقاطِ تماس دریافت کرو۔

منحنی ا م ن خطِ صنوبری ہے یہ ایک برتدویر (epicycloid) ہے جس کو جَ مرکز والے دائرہ کے محیط کا نقطہ ن مرتسم کرتا ہے جبکہ یہ دائرہ مساوی نصف قطر اور ج مرکز والے دائرہ کے محیط پر سے بغیر پھسلے لڑھکتا ہے۔



شکل ۳۰

ص ان دائروں کا نصف قطر ہے اور جَ ج م = زاویہ طہ دی ہوئی مساواتوں کا مبدّل ہے - اگر ن ابتداءً م سے منطبق تھا تو اوپر والے دائرہ کے لڑھکنے سے قوس س نِ = قوس س م اور چونکہ دونوں دائرے مساوی ہیں اس لیے زاویہ س جَ ن = زاویہ س ج م = طہ

ص اور طہ کی رقموں میں خطِ صنوبری کے نقطہ ن کے محدد بآسانی معلوم

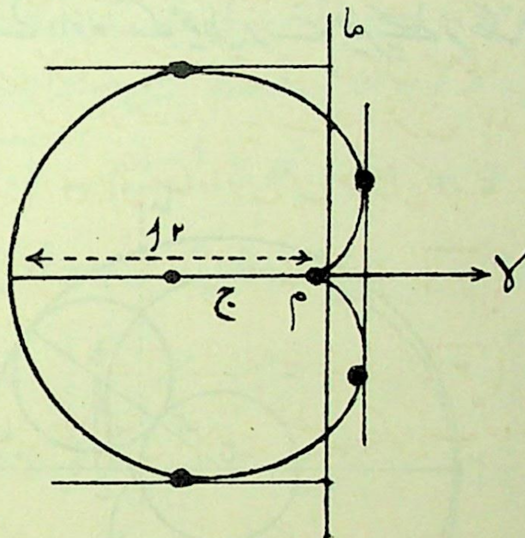
کرلیے جاسکتے ہیں۔ چنانچہ جؔ سے اگر محور لا پر عمود جؔ ل د گرایا جائے اور ن سے عمود ن ع اور ن ل (دیکھو شکل ۳۱) تو ج کو مبداء مان کر

لا = ج ع = جؔ د - ع د = ۲ ص جم طہ - ن ل

لیکن ن ل = ن جؔ جب ∠ ن جؔ ل = ص جم ۲ طہ

∴ لا = ۲ ص جم طہ - ص جم ۲ طہ

اور ما = ن ع = جؔ د - جؔ ل = ۲ ص جب طہ - ص جب ۲ طہ



شکل ۳۱

اگر مبداء بجائے ج کے م تصور کیا جائے تو چونکہ ص = $\frac{1}{2}$ ا خطِ صنوبری کی مبدّلی مساواتیں

لا = ا جم طہ - $\frac{1}{2}$ ا جم ۲ طہ - $\frac{1}{2}$ ا
اور ما = ا جب طہ - $\frac{1}{2}$ ا جب ۲ طہ
} ہوجاتی ہیں] -

حل　$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرطہ}}$ = ا (-جب طہ + جب ۲ طہ) اور $\frac{\text{فرما}}{\text{فرطہ}}$ = ا (جم طہ - جم ۲ طہ)

افقی مماسوں کی تعیین کے لیے $\frac{\text{فرما}}{\text{فرطہ}}$ = ۰ . اس لیے جم طہ = جم ۲ طہ
= ۲ جم^2 طہ - ۱

∴ ۲ جم^2 طہ - جم طہ - ۱ = ۰

اس دو درجی مساوات کو حل کرنے سے جم ط = ۱ یا ‎-$\frac{1}{2}$‎ ∴ ط = ۰ یا ‎۱۲۰°‎ یا ‎۲۴۰°‎

انتصابی مماسوں کی تعیین کے لیے $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرط}}$ = ۰ اس لیے ‎-جب ط + جب ۲ ط = ۰

∴ ۲ جب ط جم ط ‎-‎ جب ط = ۰ پس جب ط = ۰ اور جم ط = $\frac{1}{2}$

∴ ط = ۰ یا ‎۶۰°‎ یا ‎۳۰۰°‎

واضح ہو کہ مشترک اصل (root) ط = ۰ کو مسترد کر دینا چاہیے۔ اس لیے کہ ایسی صورت میں $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کے شمار کنندہ اور نسب نما دونوں صفر ہو جاتے ہیں اس لیے منحنی کا ڈھلان غیر معیّن ہو جاتا ہے۔ منحنی کی دی ہوئی مبدّلی مساوات سے ظاہر ہے کہ لا = ما = ۰ جبکہ ط = ۰ یہ نقطہ م قرن کہلاتا ہے۔

ط کی دوسری قیمتیں دی ہوئی مساواتوں میں تعویض کرنے سے

افقی مماسوں کے نقاطِ تماس = (‎-$\frac{3}{4}$‎ ا ، ± $\frac{3}{4}$ ا $\sqrt{3}$)

اور انتصابی = ($\frac{1}{4}$ ا ، ± $\frac{1}{4}$ ا $\sqrt{3}$)

شکل سے واضح ہے کہ انتصابی مماس باہمدیگر منطبق ہو کر ایک "دوہرا خط مماس" پیدا کرتے ہیں۔

یہ تمام خطوطِ مماس شکل ۳۲ میں بتائے گئے ہیں۔

نوٹ۔ شکل ۳۱ کے مطالعہ سے طالب علم بہایت آسانی کے ساتھ معلوم کر سکتا ہے کہ خطِ صنوبری آتشی منحنی (caustic curve) ہے جبکہ مبداء نور ۱ پر واقع ہوتا ہے اور شعاعیں ۲ ا قطر والے دائرہ کے محیط پر سے منعکس ہوتی ہیں۔

مثالیں

مندرجۂ ذیل منحنیوں کے مصرحہ نقطوں پر کے خطوط مماس و عماد کی مساواتیں لکھو اور ان کے زیر مماس اور زیر عماد کے طول دریافت کرو:۔

(۱) لا = جب و
ما = جم ۲ و　نقطہ و = $\frac{۳}{۶}$ پر

جواب: مماس کی مساوات ۴ لا + ۲ ما - ۳ = ۰
عماد ...... ۴ ما - ۲ لا - ۱ = ۰
زیر مماس کا طول = - $\frac{۱}{۴}$
زیر عماد ...... = - ۱

(۲) لا = جم و
ما = جب ۲ و　نقطہ و = $\frac{۳}{۴}$ پر

(۳) لا = و^۳
ما = و^۲　نقطہ و = -۱ پر

(۴) ثابت کرو کہ
منحنی { لا = ۲ + ۵ جم طہ ، ما = ۳ + ۵ جب طہ } کے افقی مماسوں کے نقاطِ تماس (۲، -۲) اور (۲، ۸) ہیں۔
اور انتصابی مماسوں کے ...... (-۳، ۳) اور (۷، ۳) ہیں۔

ذیل کے منحنی مرتسم کرو اور ان کے افقی و انتصابی مماسی خطوط کے نقاطِ تماس دریافت کرو:-

(۵) لا = ۴ جب طہ
ما = ۲ (۱ - جم طہ)

(۶) لا = $\frac{۲ و^۲ - ۱}{و^۴}$
ما = $\frac{۱}{و}$

(۷) لا = جم^۴ و
ما = جب^۴ و

ذیل کے منحنیوں کے کسی بھی نقطہ پر کے (ا) زیر مماس، (ب) زیر عماد (ج) مماس، (د) عماد کے طول دریافت کرو:-

(۸) لا = ا (جم و + و جب و)
ما = ا (جب و - و جم و)

جواب: (ا) ما م و، (ب) ما مس و، (ج) $\frac{ما}{جب و}$، (د) $\frac{ما}{جم و}$

(۹) درمدویر (hypocycloid)
لا = ۴ ا جم^۳ و
ما = ۴ ا جب^۳ و

جواب: (ا) - ما م و، (ب) - ما مس و، (ج) $\frac{ما}{جب و}$، (د) $\frac{ما}{جم و}$

(۱۰) پتا منحنی (folium)

$$\left\{\begin{array}{l} \text{لا} = \dfrac{\text{۳ و}}{\text{۱ + و}^{۳}} \\ \text{ما} = \dfrac{\text{۳ و}^{۲}}{\text{۱ + و}^{۳}} \end{array}\right.$$

(۱۱) زائدی لولبی (Hyperbolic spiral)

$$\left\{\begin{array}{l} \text{لا} = \dfrac{\text{ل}}{\text{و}} \text{ جم و} \\ \text{ما} = \dfrac{\text{ل}}{\text{و}} \text{ جب و} \end{array}\right.$$

۲ ـ مبدلی مساواتیں ۔ دوسرے مشتق کی تعیین ۔

ف۱ کے شروع میں بتایا گیا تھا کہ

$$\text{مَا} = \frac{\text{فز ما}}{\text{فز لا}} = \frac{\frac{\text{فز ما}}{\text{فز و}}}{\frac{\text{فز لا}}{\text{فز و}}} = \text{نقطہ ن یعنے (لا، ما) پر منحنی کا ڈھلان ۔}$$

اس کو ضابطہ (۲) کہو ۔

واضح ہے کہ $\frac{\text{فز ما}}{\text{فز لا}}$ جو ما کا بلحاظ لا پہلا مشتق ہے ضابطہ (۲) سے و کا تفاعل ہے
پس اگر مَا = ھ (و) لکھیں تو اسی ضابطہ سے بجائے ما کے مَا لکھنے سے

$$\text{مً} = \frac{\text{فز مَا}}{\text{فز لا}} = \frac{\frac{\text{فز مَا}}{\text{فز و}}}{\frac{\text{فز لا}}{\text{فز و}}} = \frac{\text{ھَ (و)}}{\text{فَ (و)}} \ldots\ldots\ \text{ضابطہ (ب)}$$

اگر جیسا کہ ف۱ کے شروع میں لکھا گیا تھا لا = ف (و)

توضیحی مثال ۔ خطِ تدویر

$$\left\{\begin{array}{l} \text{لا} = \text{ل (ط ۔ جب ط)} \\ \text{ما} = \text{ل (۱ ۔ جم ط)} \end{array}\right.$$ کے لیے

مً یعنے $\frac{\text{فز}^{۲}\text{ ما}}{\text{فز و}^{۲}}$ دریافت کرو ۔

حل ۔ا۔ کی توضیحی مثال میں ہم نے دریافت کیا تھا کہ $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{جب طہ}}{\text{ا۔ جم طہ}}$

اور $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر طہ}} = \text{ا (ا ۔ جم طہ)}$ ۔

تفرق کرنے سے $\frac{\text{فر ماَ}}{\text{فر طہ}} = \frac{\text{(ا۔ جم طہ) جم طہ ۔ جب}^{2}\text{ طہ}}{\text{(ا ۔ جم طہ)}^{2}} = \frac{\text{جم طہ ۔ ا}}{\text{(ا ۔ جم طہ)}^{2}}$

$= - \frac{\text{ا}}{\text{(ا ۔ جم طہ)}}$

ضابطہ (ب) سے $\text{ماً} = \frac{\text{فر}^{2}\text{ ما}}{\text{فر لا}^{2}} = \frac{\frac{\text{فر ماَ}}{\text{فر و}}}{\frac{\text{فر لا}}{\text{فر و}}} = \frac{-\frac{\text{ا}}{\text{(ا ۔ جم طہ)}}}{\text{ا (ا ۔ جم طہ)}} = - \frac{\text{ا}}{\text{ا (ا ۔ جم طہ)}^{2}}$

چونکہ ماً منفی ہے، منحنی نیچے کی طرف مقعر ہے جیسا کہ شکل نمبر ۳۰ سے ظاہر ہے۔

مثالیں

(ا) ذیل کے سوالوں میں $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ اور $\frac{\text{فر}^{2}\text{ ما}}{\text{فر لا}^{2}}$ کو مبدّل و کی رقموں میں دریافت کرو:۔

(ا) لا = ا جم و، ما = ب جب و

(ب) لا = ۲ (ا۔جب و)، ما = ۴ جم و

(ج) لا = جب و، ما = جب ۲ و

(د) لا = جم ۲ و، ما = جب و

(۲) ثابت کرو کہ منحنی لا = قط طہ، ما = مس طہ کا کوئی نقطہ عطف نہیں ہے۔

(۳) منحنی لا = ۲ ا مم طہ، ما = ۲ ا جب^{2} طہ کی ترسیم کھینچو اور بتاؤ کہ اس کا نقطۂ اعظم (۰، ۲ ا) ہے اور نقاطِ عطف $\left(\pm \frac{\text{۲ ا}}{\text{۳}\sqrt{\text{۳}}}، \frac{\text{۳ ا}}{\text{۲}}\right)$ ہیں

(۴) منحنی لا = مس و، ا = جب و جم و کو مرتسم کرو اور بتاؤ کہ اس کا نقطۂ اعظم (۱، ۱/۲) ہے نقطۂ اقل (-۱، -۱/۲) اور نقاطِ عطف (-√۳، -√۳/۴) (۰، ۰) اور (√۳، √۳/۴)

(۵) بر تدویر (epicycloid)
لا = ۳ ا جم طہ - ا جم ۳ طہ
ا = ۳ ا جب طہ - ا جب ۳ طہ

کو مرتسم کرو (جس میں ا نصف قطر والا دائرہ بغیر پھسلے ۲ ا نصف قطر والے دائرہ کے محیط پر لڑھکتا ہے اور مساواتیں بڑے دائرہ کے مرکز کو مبداء مان کر حاصل کی گئی ہیں) اور فر ا / فر لا اور فر۲ ا / فر لا۲ کو مبدّل طہ کی رقموں میں دریافت کرو۔

[نوٹ ۔ ترسیم کے مطالعہ سے طالب علم آسانی معلوم کرلیگا کہ یہ بر تدویر آتشی منحنی ہے جبکہ ۴ ا نصف قطر والے دائرہ کے محیط پر سے متوازی شعاعیں منعطف ہوتی ہیں۔]

۳ ۔ منحنی کی قطبی مساوات ۔ نیم قطر سمتی اور خطِ مماس کا درمیانی زاویہ ۔

فرض کرو کہ قطبی محدّدوں میں منحنی کی مساوات ر = ف (طہ) ہے

ہم ثابت کرینگے کہ مس پہ = ر / رَ .... (۱)

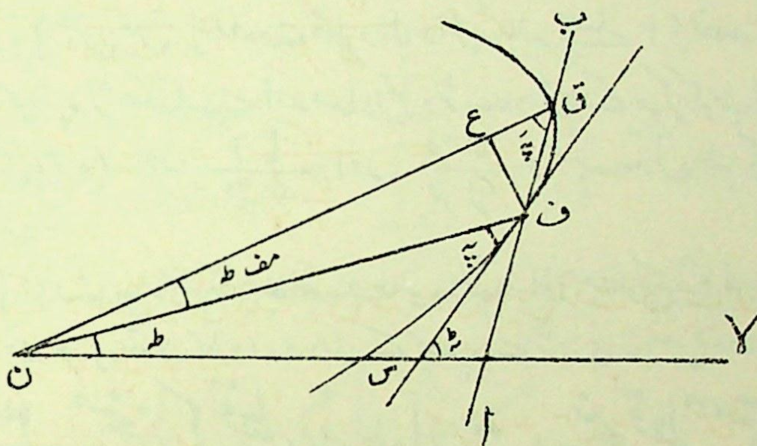
جس میں رَ = فر ر / فر طہ

شکل ۳۲ میں ن ف منحنی ف ق کا مبداء ن سے کھینچا ہوا نیم قطر سمتی ہے۔ ف کے قطبی محدّد ر اور طہ ہیں۔ ق منحنی پر ف کے قریب ہی کا ایک نقطہ ہے اور اس کے قطبی محدّد ر + مف ر اور طہ + مف طہ ہیں۔ ف ق میں سے خطِ قاطع ا ب کھینچو اور ف ع نیم قطر سمتی ن ق پر عمود گراؤ۔
تب زاویہ ف ن ق = مف طہ، ف ع = ر جب مف طہ

اور ن ع = ر جم مف ط

$$\text{معہذا مس ف ق ع} = \text{مس پہ} = \frac{\text{ف ع}}{\text{ع ق}}$$

$$= \frac{\text{ف ع}}{\text{ن ق} - \text{ن ع}} = \frac{\text{ر جب مف ط}}{\text{ر} + \text{مف ر} - \text{ر جم مف ط}}$$



شکل ۳۲

نیم قطر سمتی ن ف اور ف پر کے خطِ مماس منحنی ف س کا درمیانی زاویہ پہ ہے۔ اگر اب زاویہ مف ط گھٹتے گھٹتے بطور انتہا صفر ہو جائے تو نقطہ ق بالآخر ف کو پہنچ جائیگا۔ قاطع ا ب نقطہ ف کے گرد گھوم کر بالآخر اپنی انتہائی وضع میں خطِ مماس ف س سے مل جائیگا۔ اور زاویہ ف ق ع = پہ بطور انتہا پہ ہو جائیگا۔

$$\text{پس مس پہ} = \text{نہا}_{\text{مف ط} \to ۰} \frac{\text{ر جب مف ط}}{\text{ر} + \text{مف ر} - \text{ر جم مف ط}}$$

$$= \text{نہا}_{\text{مف ط} \to ۰} \frac{\text{ر جب مف ط}}{\text{ر}(۱ - \text{جم مف ط}) + \text{مف ر}} = \text{نہا}_{\text{مف ط} \to ۰} \frac{\text{ر جب مف ط}}{۲\,\text{ر جب}^{۲}\frac{\text{مف ط}}{۲} + \text{مف ر}}$$

$$= \text{نہا}_{\text{مف طہ} \to \cdot} \frac{\text{ر} \dfrac{\text{جب مف طہ}}{\text{مف طہ}}}{\text{ر جب } \dfrac{\text{مف طہ}}{2} \cdot \dfrac{\text{جب} \frac{\text{مف طہ}}{2}}{\frac{\text{مف طہ}}{2}}}$$

بحالیکہ مف طہ ← ۰ ۔ نہا $\frac{\text{جب مف طہ}}{\text{مف طہ}} = 1$ اور نہا $\frac{\text{جب}\frac{\text{مف طہ}}{2}}{\frac{\text{مف طہ}}{2}} = 1$ مہذا جب $\frac{\text{مف طہ}}{2} = \cdot$

$$\text{اور نہا } \frac{\text{مف ر}}{\text{مف طہ}} = \frac{\text{فر ر}}{\text{فر طہ}} = \text{ر}'$$

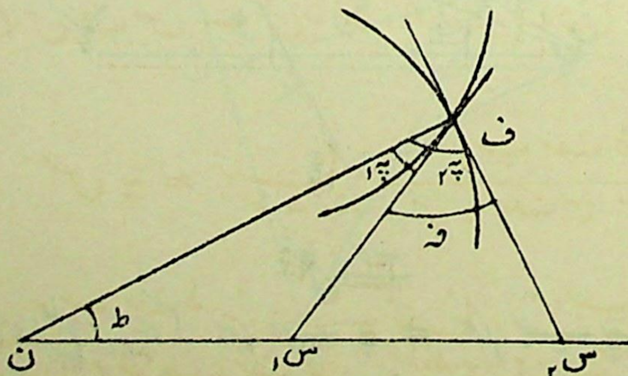
$$\therefore \text{مس پہ} = \frac{\text{ر}}{\frac{\text{فر ر}}{\text{فر طہ}}} = \frac{\text{ر}}{\text{ر}'}$$

منحنی کے ڈھلان کی قیمت قطبی محددوں میں مثلث ن ف س میں ہم دیکھتے ہیں کہ ڈ = طہ + پہ

$$\therefore \text{مس ڈ} = \text{مس (طہ + پہ)} = \frac{\text{مس طہ + مس پہ}}{1 - \text{مس طہ مس پہ}} = \frac{\text{مس طہ} + \frac{\text{ر}}{\text{ر}'}}{1 - \text{مس} \frac{\text{ر}}{\text{ر}'}}$$

۷۷ ۔ دو منحنیوں کا زاویۂ تقاطع جبکہ ان کی مساواتیں قطبی محددوں میں دی گئی ہوں

شکل ۳۳ میں فرض کرو کہ منحنیاں نقطہ ف پر متقاطع ہیں جہاں ان کے اور نیم قطر سمتی کے مابین زاویہ علی الترتیب پہ_1 اور پہ_2 ہے۔



شکل ۳۳

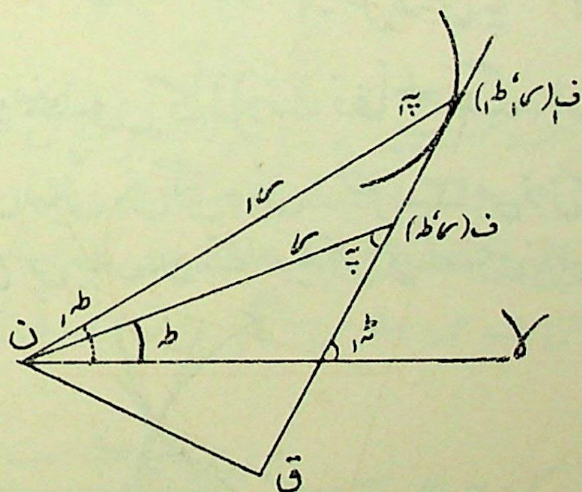
اور اس لیے نقطہ مذکور پر ان منحنیوں کا درمیانی زاویہ فہ = پہ۲ - پہ۱

چونکہ مس فہ = مس (پہ۲ - پہ۱) = $\frac{\text{مس پہ۲} - \text{مس پہ۱}}{۱ + \text{مس پہ۲ مس پہ۱}}$

اور مس پہ۱ = $\frac{\text{ر}}{\text{ر}'_۱}$ اور مس پہ۲ = $\frac{\text{ر}}{\text{ر}'_۲}$ اس لیے مس فہ اور فہ فوراً معلوم کر لیے جا سکتے ہیں۔

۵۔ منحنی کے مماسی خط کی قطبی محددوں میں مساوات۔

فرض کرو کہ منحنی کی مساوات ر = ف (طہ) ہے اور اس کے ثابت نقطہ ف۱ پر کا مماسی خط ف۱ ق ہے۔ دیکھو شکل ۳۴۔ اس کی مساوات معلوم کرنے کے لیے مبدا ن میں سے اس پر عمود ن ق گراؤ۔ خطِ مماس کے کسی نقطۂ ف کے محدد ر اور طہ مانو۔



شکل ۳۴

شکل سے واضح ہے کہ ر جب پہ = ر۱ جب پہ۱

اور ثہ۱ = طہ۱ + پہ۱ = طہ + پہ

پس نقطہ ف۱ پر کے مماسی خط کی مساوات

$$\text{ر جب}\left(\text{ط}_1 + \text{پہ}_1 - \text{ط}\right) = \text{ر}_1\ \text{جب پہ}_1 \ \text{ہے}$$

جس میں $\text{ر}_1 = \text{ف}(\text{ط}_1)$ اور $\text{پہ}_1 = \text{مس}^{-1}\dfrac{\text{ر}_1}{\dfrac{\text{فر}_1}{\text{فط}_1}} = \text{مس}^{-1}\dfrac{\text{ر}_1}{\text{ر}'_1}$

۶۔ قطبی زیر مماس اور قطبی زیر عماد کے طول۔

شکل ۳۵ میں نقطہ ف پر ف س خطِ مماس ہے اور ف ع عماد ہے ع ن س مبدا ن میں سے نیمقطر سمتی ن ف کے علی القوائم کھینچا گیا ہے۔

پس ن س = نقطہ ف پر منحنی کے قطبی زیر مماس کا طول

اور ن ع = " " قطبی زیر عماد کا طول

مثلث ن ف س میں $\text{ن س} = \text{ر مس پہ} = \text{ر}^2 \dfrac{\text{فط}}{\text{فر}}$

اور مثلث ن ف ع میں $\text{ن ع} = \dfrac{\text{ر}}{\text{مس پہ}} = \dfrac{\text{فر}}{\text{فط}}$

شکل ۳۵

[نوٹ:- ر کے ساتھ جب طہ بھی بڑھتا ہے تو فرطہ/فرر مثبت ہوتا ہے اور پہ (جیسا کہ شکل ۳۶ میں کھینچا گیا ہے) زاویہ حادّہ ہے۔ ایسی صورت میں زیر مماس ن س مثبت ہے اور مبدا، ن پر سے اگر کوئی مشاہد نیمقطر سمتی ن ف کا مطالعہ کر رہا ہو تو اس کے سیدھے جانب ناپا جاتا ہے۔ جب فرطہ/فرر منفی ہوتا ہے تو زیر مماس منفی ہوتا ہے اور مشاہد کے بائیں جانب ناپا جاتا ہے]

قطبی مماس کا طول یعنے ف س اور قطبی عماد کا طول یعنے ف ع شکل کے مطالعہ سے بآسانی معلوم کرلیے جاتے ہیں اس لیے کہ یہ دونوں قائم الزاویہ مثلثوں کے وتر ہیں۔

توضیحی مثالیں۔

(۱) دائرہ ر = ۲ ا جم طہ کے ایسے نقطہ پر کا ڈھلان دریافت کرو جہاں طہ = π/۳

حل فرر/فرطہ = -۲ ا جب طہ پس مس پہ = ر/(فرر/فرطہ) = ۲ ا جم طہ/(-۲ ا جب طہ)

= - حم طہ

ایسے نقطہ کے لیے جس پر طہ = π/۳ مس پہ = - حم π/۳ = $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

پس ڈھلان = مس ٹہ = $\frac{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \sqrt{3}\,\frac{1}{\sqrt{3}}}$ = $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

(۲) ثابت کرو کہ خطِ مستقیم ر جب طہ = ۲ ا اور خطِ مکافی ر = ا قط² طہ/۲ زاویہ ۴۵° پر باہمدیگر متقاطع ہیں۔

حل۔ شکل ۳۶ میں ا ل ف خطِ مکافی ہے جس کی قطبی مساوات ا قط² طہ/۲ ہے۔

[واضح ہو کہ اس مساوات کے لیے محدّدوں کا مبدا، ماسکہ س ہے اور زاویہ طہ یعنے ا س ف، موافق سمتِ ساعت ناپا جاتا ہے]۔

کتاب کی پہلی جلد صفحہ ۲۳۲ میں مخروطیوں کے لیے عام قطبی مساوات لہ/ر = ۱ + ز جم طہ حاصل کی گئی تھی جس میں لہ = س ل اور ز =

قطبی کا خروج المرکز۔ مکافی کی صورت میں ل = ۲ا اور ز = ۱

پس $\frac{\text{۲ا}}{\text{ر}} = ۱ + \text{جم ط} = ۱ + ۲\,\text{جم}^{۲}\frac{\text{ط}}{۲} - ۱ = ۲\,\text{جم}^{۲}\frac{\text{ط}}{۲}$

$\therefore \text{ر} = \text{ا قط}^{۲}\frac{\text{ط}}{۲}$

شکل ۳۶

خط ل ک دیا ہوا خطِ مستقیم ہے جس کی مساوات ر جب ط = ۲ا ہے
نقطۂ تقاطع پر خطِ مکافی اور خطِ مستقیم دونوں کا نیمقطر سمتی ر مساوی ہے۔

یعنی $\frac{\text{۲ا}}{\text{جب ط}} = \text{ا قط}^{۲}\frac{\text{ط}}{۲} \quad \therefore \text{مس}\frac{\text{ط}}{۲} = ۱$ اور $\text{ط} = \frac{\pi}{۲}$

خطِ مستقیم کے لیے $\text{مس پ}_{۲} = \frac{\text{ر}}{\frac{\text{فز ر}}{\text{فز ط}}} = \frac{\text{ر}}{-\text{ر مم ط}} = -\text{مس ط}$

اور خطِ مکافی کے لیے $\text{مس پ}_{۱} = \frac{\text{ا قط}^{۲}\frac{\text{ط}}{۲}}{\text{ا قط}^{۲}\frac{\text{ط}}{۲}\,\text{مس}\frac{\text{ط}}{۲}} = \text{مم}\frac{\text{ط}}{۲}$

نقطۂ تقاطع پر $\text{مس پ}_{۲} = -\text{مس}\frac{\pi}{۲} \quad \therefore \text{پ}_{۲} = \frac{\pi}{۲}$

$\text{مس پ}_{۱} = \text{مم}\frac{\text{ط}}{۲} \quad \therefore \text{پ}_{۱} = \frac{\pi}{۴}$

پس نقطۂ تقاطع پر زاویہ $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

(۳) لوکارتمی ولبی ر = ا^ط جس میں ا صفر سے بڑا ہے کے زیر مماس اور زیر عماد کے طول دریافت کرو -

حل - زیر مماس کا طول = $\frac{ر^2}{\frac{فر ر}{فر ط}}$ اور زیر عماد کا طول = $\frac{فر ر}{فر ط}$

عملِ تفرق کے لیے لوک ر = ط لوک ا

∴ $\frac{فر لوک ر}{فر ر} \cdot \frac{فر ر}{فر ط}$ = لوک ا یعنے $\frac{1}{ر} \cdot \frac{فر ر}{فر ط}$ = لوک ا

∴ $\frac{فر ر}{فر ط}$ = ر لوک ا = زیر عماد کا طول

اور $\frac{ر^2}{\frac{فر ر}{فر ط}} = \frac{ر}{لوک ا}$ = زیر مماس کا طول

مثالیں

(۱) خطِ مکانی ر = ا قط^۲ $\frac{ط}{۲}$ میں ثابت کرو کہ ط + پ = π

(۲) بتاؤ کہ ارشمیدس کے ولبی ر = ا ط میں س پ = ط اور اگر ط = π۲ اور π۴ تو پ کی قیمت علی الترتیب ۸۰° ۵۷' اور ۸۵° ۲۷' ہے -

(۳) ثابت کرو کہ لوکارتمی ولبی ر = و^ا ط میں پ مستقل ہے یعنے خطِ مماس نیمقطر سمتی کے ساتھ مستقل زاویہ بناتا ہے [اسی وجہ سے اس منحنی کو متساوی الزاویہ ولبی بھی کہتے ہیں]

(۴) بتاؤ کہ خطوطِ صنوبری ر = ا (۱ + جب ط) اور ر = ا (۱ - جب ط) ایک دوسرے کو علی القوائم منقطع کرتے ہیں -

(۵) ثابت کرو کہ ر = ا جب ۲ طہ اور ر = ا جم ۲ طہ منحنیوں کے تقاطع کا زاویہ فہ = مس$^{-1}$ $\frac{۴}{۳}$

(۶) مندرجۂ ذیل منحنیوں کے جوڑوں کا زاویۂ تقاطع فہ دریافت کرو:

(ا) ر جم طہ = ۲ ا ، ر = ۵ ا جب طہ [جواب توس مس $\frac{۳}{۴}$]

(ب) ر = ا جب طہ، ر = ا جب ۲ طہ [جواب مبداء پر صفر درجہ اور دو سرے دو نقطوں پر توس مس ۳ $\sqrt{۳}$]

(ج) ر = ۶ جم طہ، ر = ۲ (ا + جم طہ) [جواب °۳۰]

(۷) بتاؤ کہ متکافی لولبی ر طہ = ا کے قطبی زیر مماس کا طول مستقل ہے۔

(۸) ثابت کرو کہ لولبی ر = فِ طہ کے ہر نقطہ پر (ا) مماس کا طول = عماد کا طول اور (ب) زیر مماس کا طول = زیر عماد کا طول۔

(۹) ثابت کرو کہ چشمہ منحنی یا ایسٹرن ر^۲ = ا^۲ جم ۲ طہ کے قطبی زیر عماد کا طول $\frac{ر^۳}{ا^۲ جب ۲ طہ}$ یا ± ا جم ۲ طہ $\sqrt{جم ۲ طہ}$ ہے اور اس کے قطبی زیر عماد کا طول $\frac{ا^۲ جب ۲ طہ}{ر}$ یا ± $\sqrt{ا}$ مس ۲ طہ جب ۲ طہ ہے۔

آٹھواں باب

صغاریے اور تفرّق

۱ صغاریے — احصاء میں ایسے متغیروں سے سابقہ پڑتا ہے جن کی انتہا صفر ہوتی ہے۔ ایسے متغیر صغاریے کہلاتے ہیں۔

[نوٹ۔ واضح ہو کہ ایک مستقل خواہ وہ کتنا ہی چھوٹا کیوں نہ ہو، صغاریہ نہیں ہے۔ صغاریہ کی جو تعریف اوپر لکھی گئی ہے اس میں اس کا بھی شائبہ نہیں ہے کہ صغاریہ کی قیمتیں صرف چھوٹی ہی ہوتی ہیں۔ اگرچہ فی الواقعی صغاریہ کی کوئی خاص قیمتوں پر جب غور کیا جاتا ہے تو یہ قیمتیں صفر کے قریب ہی کی ہوتی ہیں۔]

بطور مثال مف لا اور مف ما صغاریے ہیں جبکہ $\text{نہا}_{\text{مف لا} \to 0} \frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}} = \text{فَ(لا)}$۔

صدر صغاریہ —(Principal Infinitesimal)

دو صغاریے جب ایک دوسرے سے مربوط ہوتے ہیں تو ہم ان میں سے کسی ایک کو **متغیر متبوع** منتخب کر سکتے ہیں۔ جس کو بھی اس طرح متغیر متبوع منتخب کیا جاتا ہے اس کو **صدر صغاریہ** کہتے ہیں۔ چنانچہ تفاوتوں کے حاصل تقسیم (difference-quotient) $\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}$ میں مف لا عموماً صدر صغاریہ تصور کیا جاتا ہے۔

صغاریوں کا اضافہ رتبہ — اگر عہ اور بہ دو صغاریے

ہوں اور نہا $\frac{\text{بہ}}{\text{عہ}}$ = ج تو عہ اور بہ کے اضافہ رتبہ کی اس طرح تعریف کی جاتی ہے :-

(۱) اگر ج = ۰ تو بہ بہ نسبت عہ کے برتر یا بلند تر رتبہ کا صغاریہ ہے۔

(۲) اگر ج ایک محدود مستقل ہے جو صفر سے مختلف ہے تو بہ اور عہ ایک ہی رتبہ کے ہیں۔

(۳) اگر ج نا متناہی ہو تو بہ بہ نسبت عہ کے کمتر یا پست تر رتبہ کا ہے۔

مسئلہ (۱) اگر دو صغاریوں میں تفاوت ان میں سے کسی ایک کے صرف بلند تر رتبہ کا صغاریہ ہے تو ان کی نسبت کی انتہا اکائی ہے۔ یعنے نہا $\frac{\text{بہ}}{\text{عہ}}$ = ۱ بشرطیکہ بہ − عہ = صہ جس میں صہ بمقابل عہ یا بہ کے بلند تر رتبہ کا ہو۔

ثبوت۔ نسبت $\frac{\text{بہ}}{\text{عہ}} = \frac{\text{عہ} + \text{صہ}}{\text{عہ}} = ۱ + \frac{\text{صہ}}{\text{عہ}}$

اور نہا $\frac{\text{بہ}}{\text{عہ}}$ = ۱ + نہا $\frac{\text{صہ}}{\text{عہ}}$

لیکن $\frac{\text{صہ}}{\text{عہ}}$ = ۰ چونکہ بمقابل عہ کے بلند تر رتبہ کا ہے۔ پس

نہا $\frac{\text{بہ}}{\text{عہ}}$ = ۱

اس مسئلہ کا ضد بھی صحیح ہے۔ یعنے اگر دو صغاریوں کی نسبت کی انتہا اکائی ہو تو ان میں تفاوت، ان میں سے کسی ایک سے بلند تر رتبہ کا صغاریہ ہوتا ہے۔

ثبوت۔ اگر یہ مانا جائے کہ نہا $\frac{\text{بہ}}{\text{عہ}}$ = ۱

تب $\frac{\text{بہ}}{\text{عہ}}$ = ۱ + یہ جس میں یہ صغاریہ ہے۔

یعنے بہ = عہ + عہ یہ

پس $\text{بہ} - \text{عہ} = \text{عہ}\ \text{یہ}$

یہاں عہ یہ بمقابل عہ کے بلند تر رتبہ کا صغاریہ ہے اور چونکہ بہ اسی رتبہ کا ہے جو عہ کا ہے" عہ یہ بمقابل بہ کے بلند تر رتبہ کا ہے۔ اس لیے عہ اور بہ میں تفاوت" ان میں سے کسی ایک سے بھی بلند تر رتبہ کا صغاریہ ہے۔

مسئلہ (۲)۔ دو صغاریوں کی نسبت کی انتہا معلوم کرتے وقت ہر ایک صغاریہ کی جگہ ایک دوسرا صغاریہ تعویض کیا جا سکتا ہے جو اس سے بلند تر رتبہ کا تفاوت رکھتا ہے۔ یعنی

$$\text{نہا}\ \frac{\text{بہ}}{\text{عہ}} = \text{نہا}\ \frac{\text{بہَ}}{\text{عہَ}}$$

بشرطیکہ بہ − بہَ = صہ بہ نسبت بہ کے بلند تر رتبہ کا صغاریہ ہے اور عہ − عہَ = یہ بہ نسبت عہ کے بلند تر رتبہ کا صغاریہ ہے۔

$$\text{ثبوت۔ نسبت}\ \frac{\text{بہ}}{\text{عہ}} = \frac{\text{بہَ} + \text{صہ}}{\text{عہَ} + \text{یہ}} = \frac{\text{بہَ}}{\text{عہَ}}\left(\frac{1 + \frac{\text{صہ}}{\text{بہَ}}}{1 + \frac{\text{یہ}}{\text{عہَ}}}\right)$$

$$\text{اور نہا}\ \frac{\text{بہ}}{\text{عہ}} = \text{نہا}\ \frac{\text{بہَ}}{\text{عہَ}}\ \text{نہا}\left(\frac{1 + \frac{\text{صہ}}{\text{بہَ}}}{1 + \frac{\text{یہ}}{\text{عہَ}}}\right)$$

لیکن $\text{نہا}\ \frac{\text{صہ}}{\text{بہَ}} = 0$۔ کیونکہ صہ بہ نسبت بہ کے بلند تر رتبہ کا صغاریہ ہے اور اس لیے بہَ کے بہ نسبت بھی۔ اسی طرح $\text{نہا}\ \frac{\text{یہ}}{\text{عہَ}} = 0$۔

$$\text{پس نہا}\ \frac{\text{بہ}}{\text{عہ}} = \text{نہا}\ \frac{\text{بہَ}}{\text{عہَ}}$$

مثال (۱) صغاریوں $\text{بہ} = 3\,\text{عہ} + 2\,\text{عہ}^2$ اور عہ کا اضافی رتبہ دریافت کرو۔

$$\text{حل:}\ \text{نہا}_{\text{عہ}\to}\left(\frac{3\,\text{عہ} + 2\,\text{عہ}^2}{\text{عہ}}\right) = \text{نہا}_{\text{عہ}\to}\ (3 + 2\,\text{عہ}) = 3$$

پس به اور عه دونوں ایک ہی رتبہ کے صغاریے ہیں۔

مثال (۲)- صغاریوں $\text{به} = \sqrt[4]{\text{عه}^{7} - 4\,\text{عه}^{5}}$ اور عه کا اضافی رتبہ دریافت کرو۔

$$\text{حل: } \lim_{\text{عه}\to 0}\left(\frac{\sqrt[4]{\text{عه}^{7} - 4\,\text{عه}^{5}}}{\text{عه}}\right) = \lim_{\text{عه}\to 0}\sqrt[4]{\frac{\text{عه}^{7} - 4\,\text{عه}^{5}}{\text{عه}^{4}}}$$

$$= \lim_{\text{عه}\to 0}\sqrt[4]{\text{عه}^{3} - 4\,\text{عه}} = 0$$

اس لیے به بہ نسبت عه کے بلند تر رتبہ کا صغاریہ ہے۔

مثال (۳)- بتاؤ کہ طه اور مس طه صغاریے ایک ہی رتبہ کے ہیں۔

$$\text{حل: } \lim_{\text{طه}\to 0}\frac{\text{مس طه}}{\text{طه}} = \left(\lim_{\text{طه}\to 0}\frac{\text{جب طه}}{\text{طه}}\right)\left(\lim_{\text{طه}\to 0}\frac{1}{\text{جم طه}}\right)$$

$$= (1)(1) = 1$$

پس دونو صغاریے ایک ہی رتبہ کے ہیں۔

مثالیں

(۱) صغاریوں $\text{به} = \text{جم}^{2}\,2\,\text{عه} - 1$ اور عه میں بتاؤ کہ به کا بلند تر رتبہ ہے۔

(۲) $\text{به} = \sqrt[3]{3\,\text{عه} + 5\,\text{عه}^{3} + 2\,\text{عه}^{4}}$ اور عه صغاریوں میں ثابت کرو کہ به پست تر رتبہ کا ہے۔

(۳) مندرجۂ ذیل صغاریوں کی جوڑیوں کا اضافی رتبہ دریافت کرو۔

(ا) $\text{به} = \text{جب}^{2}\,\text{عه}$ ، $\text{مس}^{2}\,\text{عه}$ جواب دونوں ایک ہی رتبہ کے ہیں۔

(ب) $\text{به} = 1 - \text{جم عه}$ ، عه جواب به کا رتبہ بلند تر ہے۔

(ج) $\text{ذه} = \text{مس طه} - \text{طه}$ ، طه جواب ذه کا رتبہ بلند تر ہے۔

(د) ما = (۱+ لا√ − ما−۱ − لا√)، لا جواب - دونوں ایک ہی رتبہ کے ہیں -

۲ - صغاریئی اضافہ کا صدر جزو -

جب تفاعل ما = ف (لا) اور اس کا مشتق

نہا (مف لا ← ۰) مف ما / مف لا = فَ (لا) ≠ ۰

دیے جاتے ہیں تو تفاوتوں کے حاصل تقسیم کو اس طرح ظاہر کیا جا سکتا ہے :

مف ما / مف لا = فَ (لا) + صہ

جس میں صہ ← ۰ جبکہ مف لا ← ۰ - اس لیے

مف ما = فَ (لا) مف لا + صہ مف لا

اس لحاظ سے اضافہ مف ما دو صغاریئی رقموں میں تحلیل کیا جاتا ہے، اس طور پر کہ پہلی رقم بہ نسبت دوسری رقم کے کمتر درجہ کا صغاریہ ہے - ان رقموں کا اضافی رتبہ ذیل کی تحریر سے بخوبی واضح ہو جاتا ہے :

نہا (مف لا ← ۰) صہ مف لا / فَ (لا) مف لا = نہا (مف لا ← ۰) صہ / فَ (لا) = ۰

کمتر رتبہ کا ہونے کی وجہ سے، فَ (لا) مف لا بلحاظ صہ مف لا کے بہت بڑا ہے، بشرطیکہ فَ (لا) ≠ ۰ اور مف لا کافی چھوٹا ہے - بدیں وجہ وہ ما کے اضافہ کا **صدر جزو** کہلاتا ہے -

۳ - کسی تفاعل کے تفرقہ (Differential) کی تعریف -

تفاعل ما = ف (لا) کا تفرقہ، اس تفاعل کے مشتق اور متبوع متغیر کے اضافہ کا حاصل ضرب ہے -

ما کے تفرقہ کی تعبیر علامت فرما (dy) سے کی جاتی ہے -

پس　　فرما = فَ (لا) مف لا

یعنے (باستثنار اس صورت کے جبکہ فَ (لا) = ۰) تفرقہ تفاعل کے اضافہ کا صدر جز و ہے -

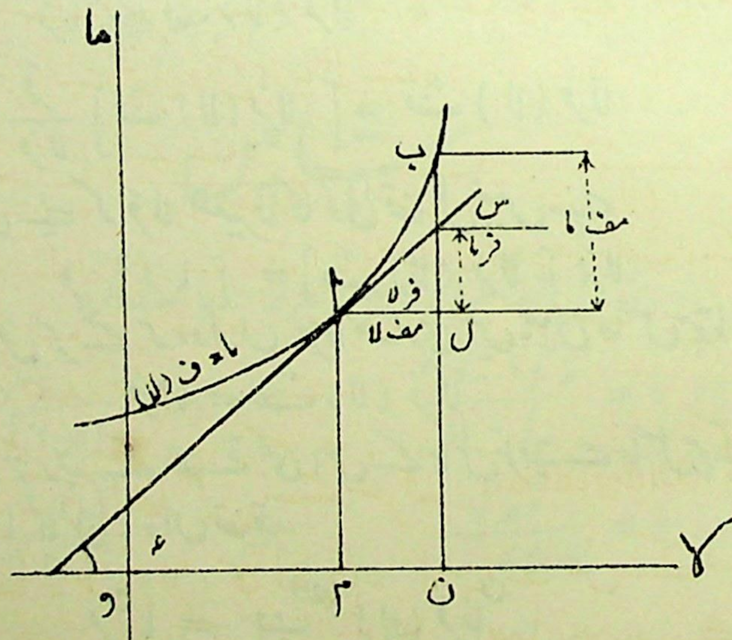
بلحاظ تعریف "متبوع متغیر" کا تفرقہ فرلا = فرلا/فرلا (لا) . مف لا = مف لا

اس لیے ما کے تفرقہ میں مف لا کے بجائے فرلا لکھا جا سکتا ہے یعنے

فرما = فَ (لا) فرلا

۴ - تفرقہ کی ہندسی تعبیر -

شکل ۳۷ میں منحنی ما = ف (لا) پر نقطہ ا کے محدد لا، ما فرض کرو نقطہ ب منحنی پر ا کے قریب کا ایک نقطہ ہے اس کے محدد لا + مف لا، ما + مف ما ہونگے -



شکل ۳۷

خط ا س منحنی کا نقطہ ا پر کا مماسی خط ہے جس کا زاویۂ میلان محور و لا کے ساتھ عہ ہے۔ ا ل محور و لا کے متوازی کھینچا گیا ہے۔
ام = ما اور ب ن = ما + مف ما
ب ن خطِ مماس اس کو نقطۂ س پر منقطع کرتا ہے۔
محدود ب ن کا قطعہ ل س تفرقہ فرما کو تعبیر کرتا ہے۔ کیونکہ
ل س = مس عہ مف لا = فَ (لا) فرلا = فرما
عموماً فرما اور مف ما غیر مساوی ہوتے ہیں بجز اس صورت کے جبکہ منحنی خطِ مستقیم ہو۔

۵۔ متواتر یا بلند تر رتبہ کے تفرقے، فرما = فَ (لا) فرلا کا تفرقہ ما کا دوسرا تفرقہ کہلاتا ہے۔ اور علامت فر۲ ما سے اس کی تعبیر کی جاتی ہے۔ اس کی قیمت اس طرح حاصل ہوتی ہے۔

چونکہ فرما = فَ (لا) فرلا

پس $\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}$ [فَ (لا) فرلا] = فً (لا) فرلا

اس لیے کہ فرلا متغیر لا کا کوئی تفاعل نہیں ہے

∴ فر [فرما] = [فً (لا) فرلا] فرلا

یہ فرض کر کے کہ دونوں فرلا مساوی ہیں ہمیں حاصل ہوتا ہے:

فر۲ ما = فً (لا) فرلا۲

دوسرے بلند تر رتبہ کے تفرقے بھی اس کے مماثل طریقہ سے حاصل ہوتے ہیں۔ چنانچہ ما کا ن۔ واں تفرقہ

فرن ما = ف(ن) (لا) فرلان

مثال (۱) ما = $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2 - \text{لا}^2}$ کا تفرقہ یعنے فرما دریافت کرو

حل فرما =
$$\frac{(\text{ر}^۲-\text{لا}^۲)^{\frac{۱}{۲}}\,۲\text{لا} - \frac{۱}{۲}(\text{ر}^۲-\text{لا}^۲)^{-\frac{۱}{۲}}(-۲\,\text{لا})\,\text{لا}^۲}{(\text{ر}^۲-\text{لا}^۲)}$$

$$=\frac{۲\text{لا}(\text{ر}^۲-\text{لا}^۲)^{\frac{۱}{۲}} + \text{لا}^۳(\text{ر}^۲-\text{لا}^۲)^{-\frac{۱}{۲}}}{(\text{ر}^۲-\text{لا}^۲)}$$

$$=\frac{۲\text{لا}(\text{ر}^۲-\text{لا}^۲)+\text{لا}^۳}{(\text{ر}^۲-\text{لا}^۲)^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{۲\text{ر}^۲\text{لا}-\text{لا}^۳}{(\text{ر}^۲-\text{لا}^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$$

مثال (۲) ۔ مساوات $\text{ر}^۲\text{جم}\,\text{طہ} - \text{ا}^۲\text{جب}\,۳\,\text{طہ} =$ ۰ دی جاتی ہے فرر دریافت کرو۔

حل ۔ عملِ تفرق سے $۲\,\text{ر}\,\text{فرر}\,\text{جم}\,\text{طہ} - \text{ر}^۲\text{جب}\,\text{طہ}\,\text{فرطہ} - ۳\,\text{ا}^۲\text{جم}\,۳\,\text{طہ}\,\text{فرطہ} =$ ۰

یعنے $\text{فرر}\,(۲\,\text{ر}\,\text{جم}\,\text{طہ}) = (\text{ر}^۲\text{جب}\,\text{طہ} + ۳\,\text{ا}^۲\,\text{جم}\,۳\,\text{طہ})\,\text{فرطہ}$

$$\therefore\ \text{فرر} = \frac{(\text{ر}^۲\text{جب}\,\text{طہ} + ۳\,\text{ا}^۲\,\text{جم}\,۳\,\text{طہ})}{۲\,\text{ر}\,\text{جم}\,\text{طہ}}\,\text{فرطہ}$$

مثالیں

مندرجۂ ذیل تفاعلوں کا پہلا تفرقہ دریافت کرو:

(۱) $\text{ما} = \sqrt{\frac{\text{ا}^۲-\text{لا}^۲}{\text{ا}-\text{لا}}}$ جواب $\text{فرما} = \frac{\text{ا}\,\text{فرلا}}{(\text{ا}+\text{لا})^{\frac{۱}{۲}}(\text{ا}-\text{لا})^{\frac{۳}{۲}}}$

(۲) $\text{ما} = \frac{\text{قطلا}}{\text{قطلا}+۱}$ جواب $\text{فرما} = \frac{\text{قطلا}\,\text{مسلا}\,\text{فرلا}}{(\text{قطلا}+۱)^۲}$

(۳) $\text{ما} = \text{مس}^{-۱}(\text{لوک}\,\text{لا})$ جواب $\text{فرما} = \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}(۱+\text{لوک}^۲\text{لا})}$

(۴) $\text{ف}(\text{و}) = \text{و}^{\sqrt{\text{جب}\,\text{و}}}$ جواب $\text{فرف}(\text{و}) = \text{و}^{\sqrt{\text{جب}\,\text{و}}}\left(\frac{\sqrt{\text{جب}\,\text{و}}}{\text{و}} + \frac{\text{جم}\,\text{و}\,\text{لوک}\,\text{و}}{۲\sqrt{\text{جب}\,\text{و}}}\right)\text{فرو}$

(۵) فہ (س) = (لوک س + ۱)^س جواب فرفہ (س) = (لوک س + ۱)^س [$\frac{۱}{\text{لوک س} + ۱}$ + لوک (لوک س + ۱)] فرس

(۶) مساوات لا² + ۲ لا ما + ۴ ما² = ۱۰ دی جاتی ہے۔ بتاؤ کہ

$$\text{فرما} = -\frac{(\text{لا} + \text{ما})\ \text{فرلا}}{\text{لا} + ۴\ \text{ما}}$$

(۷) ما (۱ + مس لا) - جب لا = ۰ بتاؤ کہ فرما = $\frac{\text{جم لا} - \text{ما قط}^2\ \text{لا}}{۱ + \text{مس لا}}$ فرلا

(۸) ر - لو قط² $\frac{\text{طہ}}{۲}$ = ۰ ثابت کرو کہ فرر = لو قط² $\frac{\text{طہ}}{۲}$ مس $\frac{\text{طہ}}{۲}$ فرطہ

۶۱ - تفرقہ کا اطلاق بطور تقریبی قیمت - چونکہ تفرقہ تفاعل کے اضافہ کا صدر جزو ہے اس لیے وہ اضافہ کی تقریبی قیمت کے طور پر استعمال کیا جاتا ہے۔ تفرقہ کے اس طرح استعمال کرنے میں یہ فائدہ ہے کہ وہ عموماً اضافہ کی بہ نسبت زیادہ آسانی کے ساتھ دریافت ہو سکتا ہے اور اس کی تشکیل بھی زیادہ سادہ ہوتی ہے۔

مثال (۱) ما = لوک_و لا میں اگر لا کی قیمت ۵ سے بدل کر ۵٫۱ ہو جائے ما کا اضافہ دریافت کرو۔

حل: مف ما = لوک_و ۵٫۱ - لوک_و ۵ = لوک_و $\frac{۵٫۱}{۵}$ = لوک_و ۱٫۰۲

= ۲٫۳۰ لوک_{۱۰} ۱٫۰۲ = ۲٫۳۰ × ۰٫۰۰۸۶ = ۰٫۰۱۹۸

اگر ما = لوک_و لا کا تفرقہ معلوم کیا جائے تو فرما = $\frac{۱}{\text{لا}}$ فرلا = $\frac{۱}{۵}$ (۰٫۱) = ۰٫۰۲

جس سے ظاہر ہے کہ فرما اس مثال میں مف ما سے صرف بقدر ۱ فی صد بڑا ہے۔ مف لا کی کمتر قیمتوں کے مف ما اور فرما میں سے بھی زیادہ بہتر تقرب پایا جائیگا۔

مثال (۲) - ایک سادہ رقاص ایک گھنٹہ میں ۳ ثانیہ زیادہ کی خطا بتاتا ہے۔ اس کے طول میں کتنا فی صد اضافہ کرنا چاہیے تا کہ وہ صحیح وقت بتائے؟

حل - سادہ رقاص کے وقت دورانِ اہتزاز کا ضابطہ و = ۲π $\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج}}}$ ہے

جس میں ل اس کا طول اور ج جاذبۂ ارض ہے۔

عملِ تفرق سے $\text{فر و} = \frac{\pi}{\sqrt{\text{ل ج}}}\ \text{فر ل}$

$\therefore \frac{\text{فر و}}{\text{و}} = \frac{1}{2}\ \frac{\text{فر ل}}{\text{ل}}$

چونکہ رقاص ایک کامل مدتِ دوران کا $\frac{3}{60\times60} = \frac{1}{1200}$ حصہ بڑھ کر بتاتا ہے

اس لیے $\frac{\text{فر و}}{\text{و}} = +\frac{1}{1200} = \frac{\text{فر ل}}{2\ \text{ل}}$

$\therefore \text{فر ل} = +\frac{\text{ل}}{600} = 0.0016\ \text{ل}$

اس لیے رقاص کا طول بقدر ۱۶ء فی صد بڑھایا جانا چاہیے۔

مثال (۳)۔ آواز کی رفتار ہوا میں تپش کے لحاظ سے حسب ضابطہ ذیل بدلتی ہے:

$\text{ر}_\text{ت} = \text{ر}_0 (1 + \text{عہ ت})^{\frac{1}{2}}$ جس میں ر_0 اور $\text{ر}_\text{ت}$ علی الترتیب صفر درجہ مئی اور ت درجہ مئی پر کی رفتاریں ہیں اور عہ ایک مستقل ہے۔

اگر ت کی پیمایش میں نصف فی صد کی خطا واقع ہو تو بتاؤ کہ رفتاریں تقریباً کیا فی صد خطا محسوب ہوگی۔

حل: $\text{ر}_\text{ت} = \text{ر}_0 (1 + \text{عہ ت})^{\frac{1}{2}}$ چونکہ ر_0 اور عہ مستقل اعداد ہیں اس لیے عملِ تفرق سے

$$\text{فر ر}_\text{ت} = \text{ر}_0 \frac{1}{2} (1 + \text{عہ ت})^{-\frac{1}{2}}\ \text{فر} (1 + \text{عہ ت})$$

$$= \frac{1}{2} \text{ر}_0 (1 + \text{عہ ت})^{-\frac{1}{2}}\ \text{عہ فرت}$$

پس $\frac{\text{فر ر}_\text{ت}}{\text{ر}_\text{ت}} = \frac{\text{عہ فرت}}{2(1 + \text{عہ ت})}$

چونکہ ت کی پیمایش میں نصف فیصد کی خطا ہے اس لیے فرت = $\frac{ت}{۲۰۰}$

اور $\frac{فرکات}{کات} = \frac{عہ}{۲(۱+عہت)} \times \frac{ت}{۲۰۰} = \frac{عہت}{۴۰۰(۱+عہت)}$

∴ فرکات = $\frac{کات}{۱۰۰} \cdot \frac{عہت}{۴(۱+عہت)}$

یعنے $\frac{عہت}{۴(۱+عہت)}$ فی صد خطا واقع ہوگی ۔

[واضح ہو کہ عہ کی قیمت $\frac{۱}{۲۷۳}$ ہے اس لیے

$\frac{عہت}{۴(۱+عہت)} = \frac{۱}{۴} \times \frac{ت}{۲۷۳+ت}$ یعنے

$\frac{۱}{۴}$ $\frac{سئی تپش}{مطلق تپش}$ فی صد خطا واقع ہوگی ۔]

مثالیں

(۱) ۵ فٹ نصف قطر والے ایک کرہ کے قطر کی پیمایش میں ایک فی صد کی خطا اگر واقع ہوئی ہو تو بتاؤ حجم کی پیمائش میں فی الواقع کتنی فی صد خطا پیدا ہوتی ہے اور عملِ تفرق سے اس کی تقریبی قیمت کیا ہوگی ۔

[جواب مف ح = ۳،۰۳ فی صد
اور فرح = ۳ فی صد]

(۲) ایک رقاص والی گھڑیال دن بھر میں ۴ منٹ سست چلتی ہے۔ صحیح چلنے کے لیے اس کے 'طول' کو کتنا فی صد چھوٹا کرنے کی ضرورت ہوگی؟

[جواب ۰،۵۶ فی صد]

(۳) تفاعل ف (لا) = لوک $\sqrt[۲]{\frac{۳لا+۲}{۳-۲لا}}$ میں اگر لا کی پیمایش میں ایک

قلیل مقدار فزلا کا سہو واقع ہو تو بتاؤ ف (لا) کی قیمت میں کیا سہو واقع ہوگا۔

[جواب زف(لا) = $\dfrac{\text{۱۳ فزلا}}{\text{۳ (۳لا + ۲) (۳ - ۲لا)}}$

(۴) ما = لا^{۲} + ۲ لاما + ۴ ما^{۲} = ۸ ثابت کرو کہ

$$\text{فزما} = -\dfrac{\text{(لا + ما) فزلا}}{\text{لا + ۴ ما}}$$

(۵) لا$^{\frac{۲}{۳}}$ + ما$^{\frac{۲}{۳}}$ = ا$^{\frac{۲}{۳}}$ بتاؤ کہ فزما = - $\sqrt[۳]{\dfrac{\text{ما}}{\text{لا}}}$

(۶) جمودی سلاخ (Inertia bar) کے مروڑی اہتزازوں کے وقتِ دوران کا ضابطہ

$$\text{و} = ۲\pi \sqrt{\dfrac{\text{۲ مج ل}}{\pi \text{ ا ص}^{۴}}}$$ ہے

جس میں و = وقتِ دوران، مج = سلاخ کے جمود کا معیارِ اثر تار کے محور کے گرد، ل = تار کا طول ا = تار کے مادّہ کی استواری کی شرح اور ص = تار کا نصف قطر

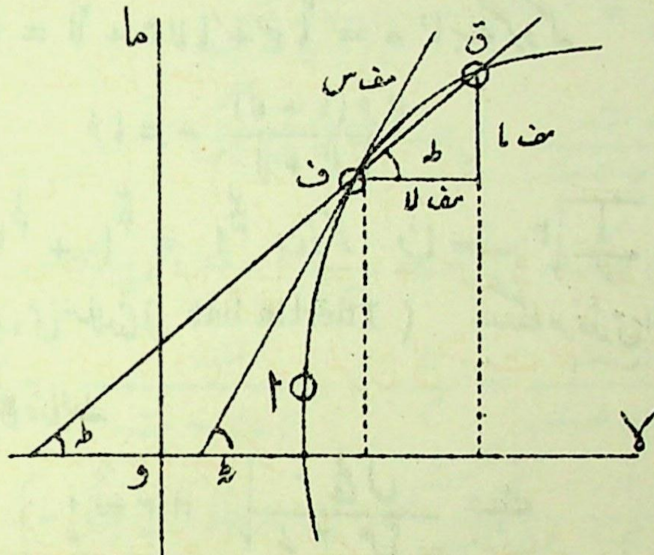
اگر پیمایش میں (۱) قطر کے ناپنے میں ایک فی صدی خطا ہو تو ثابت کرو کہ استواری کی محسوبہ قیمت میں ۴ فی صدی خطا پیدا ہوگی اور (۲) وقتِ دوران کی تعیین میں ایک فی صدی خطا ہو تو استواری کی محسوبہ قیمت میں ۲ فی صدی خطا پیدا ہوگی۔

۷۔ علی القوائم محدّدوں میں قوس کے تفرّقہ کی تعیین

تعیین - شکل ۳۸ میں قوس ا ف ق کا طول ایک معیّن نقطہ ا سے لے کر ف تک س ہے۔ اس کے اضافہ (= قوس ف ق) کو مفس سے تعبیر کرو۔ فرض کیا جاتا ہے کہ

$$\text{نہا} \left(\dfrac{\text{وتر ف ق}}{\text{قوس ف ق}} \right) = ۱$$

[بالفاظِ دیگر وترف ق اور اس کی متناظر قوس = مف س کے مابین مف س سے بلند تر رتبہ کے صغاریہ کا تفاوت ہے -]



شکل ۵۳

شکل سے ظاہر ہے کہ

$$\text{وتر (ف ق)}^2 = \text{(مف لا)}^2 + \text{(مف ما)}^2$$

اس مساوات کے سیدھے جانب کے رکن کو (مف س)^2 سے ضرب و تقسیم کرو اور سیدھے اور بائیں دونوں ارکان کو (مف لا)^2 پر تقسیم کرو تو

$$\left(\frac{\text{وترف ق}}{\text{مف س}}\right)^2 \left(\frac{\text{مف س}}{\text{مف لا}}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\text{مف ما}}{\text{مف لا}}\right)^2$$

اب اگر نقطہ ق نقطہ ف سے انتہائی قریب ہوجاتا ہے تو مف لا ← ۰ اور

$$\left(\frac{\text{فر س}}{\text{فر لا}}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2$$

دونوں ارکان کو فرلا^2 سے ضرب دینے پر

$$\text{فر س}^2 = \text{فر لا}^2 + \text{فر ما}^2 \qquad \dots\dots\dots \quad (1)$$

اس کے عین اوپر والی مساوات کا جذر المربع نکال کر اس کے دونوں ارکان کو فرس سے ضرب دینے سے

$$\text{فرس} = \left\{1+\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^{2}\right\}^{\frac{1}{2}} \text{فرلا} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

مساوات (۱) سے فوراً معلوم ہو جاتا ہے کہ

$$\text{فرس} = \left\{1+\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}}\right)^{2}\right\}^{\frac{1}{2}} \text{فرما} \quad \ldots\ldots\ldots (۳)$$

مساوات (۲) سے چونکہ $1+\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^{2} = 1+\text{مس}^{2}\,\text{ٹہ} = \text{قط}^{2}\,\text{ٹہ}$

لہذا فرس = قط ٹہ فرلا (جذر المربع کی مثبت علامت منتخب کرکے)۔

پس بآسانی ثابت ہو جاتا ہے کہ

$$\frac{\text{فرلا}}{\text{فرس}} = \text{جم ٹہ} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{فرما}}{\text{فرس}} = \text{جب ٹہ} \quad \ldots\ldots (۴)$$

مثال۔ شکل ناقص $\text{ب}^{2}\text{لا}^{2} + \text{ا}^{2}\text{ما}^{2} = \text{ا}^{2}\text{ب}^{2}$ کی قوس کا تفرقہ دریافت کرو۔

حل: لا کی رقموں میں

$$\text{فرس} = \left\{1+\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^{2}\right\}^{\frac{1}{2}} \text{فرلا}$$

عملِ تفرق سے $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = -\frac{\text{ب}^{2}}{\text{ا}^{2}}\,\frac{\text{لا}}{\text{ما}}$

$$\therefore \quad \text{فرس} = \left\{1+\frac{\text{ب}^{4}\text{لا}^{2}}{\text{ا}^{4}\text{ما}^{2}}\right\}^{\frac{1}{2}} \text{فرلا}$$

$$= \frac{\left\{\text{ا}^{2}(\text{ا}^{2}-\text{لا}^{2}) + \text{ب}^{2}\text{لا}^{2}\right\}^{\frac{1}{2}} \text{فرلا}}{\text{ا}\,(\text{ا}^{2}-\text{لا}^{2})^{\frac{1}{2}}}$$

اسی طرح ما کی رقموں میں $\text{فرس} = \left\{1+\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}}\right)^{2}\right\}^{\frac{1}{2}} \text{فرما}$

∴ فرس = فرما {ب^۲ (ب^۲ - ا^۲) + ا^۲ ما^۲}^½ / ب (ب^۲ - ما^۲)^½

۴ش - قطبی محدّدوں میں قوس کے تفرقہ کی تعیین

چونکہ کسی بھی نقطہ کے کارٹیسی اور قطبی محدّدوں میں رابطہ

لا = ر جم طہ　اور ما = ر جیب طہ　ہے

فرلا = جم طہ فرر - ر جیب طہ فرطہ　اور فرما = جیب طہ فرر + ر جم طہ فرطہ

پس ۴ث کی مساوات (۱) میں عمل تعویض، تحویل و جذر المربع سے

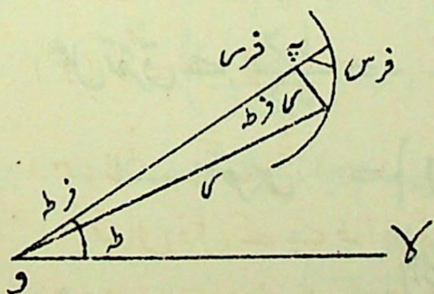
فرس = √(فرر^۲ + ر^۲ فرطہ^۲)

= {ر^۲ + (فرر / فرطہ)^۲}^½ فرطہ

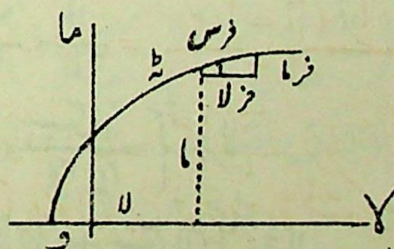
[نوٹ - ۴ث اور ۴ش کے ضابطوں کو یاد رکھنے کے لیے ذیل کی دو شکلوں سے مدد لی جا سکتی ہے -

شکل (ا) میں فرس ایک قائم الزاویہ مثلث کا وتر ہے جس کے ضلعے فرلا اور فرما ہیں اور فرما کے مقابل کا زاویہ ٹہ ہے - اس میں فرس = {(فرلا)^۲ + (فرما)^۲}^½

اور جم ٹہ = فرلا / فرس　اور جب ٹہ = فرما / فرس



شکل (ب)



شکل (ا)

شکل (ب) میں فرس ایک قائم الزاویہ مثلث کا وتر ہے جس کے ضلعے فرر

اور س فرطہ ہیں -

اس میں فرس = {(س فرطہ)^۲ + (فرس)^۲}^½

فرس اور فرس کے درمیانی زاویہ کو پہ سے تعبیر کرنے سے

[مس پہ = س فرطہ / فرس = س / سَ جبکہ سَ = فرس / فرطہ]

مثال - خطِ تدویر { لا = لر (طہ - جب طہ) ، ما = لر (۱ - جم طہ) } کے لیے طہ اور فرطہ کی رقموں میں قوس کا تفرقہ دریافت کرو -

حل - عملِ تفرق سے فرلا = لر (۱ - جم طہ) فرطہ ، فرطہ = ۱ جب طہ فرطہ

پس فرس^۲ = لر^۲ (۱ - جم طہ)^۲ فرطہ^۲ + لر^۲ جب^۲ طہ فرطہ^۲ = ۲ لر^۲ (۱ - جم طہ) فرطہ^۲

لیکن (۱ - جم طہ) = ۲ جب^۲ ½ طہ پس فرس = ۲ ا جب ½ طہ فرط

مثالیں

ذیل کے منحنیوں کے لیے لا اور فرلا کی رقموں میں فرس معلوم کرو :-

(۱) ما = ا لا^۲ + ب لا + ج [جواب فرس = (۱ + ب^۲ + ۴ ا ب لا + ۴ ا^۲ لا^۲)^½ فرلا

(۲) ما = لوک قط لا [جواب فرس = قط لا فرلا

ذیل کے منحنیوں کے لیے ما اور فرلا کی رقموں میں فرس کی تعیین کرو :-

(۳) ما^۲ = ۴ ا لا [جواب فرس = (۴ ا^۲ + ما^۲) فرما / ۲ ا

(۴) لا^⅔ + ما^⅔ = ا^⅔ [جواب فرس = (ا / ما)^⅓ فرما

منحنیات ذیل کے لیے طہ اور فرطہ کی رقموں میں فرس دریافت کرو :-

(۵) ر = ۵ جم طہ - ۱۲ جب طہ [جواب فرس = ۱۳ فرطہ

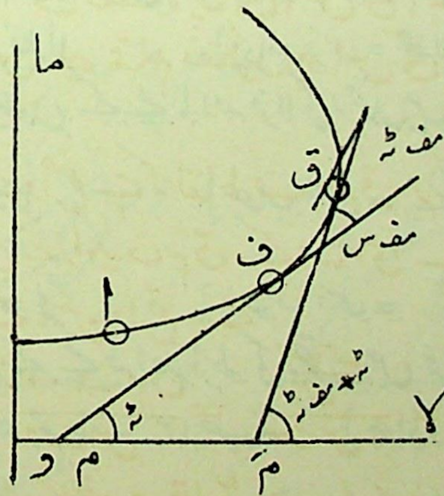
(۶) ر = ۲ - ۳ جب طہ [جواب فرس = (۱۳ - ۱۲ جب طہ)^½ فرطہ

نواں باب

انحناء، نصف قطر انحناء اور دائرہ انحناء

۱ـ انحناء ـ چھٹے باب میں ہم نے منحنی کے مُڑنے کی سمت کا ذکر کیا ہے ـ کسی نقطہ کے پاس منحنی کی شکل اس کے مڑنے یا تبدیلی سمت کی شرح کے تابع ہوتی ہے ـ ریاضی کی اصطلاح میں منحنی کے کسی نقطہ پر کی شرح تبدیلی سمت کو اس نقطہ پر کا انحناء کہتے ہیں ـ ہم اس کو ا سے تعبیر کرینگے اور یہاں اس کے لیے ایک جملہ حاصل کرینگے ـ

شکل ۳۹ میں منحنی ا ف ق پر نقطہ ف کے قریب ق ایک دوسرا نقطہ ہے ـ



شکل ۳۹

اس منحنی کے خطِ مماس کا نقطۂ تماس جب ف سے بدل کر ق ہوتا ہے یعنے قوس ف ق (= مف س) طے کرتا ہے تو خطِ مماس زاویہ مف ٹ میں گھوم جاتا ہے۔ یعنے مف ٹ = خطِ مماس کے زاویۂ میلان کی تبدیلی۔

پس ہم قوس ف ق کے اوسط انحناء کو $\frac{\text{مف ٹ}}{\text{مف س}}$ سے تعبیر کر سکتے ہیں۔ اور اس لیے کسی نقطہ ف پر کا انحناء (ن) اس کے اوسط انحناء کی انتہائی قیمت ہے جبکہ ق بالآخر ف کے انتہائی قریب پہنچ جاتا ہے

$$\therefore \text{ن} = \text{نہا}_{\text{مف س} \to 0} \frac{\text{مف ٹ}}{\text{مف س}} = \frac{\text{فر ٹ}}{\text{فر س}} = \text{منحنی کا نقطہ ف پر کا انحناء} \quad \ldots\ldots(۱)$$

پس انحناء سے مراد زاویۂ میلان کی بلحاظ قوس شرح تبدیلی ہے۔ چونکہ زاویہ مف ٹ نیم قطروں میں ناپا جاتا ہے اور قوس مف س طول کی اکائیوں میں اس لیے کسی نقطہ پر کے انحناء کی اکائی ایک نیم قطری فی اکائی طول ہے۔

۲۔ دائرہ کا اِنحناء۔

دائرہ کے کسی نقطہ پر بھی اس کا انحناء نصف قطر کا متکافی ہے اور اس لیے تمام نقطوں پر اس کی ایک ہی قیمت ہوتی ہے۔

شکل نمبر ۴۰ سے واضح ہے کہ نقاط ف اور ق پر کے مماسی خطوں کا درمیانی زاویہ مف ٹ دائرہ کے مرکز م پر کے زاویہ ف م ق کے مساوی ہے جو نصف قطروں م ف اور م ق کے مابین واقع ہے۔

$$\text{پس} \quad \frac{\text{مف ٹ}}{\text{مف س}} = \frac{\text{زاویہ ف م ق}}{\text{مف س}} = \frac{\frac{\text{مف س}}{\text{ص}}}{\text{مف س}} = \frac{1}{\text{ص}}$$

(جس میں ص = دائرہ کا نصف قطر)، اس لیے کہ زاویہ ف م ق کی نیم قطریوں میں پیمائش ہوتی ہے۔

اِس کے یہ معنے ہیں کہ قوس ف ق کا اوسط انحناء ایک مستقل مقدار ہے۔

شکل نمبر ۴۰

اب فرض کرو مف س ← ۰

$$\text{تب}\quad \frac{\text{فر ٹ}}{\text{فر س}} = \frac{1}{\text{ص}}$$

چونکہ خطِ مستقیم کا میلان کہیں نہیں بدلتا ہے اس لیے اس کا انحناء سب جگہ صفر ہوتا ہے۔

۳۔ انحنا کے لیے ضابطہ۔ علی القوائم محددوں کی رقموں میں۔

$$\text{انحناء ن} = \underset{\text{مف س} \to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{مف ٹ}}{\text{مف س}} = \underset{\text{مف س} \to 0}{\text{نہا}} \frac{\text{مف ٹ}}{\sqrt{\text{مف لا}^2 + \text{مف ہا}^2}} = \underset{\text{مف لا} \to 0}{\text{نہا}} \frac{\frac{\text{مف ٹ}}{\text{مف لا}}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\text{مف ہا}}{\text{مف لا}}\right)^2}}$$

$\text{نہا}_{\text{مف لا} \to 0} \dfrac{\text{مف ٹہ}}{\text{مف لا}}$ کے لیے ایک آسان جملہ اس طرح حاصل ہو سکتا ہے:

چونکہ $\text{مس ٹہ} = \dfrac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ اس لیے $\text{ٹہ} = \text{مس}^{-1} \dfrac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$

اور
$$\frac{\text{فر ٹہ}}{\text{فر لا}} = \frac{\dfrac{\text{فر}^2\text{ ما}}{\text{فر لا}^2}}{1 + \left(\dfrac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2}$$

پس
$$ن = \frac{\dfrac{\dfrac{\text{فر}^2\text{ ما}}{\text{فر لا}^2}}{1 + \left(\dfrac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2}}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2}} = \frac{\dfrac{\text{فر}^2\text{ ما}}{\text{فر لا}^2}}{\left\{1 + \left(\dfrac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{\text{ماً}}{\left\{1 + (\text{ماَ})^2\right\}^{\frac{3}{2}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

نوٹ :- اگر دیے ہوئے جملہ میں تفرّق بلحاظ ما آسان تر ہو تو انحنا، کو لاَ اور لاً (یعنے لا کے بلحاظ ما پہلے اور دوسرے مشتق) کی رقموں میں ظاہر کیا جا سکتا ہے - ایسی صورت میں

$$ن = \frac{-\text{لاً}}{\left\{1 + (\text{لاَ})^2\right\}^{\frac{3}{2}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

اس لیے کہ $\text{ٹہ} = \text{مم}^{-1} \dfrac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}}$

اور
$$\frac{\text{فر ٹہ}}{\text{فر ما}} = -\frac{\dfrac{\text{فر}^2\text{ لا}}{\text{فر ما}^2}}{1 + \left(\dfrac{\text{فر لا}}{\text{فر ما}}\right)^2}$$

یہاں یہ بات بھی یاد رکھنے کے قابل ہے کہ مساوات (۱) سے کام نہیں لیا جا سکتا

جبکہ مآ نا متناہی ہوتا ہے یعنے جبکہ نقطہ ف پر کا خطِ مماس انتصابی ہوتا ہے۔
ایسی حالت میں مساوات (۳) میں لآ = ۰ اور ن = - لاً

ر کی جبری علامت کے متعلق یہ یاد رکھنا چاہیے کہ مساوات (۱) میں نسب نما کی مثبت علامت منتخب کرنے سے ن اور ماً کی علامتیں ایک ہی ہوتی ہیں۔ پس ن کی علامت مثبت ہوتی ہے جبکہ منحنی اوپر کی جانب مقعر ہوتا ہے اور یہ علامت منفی ہوتی ہے جبکہ منحنی نیچے کی جانب مقعر ہوتا ہے۔

توضیحی مثال - خطِ تدویر {لا = ا (طہ - جب طہ)، ما = ا (۱ - جم طہ)} کا انحناء دریافت کرو۔

حل:
$$\text{مآ} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{جب طہ}}{\text{۱ - جم طہ}}$$

$$\text{پس } ۱ + (\text{مآ})^{۲} = \frac{۲}{\text{۱ - جم طہ}}$$

$$\text{اور} \quad \text{ماً} = \frac{\text{فر}\left(\frac{\text{جب طہ}}{\text{۱ - جم طہ}}\right)}{\text{فر طہ}} = \frac{۱}{\text{ا}(\text{۱ - جم طہ})^{۲}}$$

$$\therefore \quad \text{ن} = -\frac{۱}{\text{۲ا}\sqrt{۲}\sqrt{\text{۲ - ۲ جم طہ}}} = -\frac{۱}{\text{۴ ا جب } \frac{۱}{۲}\text{ طہ}}$$

۴ - انحناء کے لیے ضابطہ قطبی محددوں کی رقموں میں۔

ساتویں باب میں قطبی مساوات کے ضمن میں شکل ۳۳ بتایا گیا ہے کہ

$$\text{ثہ} = \text{طہ} + \text{پہ}$$

$$\text{پس} \quad \frac{\text{فر ثہ}}{\text{فر طہ}} = ۱ + \frac{\text{فر پہ}}{\text{فر طہ}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

معہذا $\text{پہ} = \text{س}\,\text{ت}^{\text{ا}}\,\frac{\text{س}}{\text{سَ}}$ (جس میں $\text{ت} = \frac{\text{فرس}}{\text{فرطہ}}$)

اس لیے $\frac{\text{فرپہ}}{\text{فرطہ}} = \frac{(\text{سَ})^{2} - \text{س}\,\text{سً}}{\text{س}^{2} + (\text{سَ})^{2}}$

پس مساوات (۱) کی رو سے $\frac{\text{فرϕ}}{\text{فرطہ}} = \frac{\text{س}^{2} + 2(\text{سَ})^{2} - \text{س}\,\text{سً}}{\text{س}^{2} + (\text{سَ})^{2}}$ ..... (۲)

لہٰذا سابقہ باب کی فصل (　) کی مساوات (　) سے

$$\frac{\text{فرس}}{\text{فرطہ}} = \left\{\text{س}^{2} + (\text{سَ})^{2}\right\}^{\frac{1}{2}} \quad \ldots\ldots (۳)$$

مساوات (۲) اور مساوات (۳) پر تقسیم کرنے سے

$$\text{انحناء ن} = \frac{\text{س}^{2} + 2(\text{سَ})^{2} - \text{س}\,\text{سً}}{\left\{\text{س}^{2} + (\text{سَ})^{2}\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

توضیحی مثال ۔ مرمی (projectile) کی مساواتیں

$\text{لا} = \text{ر}(\text{جم عہ})\,\text{و}$ اور $\text{ما} = \text{ر}(\text{جب عہ})\,\text{و} - \frac{1}{2}\text{ج}\,\text{و}^{2}$ ہیں

جن میں ر ابتدائی رفتار ہے، عہ اس ابتدائی رفتار کا اُفق کے ساتھ زاویۂ میلان، و وقت اور ج جاذبہ زمین ہے ۔ اس کے بلند ترین نقطہ کے پاس منحنی کا انحناء دریافت کرو۔

حل: $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرو}} = \text{ر جم عہ}$، $\frac{\text{فرما}}{\text{فرو}} = \text{ر جب عہ} - \text{ج و}$

ما کی قیمت اعظم ہوتی ہے جہاں پر کہ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرو}} = 0$ ۔ یعنے جبکہ $\text{و} = \frac{\text{ر جب عہ}}{\text{ج}}$

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\frac{\text{فرما}}{\text{فرو}}}{\frac{\text{فرلا}}{\text{فرو}}} = \frac{\text{ر جب عہ} - \text{ج و}}{\text{ر جم عہ}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} = \frac{\frac{\text{فر}}{\text{فرو}}\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)}{\frac{\text{فرلا}}{\text{فرو}}}$$

$$= -\frac{\text{ج}}{\text{ر}^2\,\text{جم}^2\,\text{عہ}}$$

$$\therefore\quad \text{انحناء ن} = \frac{\frac{\text{ف}^2\,\text{ما}}{\text{ف لا}^2}}{\left\{1+\left(\frac{\text{ف ما}}{\text{ف لا}}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{\text{ج}}{\text{ر}^2\,\text{جم}^2\,\text{عہ}}}{\left\{1+\frac{\text{ر}^2\,\text{جب}^2\,\text{عہ} - 2\,\text{رج}(\text{جب عہ})\text{و} + \text{ج}^2\,\text{و}^2}{\text{ر}^2\,\text{جم}^2\,\text{عہ}}\right\}^{\frac{3}{2}}}$$

$$= \frac{-\text{ج ر جم عہ}}{(\text{ر}^2\,\text{جم}^2\,\text{عہ})^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\text{ج}}{\text{ر}^2\,\text{جم}^2\,\text{عہ}}$$

۵ - نصف قطرِ انحناء - تعریف - منحنی کے کسی نقطہ کے نصف قطرِ انحناء سے مراد اس نقطہ پر کے انحناء کا متکافی ہے -

$$\text{یعنی ص} = \frac{1}{\text{ن}} = \frac{\left\{1+(\text{ما}')^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\text{ما}''} \quad\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

توضیحی مثال - زنجیرہ کی کارتیسی مساوات $\text{ما} = \frac{\text{ل}}{2}\left(\text{و}^{\frac{\text{لا}}{\text{ل}}} + \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{\text{ل}}}\right)$ دیجاتی ہے - اس کے کسی بھی نقطہ کے نصف قطرِ انحناء کے لیے ایک ضابطہ حاصل کرو اور بتاؤ کہ اس کے سب سے نیچے کے نقطہ پر نصف قطرِ انحناء کی قیمت ل ہے -

حل: $\frac{\text{ف ما}}{\text{ف لا}} = \text{ما}' = \frac{1}{2}\left(\text{و}^{\frac{\text{لا}}{\text{ل}}} - \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{\text{ل}}}\right)$ اور $\text{ما}'' = \frac{1}{2\text{ل}}\left(\text{و}^{\frac{\text{لا}}{\text{ل}}} + \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{\text{ل}}}\right)$

$$= \frac{\text{ما}}{\text{ل}^2}$$

$$\therefore\quad 1+(\text{ما}')^2 = 1+\frac{1}{4}\left(\text{و}^{\frac{\text{لا}}{\text{ل}}} - \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{\text{ل}}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(\text{و}^{\frac{\text{لا}}{\text{ل}}} + \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{\text{ل}}}\right)^2 = \frac{\text{ما}^2}{\text{ل}^2}$$

$$\therefore\quad \text{ص} = \frac{\frac{\text{ما}^3}{\text{ل}^3}}{\frac{\text{ما}}{\text{ل}^2}} = \frac{\text{ما}^2}{\text{ل}}$$

زنجیرہ کے سب سے نیچے کے نقطہ پر ما کی قیمت اقل ہے اور اس لیے

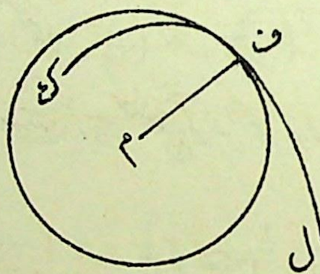
فر ما / فر لا یعنے ماَ = صفر

اس کے لیے و $\frac{لا}{ر}$ = و $\frac{لا}{ر}$ ۔ اس صورت میں ہو سکتا ہے جبکہ لا = صفر

اس نقطہ پر ما کی قیمت = $\frac{ا}{۲}$ (۱ + ۱) = ا

پس یہاں ص = $\frac{ا^۲}{ا}$ = ا

۶۔ دائرۂ انحناء۔ شکل ۱۴۱ میں منحنی ک ف ل کے کسی نقطہ ف پر غور کرو۔ ف پر منحنی کے مماسی خط کا ڈھلان وہی ہے جو اس نقطہ پر خود منحنی کا ڈھلان ہے۔



شکل ۱۴۱

(۱۔ چھٹا باب)۔ اسی طرح ہم منحنی کے ہر نقطہ کے لیے ایک مماسی دائرہ تیار کر سکتے ہیں جس کا انحناء وہی ہے جو اس نقطہ پر منحنی کا انحناء ہے۔ اس مقصد کے لیے حسبِ ذیل عمل کیا جائے:

نقطہ ف پر منحنی کا ایک عماد منحنی کے مقعر جانب کھینچو۔ اور اس عماد پر فاصلہ ف م نقطہ ف پر کے نصف قطرِ انحناء (= ص) کے مساوی ناپو۔ م کو مرکز مان کر ایک دائرہ کھینچو جو نقطہ ف میں سے گزرے۔ اس دائرہ کا انحناء　　ن = $\frac{۱}{ص}$

جو خود منحنی کے خود نقطہ ف پر کے انحناء کے مساوی ہے۔ اس طرح جو دائرہ تیار کیا جاتا ہے منحنی کے نقطہ ف پر کا دائرۂ انحناء کہلاتا ہے۔

علی العموم منحنی کے کسی نقطہ پر کا دائرہ انحناء اس نقطہ پر منحنی کو عبور کریگا۔ چنانچہ شکل ۱۴۶ میں اس کی توضیح کی گئی ہے۔ چھٹے باب میں نقطۂ عطف پر کے مماسی خط کا جو ذکر آیا ہے اس سے مقابلہ کیا جائے۔

جیسے کہ نقطہ ف پر کا مماسی خط منحنی کے اس نقطہ پر کی سمت کو ظاہر کرتا ہے اسی طرح ف پر کا دائرۂ انحناء منحنی کے اس نقطہ پر کے انحناء کا ہندسی تخیل قائم کرنے میں بڑی مدد دیتا ہے۔ اس لیے کہ منحنی اور دائرہ کے سمت کی تبدیلی کی شرح دونوں ف پر ایک ہی ہیں۔

آگے چل کر ہم دائرۂ انحناء کی اس طرح تعریف کرینگے کہ وہ ایک قاطع دائرہ کی انتہائی وضع ہے۔ یہ تعریف خطِ مماس کی تعریف کے مشابہ ہے جو مذکورۂ بالا باب میں کی گئی ہے۔

توضیحی مثال۔ منحنی $\left(\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right)^{2} + \left(\frac{\text{ما}}{\text{ب}}\right)^{\frac{2}{3}} = 1$ کے نقطہ (۰، ب) پر کا نصف قطر انحناء دریافت کرو۔ منحنی کو مرتسم کرو اور نقطۂ مذکور پر کا دائرہ انحناء کھینچو۔

حل:
$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = -\frac{3(\text{ب})^{\frac{2}{3}}}{\text{ا}^{2}}\,\text{لا}\,\text{ما}^{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} = -\frac{3(\text{ب})^{\frac{2}{3}}}{\text{ا}^{2}}\left\{\text{ما}^{\frac{1}{3}} + \frac{\text{لا}}{3}\,\frac{1}{\text{ما}^{\frac{2}{3}}}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right\}$$

$$= -\frac{3(\text{ب})^{\frac{2}{3}}}{\text{ا}^{2}}\left(\text{ما}^{\frac{1}{3}} - \frac{\text{لا}^{2}}{\text{ما}^{\frac{1}{3}}}\,\frac{(\text{ب})^{\frac{2}{3}}}{\text{ا}^{2}}\right)$$

نقطہ (۰، ب) پر $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = 0$ اور $\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}} = \frac{3\text{ب}}{\text{ا}^{2}}$

پس $\text{ص} = \frac{\left\{\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^{2} + 1\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{\text{فر}^{2}\text{ما}}{\text{فرلا}^{2}}} = -\frac{1}{\frac{3\text{ب}}{\text{ا}^{2}}} = -\frac{\text{ا}^{2}}{3\text{ب}}$

مثالیں

مندرجۂ ذیل منحنیوں کے مصرحہ نقطوں پر کے نصف قطر انحنا دریافت کرو۔ اور ان منحنیوں کو مرتسم کرکے ان کے متناظر دائرہ انحنا تیار کرو :-

(۱) قطع ناقص $\frac{لا^{۲}}{ا^{۲}} + \frac{ما^{۲}}{ب^{۲}} = ۱$ کے نقطہ (ا، ۰) پر

جواب ص = $\frac{ب^{۲}}{ا}$

(۲) قطع زائد $\frac{لا^{۲}}{ا^{۲}} - \frac{ما^{۲}}{ب^{۲}} = ۱$ کے نقطہ (ا، ۰) پر

جواب ص = $\frac{ب^{۲}}{ا}$

(۳) متساوی الاضلاع (equilateral) خط زائد لا ما = ۱۲ کے نقطہ (۳، ۴) پر

جواب ص = $۵\frac{۵}{۲۴}$

ذیل کے منحنیوں کے کسی بھی نقطہ ($لا_۱$، $ما_۱$) پر کا نصف قطرِ انحنا محسوب کرو :-

(۴) $لا^{\frac{۱}{۲}} + ما^{\frac{۱}{۲}} = ا^{\frac{۱}{۲}}$ جواب ص = $\frac{۲(لا_۱ + ما_۱)^{\frac{۳}{۲}}}{ا^{\frac{۱}{۲}}}$

(۵) ما = لوگ قط لا جواب ص = قط $لا_۱$

ثابت کرو کہ :-

(۶) خطِ صنوبری ر = ا (۱ - جم طہ) کے کسی بھی نقطہ ($ر_۱$، $طہ_۱$) پر کا

نصف قطر انحنا = $\frac{۲}{۳}\sqrt{۲\,ا\,ر_۱}$

(۷) اٹیبرن یا چشمہ منحنی $ر^{۲} = ا^{۲}$ جم ۲ طہ کے نقطہ ($ر_۱$، $طہ_۱$) پر کا

نصف قطرِ انحنا = $\frac{ا^{۲}}{۳\,ر_۱}$

(۸) منحنی ر = ا جب^{۳} $\frac{طہ}{۳}$ کے نقطہ ($ر_۱$، $طہ_۱$) کے لیے ص کی

قیمت $\frac{۳}{۴}$ ا جب^{۲} $\frac{طہ_۱}{۳}$ ہے۔

۷۔ **مرکز انحناء** ۔ منحنی کے کسی نقطہ ف پر کے مماسی خط کے محدد لا، ما اور پہلے مشتق مَا کی قیمتیں وہی ہوتی ہیں جو منحنی کے لیے ہوتی ہیں۔ اسی طرح منحنی کے نقطہ ف پر کے دائرۂ انحناء کے محدد لا، ما اور پہلے اور دوسرے مشتق مَا اور مً کی قیمتیں بھی وہی ہوتی ہیں جو منحنی کے لیے ہیں۔ پس ہم کسی منحنی پر کے نقطہ ف (محدد لا، ما) کے متعلقہ مرکز انحناء (محدد عہ، بہ) کی اس طرح تعریف کر سکتے ہیں کہ وہ منحنی کے اس نقطہ پر کے دائرۂ انحناء کا مرکز ہے۔

منحنی کے کسی نقطہ ف (محدد لا، ما) کے متعلقہ مرکز انحنا کے محددوں (عہ، بہ) کی تعیین۔

چونکہ دائرۂ انحنا کی مساوات $(\text{لا}-\text{عہ})^2+(\text{ما}-\text{بہ})^2=\text{ص}^2$ .... (۱) ہے

پس اس مساوات کے پہلے تفرق سے $\text{مَا} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{لا}-\text{عہ}}{\text{ما}-\text{بہ}}$

اور اس کے دوسرے تفرق سے $\text{مً} = \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فرلا}^2} = -\frac{\text{ص}^2}{(\text{ما}-\text{بہ})^3}$ .... (۲)

ص کی قیمت یعنی $\frac{\{1+(\text{مَا})^2\}^{\frac{3}{2}}}{\text{مً}}$ تعویض کرنے سے مساوات

$(\text{ما}-\text{بہ})^3 = -\frac{\{1+(\text{مَا})^2\}^3}{(\text{مً})^3}$ حاصل ہوتی ہے۔

$\therefore \text{ما}-\text{بہ} = -\frac{1+(\text{مَا})^2}{\text{مً}}$ .... (۳)

پس (۲) کی پہلی مساوات اور مساوات (۳) کی مدد سے

$\text{لا}-\text{عہ} = -\text{مَا}(\text{ما}-\text{بہ}) = \frac{\text{مَا}\{1+(\text{مَا})^2\}}{\text{مً}}$

$\therefore \text{عہ} = \text{لا} - \frac{\text{مَا}\{1+(\text{مَا})^2\}}{\text{مً}}$ اور $\text{بہ} = \text{ما} + \frac{1+(\text{مَا})^2}{\text{مً}}$ ... (۴)

نوٹ (۱)- یہی نتائج ہم شکل ۴۲ کی مدد سے بھی بآسانی حاصل کر سکتے ہیں۔ اس لیے کہ

$\text{ع} = \text{لا} - \text{ص}\ \text{جب}\ \text{ٹ}$ } جن میں ٹ = زاویہ جو ف پر کا مماسی خط محور لا

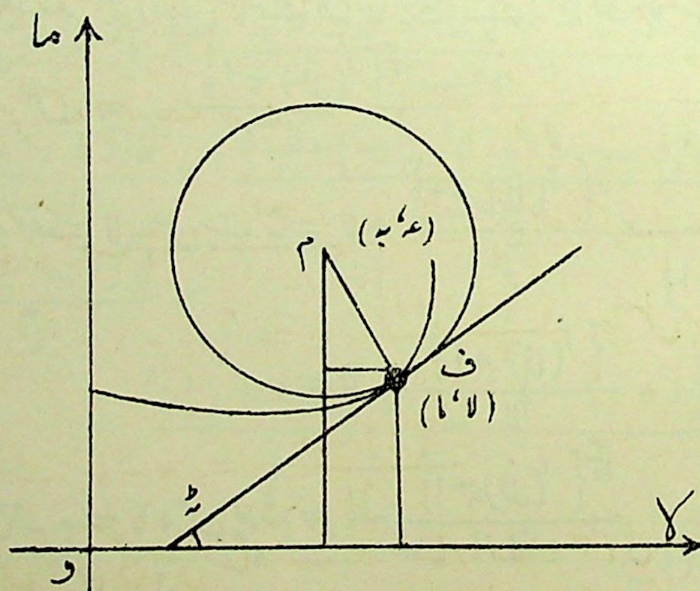
اور $\text{بہ} = \text{ما} + \text{ص}\ \text{جم}\ \text{ٹ}$ } کے ساتھ بناتا ہے۔ اور ص نصف قطر انحناء ہے

$$\text{جب}\ \text{ٹ} = \frac{\text{ما}'}{\{1+(\text{ما}')^2\}^{\frac{1}{2}}} \quad \text{اور} \quad \text{جم}\ \text{ٹ} = \frac{1}{\{1+(\text{ما}')^2\}^{\frac{1}{2}}}$$

[ملاحظہ ہو سابقہ باب کا آخری حصہ $\text{قط}^2\ \text{ٹ} = 1 + \text{مس}^2\ \text{ٹ}$ اور $\text{قم}^2\ \text{ٹ} = 1 + \text{مم}^2\ \text{ٹ}$ کی مدد سے بھی یہ ضابطے فوراً حاصل کر لیے جا سکتے ہیں۔]

$$\text{لہذا}\quad \text{ع} = \text{لا} - \frac{\{1+(\text{ما}')^2\}^{\frac{3}{2}}}{\text{ما}''} \times \frac{\text{ما}'}{\{1+(\text{ما}')^2\}^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \text{لا} - \frac{\text{ما}'\{1+(\text{ما}')^2\}}{\text{ما}''}$$



شکل ۴۲

اسی طرح $ب = ما + \frac{\{1 + (ماَ)^2\}}{ماً}$

نوٹ (۳) - اگر لاَ اور لاً علی الترتیب لا کے بلحاظ ما پہلے اور دوسرے مشتق ہوں تو

$$\left.\begin{aligned} ع &= لا + \frac{\{1 + (لاَ)^2\}}{لاً} \\ \text{اور } ب &= ما - \frac{لاَ\{1 + (لاَ)^2\}}{لاً} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

چونکہ $ع = لا - ص\ جب\ ط$ اور $ب = ما + ص\ جم\ ط$

اور $جب\ ط = \frac{1}{\{1 + (لاَ)\}^{\frac{1}{2}}}$ اور $جم\ ط = \frac{لاَ}{\{1 + (لاَ)^2\}^{\frac{1}{2}}}$

معہذا جیسا کہ قبل ازیں ثابت کیا جا چکا ہے (ملاحظہ ہو مساوات ۲ صفحہ ۱۵۷)

$$ص = -\frac{\{1 + (لاَ)^2\}^{\frac{3}{2}}}{لاً}$$

اس لیے $ع = لا - ص\ جب\ ط = لا + \frac{\{1 + (لاَ)^2\}^{\frac{3}{2}}}{لاً} \times \frac{1}{\{1 + (لاَ)^2\}^{\frac{1}{2}}}$

$$= لا + \frac{\{1 + (لاَ)^2\}}{لاً}$$

اسی طرح $ب = ما + ص\ جم\ ط = ما - \frac{\{1 + (لاَ)^2\}^{\frac{3}{2}}}{لاً} \cdot \frac{لاَ}{\{1 + (لاَ)^2\}^{\frac{1}{2}}}$

$$= ما - \frac{ماَ\{1 + (لاَ)^2\}}{لاً}$$

واضح ہو کہ مساواتیں (۵) اس صورت میں کارآمد ہوتی ہیں جبکہ ماَ کی قیمت

ناتمناہی ہوجاتی ہے یا کہ تفرق بلحاظ ما آسان تر ہوتا ہے۔

توضیحی مثال۔ خطِ زائد $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} - \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کے کسی بھی نقطہ (لا، ما) کے متعلقہ مرکزِ انحنا کے محدد (ع، ہ) دریافت کرو۔

حل: $\text{ع} = \text{لا} - \frac{\text{ما}'\{1+(\text{ما}')^2\}}{\text{ما}''} = \frac{\text{لا}\,\text{ما}'' - \text{ما}' - (\text{ما}')^3}{\text{ما}''}$

عملِ تفرق سے $\text{ما}' = \frac{\text{ب}^2\,\text{لا}}{\text{ا}^2\,\text{ما}}$ اور $\text{ما}'' = -\frac{\text{ب}^4}{\text{ا}^2\,\text{ما}^3}$

$$\therefore\ \text{ع} = \frac{\frac{\text{ب}^4\,\text{لا}}{\text{ا}^2\,\text{ما}^3} + \frac{\text{ب}^2\,\text{لا}}{\text{ا}^2\,\text{ما}} + \frac{\text{ب}^6\,\text{لا}^3}{\text{ا}^6\,\text{ما}^3}}{\frac{\text{ب}^4}{\text{ا}^2\,\text{ما}^3}}$$

$$= \frac{\text{لا}(\text{ا}^4\text{ب}^4 + \text{ا}^4\text{ب}^2\text{ما}^2 + \text{ب}^6\text{لا}^2)}{\text{ا}^4\text{ب}^4} \times \frac{\frac{1}{\text{ما}^3}}{\frac{1}{\text{ما}^3}}$$

$$= \frac{\text{لا}\,\text{ب}^2(\text{ا}^4\text{ب}^2 + \text{ا}^4\text{ما}^2 + \text{ب}^4\text{لا}^2)}{\text{ا}^4\text{ب}^4}$$ جبکہ ما صفر نہیں ہے

$$= \frac{\text{لا}\{\text{ا}^4\text{ب}^2 + \text{ا}^2(\text{ب}^2\text{لا}^2 - \text{ا}^2\text{ب}^2) + \text{ب}^4\text{لا}^2\}}{\text{ا}^4\text{ب}^2} = \frac{\text{لا}(\text{ا}^2 + \text{ب}^2)\,\text{ب}^2\text{لا}^2}{\text{ا}^4\text{ب}^2}$$

$$= \frac{\text{لا}^3(\text{ا}^2 + \text{ب}^2)}{\text{ا}^4}$$

$$\text{ہ} = \text{ما} + \frac{\{1 + (\text{ما}')^2\}}{\text{ما}''} = \frac{\text{ما}\,\text{ما}'' + 1 + (\text{ما}')^2}{\text{ما}''}$$

$$= \frac{-\frac{\text{ب}^4}{\text{ا}^2\,\text{ما}^2} + 1 + \frac{\text{ب}^4\,\text{لا}^2}{\text{ا}^4\,\text{ما}^2}}{-\frac{\text{ب}^4}{\text{ا}^2\,\text{ما}^3}} = \frac{\text{ما}(\text{ا}^2\text{ب}^4 - \text{ا}^4\text{ما}^2 - \text{ب}^4\text{لا}^2)}{\text{ا}^2\text{ب}^4}$$

$$= \frac{\text{ما}\{\text{ا}^2\text{ب}^4 - \text{ا}^4\text{ما}^2 - \text{ب}^2(\text{ا}^2\text{ب}^2 + \text{ا}^2\text{ما}^2)\}}{\text{ا}^2\text{ب}^4} = -\frac{\text{ما}^3(\text{ا}^2 + \text{ب}^2)}{\text{ب}^4}$$

مثالیں

مندرجۂ ذیل منحنیوں کے مصرحہ نقطوں سے متعلق مرکزِ انحناء کے محدّد معلوم کرو :

(۱) ۳ ما = لا^{۳} − ۳ لا^{۲} − ۹ لا نقطہ (۳ ، −۹) پر جواب ۳ ، −۸$\frac{۳}{۴}$

(۲) ما = جب لا نقطہ ($\frac{\pi}{۲}$ ، ۱) پر جواب $\frac{\pi}{۲}$ ، ۰

(۳) لا^{۳} + ما^{۳} − ۴ لا ما = ۰ نقطہ (۲ ، ۲) پر جواب ۱$\frac{۳}{۴}$ ، ۱$\frac{۳}{۴}$

(۴) خطِ مکافی ما^{۲} = ۴ ا لا کے کسی نقطہ سے متعلق مرکزِ انحناء دریافت کرو اور بتاؤ کہ اس کے راس پر انحناء اعظم ہے ۔ جواب ۳ لا + ۲ ا ، − $\frac{ما^{۳}}{۴ ا^{۲}}$

ثابت کرو کہ

(۵) منحنی ما = لا^{۳} کے کسی نقطہ کے مرکزِ انحناء کے لیے عہ = $\frac{لا - ۹ لا^{۵}}{۲}$ ،

بہ = $\frac{۱ + ۱۵ لا^{۴}}{۶ لا}$ ہے ۔

(۶) لا$^{\frac{۲}{۳}}$ + ما$^{\frac{۲}{۳}}$ = ا$^{\frac{۲}{۳}}$ کے کسی نقطہ کے مرکزِ انحناء کے محدّد لا + ۳ لا$^{\frac{۱}{۳}}$ ما$^{\frac{۲}{۳}}$ اور ما + ۳ لا$^{\frac{۲}{۳}}$ ما$^{\frac{۱}{۳}}$ ہیں ۔

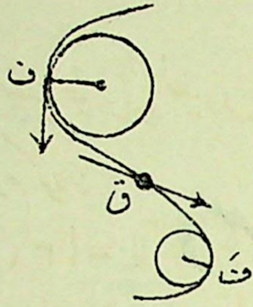
نوٹ ۔ چھٹے باب کے حصہ (الف) میں بتایا گیا ہے کہ نقطۂ عطف مثلاً شکل ۴۳ کے نقطہ ق پر $\frac{فر^{۲} ما}{فر لا^{۲}}$ = ۰ ۔ اور چونکہ

$$انحناء\ ن = \frac{ما''}{\{۱ + (ما')^{۲}\}^{\frac{۳}{۲}}}$$ اور نصف قطرِ انحناء $$ص = \frac{۱}{ن} = \frac{\{۱ + (ما')^{۲}\}^{\frac{۳}{۲}}}{ما''}$$

اور مرکزِ انحناء کے محدّد $$عہ = لا - \frac{ما'\{۱ + (ما')^{۲}\}}{ما''} ، \quad بہ = ما + \frac{\{۱ + (ما')^{۲}\}}{ما''}$$ ہیں

پس واضح ہے کہ عام طور پر عہ ، بہ اور ص بغیر انتہا کے بڑھتے جاتے ہیں

جیسے جیسے منحنی کی مساوات میں تفاعل ما کا دوسرا مشتق بلحاظ لا صفر کے قریب ہوتا جاتا ہے، الّا اس صورت کے کہ مماسی خط انتصابی ہو۔ یعنے اگر ہم فرض کریں کہ شکل ۴۳ میں نقطہ ف مع اس کے مماسی خط کے منحنی پر سے گزرتا ہوا نقطہ فَ کو جاتا ہے تو نقطہ عطف ق پر منحنی کا انحناء صفر ہوتا ہے، مماسی خط کا گھماؤ وقتاً رک جاتا ہے اور پھر جیسے ہی



شکل ۴۳

گھماؤ کی سمت بدلتی ہے، مرکز انحناء بغیر انتہا دور ہٹ جاتا ہے اور نصف قطر انحناء نامتناہی ہو جاتا ہے۔

دسواں باب

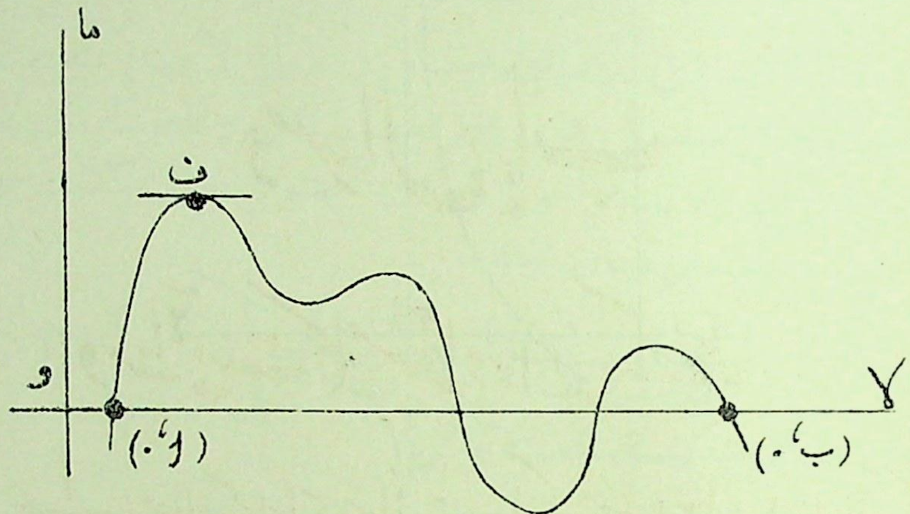
اوسطِ قیمت کا مسئلہ اور اُس کے اطلاقات

۱۔ احصار کے اساسی مسائل میں سے ایک مسئلہ رول (Rolle) کے نام سے منسوب ہے۔ ہم اس کو یہاں مختصراً بیان کیے دیتے ہیں تاکہ اس کی مدد سے چند مفید نتائج اخذ کیے جا سکیں۔

فرض کرو ا = ف (لا) ایک مسلسل و حید القیمت تفاعل لا ہے جو لا = ا اور لا = ب پر منعدم ہوتا ہے۔ نیز یہ بھی فرض کرو کہ ا کا مشتق فَ (لا) مسلسل ہے۔ ایسی صورت میں یہ تفاعل ترسیماً شکل ۴۴ کی طرح ایک مسلسل منحنی کے ذریعہ تعبیر کیا جا سکیگا۔ اس کے ملاحظہ سے واضح ہوگا کہ ا اور ب کے مابین لا کی کم از کم ایک قیمت پر منحنی کا مماسی خطِ محور لا کے متوازی ہے۔ یعنے منحنی کا ڈھلان صفر ہے جیسا کہ نقطہ ر پر کے مماسی خط سے عیاں ہے۔

رول کا مسئلہ۔ اگر ف (لا) منعدم ہوتا ہے جبکہ لا = ا اور لا = ب اور ف (لا) اور فَ (لا)، لا = ا سے لے کر لا = ب تک لا کی تمام قیمتوں کے لیے مسلسل ہیں، تو فَ (لا)، لا کی ا اور ب کے مابین کم از کم

ایک قیمت پر صفر ہوگا۔



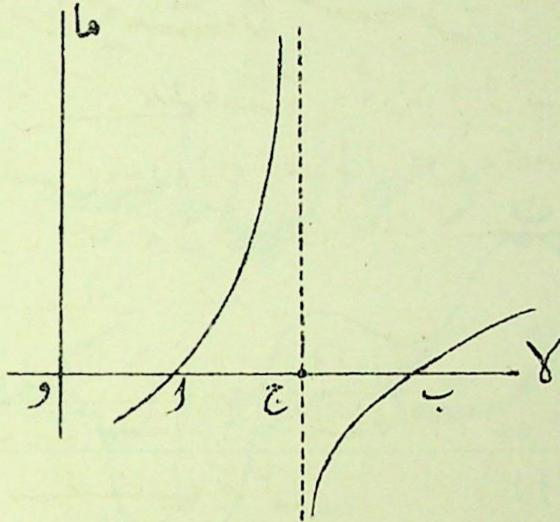
شکل ۴۴

اس مسئلہ کی تصدیق کے لیے کسی قسم کے ثبوت کی ضرورت نہیں، اس لیے کہ لا جیسے جیسے ا سے لے کر ب تک بڑھتا ہے ف (لا) نہ تو ہمیشہ بڑھ سکتا ہے اور نہ ہمیشہ گھٹ سکتا ہے کیونکہ ف (ا) = ۰ اور ف (ب) = ۰ پس لا کی ا اور ب کے درمیان کم از کم ایک قیمت کے لیے ف (لا) کا بڑھنا موقوف ہوکر گھٹنا شروع ہوجانا چاہیے، یا نہیں تو گھٹنا موقوف ہوکر بڑھنا شروع ہوجانا چاہیے۔ اور لا کی اس مخصوص قیمت کے لیے ف (لا) کا پہلا مشتق فَ (لا) صفر ہوجانا چاہیے۔

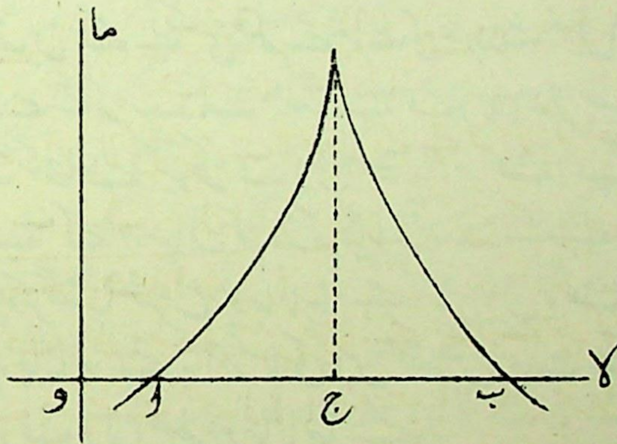
جیسا کہ اشکال (۴۵) اور (۴۶) سے ظاہر ہے جہاں لا = ا اور لا = ب کے درمیان ف (لا) یا فَ (لا) غیر مسلسل ہوں وہاں رول کے مسئلہ کا اطلاق نہیں ہوسکتا۔

شکل ۴۵ ایک ایسے تفاعل کی ترسیم ہے جو ا اور ب کے مابین لا = ج کے لیے غیر مسلسل ہے یعنے ف (ج) = ∞

اور شکل ۴۶ ایسے مسلسل تفاعل کی ترسیم ہے جس کا پہلا مشتق لا کی



شکل ۴۵



شکل ۴۶

ان ہی قیمتوں کے مابین لا = ج کے لیے غیر مسلسل ہے یعنے ف (لا)=∞۔
ان شکلوں کے مطالعہ سے واضح ہوگا کہ ہر دو صورتوں میں ترسیم کے کسی
نقطہ پر لا = ا اور لا = ب کے درمیان خطِ مماس (یا بالفاظِ دیگر منحنی)

محور و لا کے متوازی ہوتا ہے۔

۴۔ اوسط قیمت کا مسئلہ۔ اگر ف (لا) اور فہ (لا) اور ان کے پہلے مشتق وقفہ (ا، ب) کے درمیان ہر جگہ مسلسل ہوں اور معہذا اس وقفہ کے اندر فہَ (لا) منعدم نہیں ہوتا ہے، تو لا کی کسی قیمت لا = لا۱ کے لیے جو ا اور ب کے درمیان ہے۔

(۱) [ف (ب) - ف (ا)] / [فہ (ب) - فہ (ا)] = فَ (لا۱) / فہَ (لا۱) ..... (ا < لا۱ < ب)

اس کے ثابت کرنے کے لیے تفاعل

فہ (لا) ≡ [ف (ب) - ف (ا)] / [فہ (ب) - فہ (ا)] [فہ (لا) - فہ (ا)] - [ف (لا) - ف (ا)] (۱)

تیار کرو۔ واضح ہے کہ فہ (ا) = فہ (ب) = ۰۔ اور اس لیے اس پر رول کے مسئلہ کا اطلاق ہو سکتا ہے۔

پس تفرق کرنے سے فہَ (لا) = [ف (ب) - ف (ا)] / [فہ (ب) - فہ (ا)] فہَ (لا) - فَ (لا) ..... (۲)

ا اور ب کے مابین لا کی کسی قیمت لا = لا۱ کے لیے فہَ (لا) کو منعدم ہو جانا چاہیے۔

∴ [ف (ب) - ف (ا)] / [فہ (ب) - فہ (ا)] فہَ (لا۱) - فَ (لا۱) = ۰ ..... (۳)

یہ یاد رکھ کر فہَ (لا۱) منعدم نہیں ہوتا ہے سارے جملہ کو فہَ (لا۱) پر تقسیم کر کے ترتیب دینے سے نتیجہ (۱) مندرجۂ بالا حاصل ہو جاتا ہے۔

اگر (۱) میں فہ (لا) = لا تو

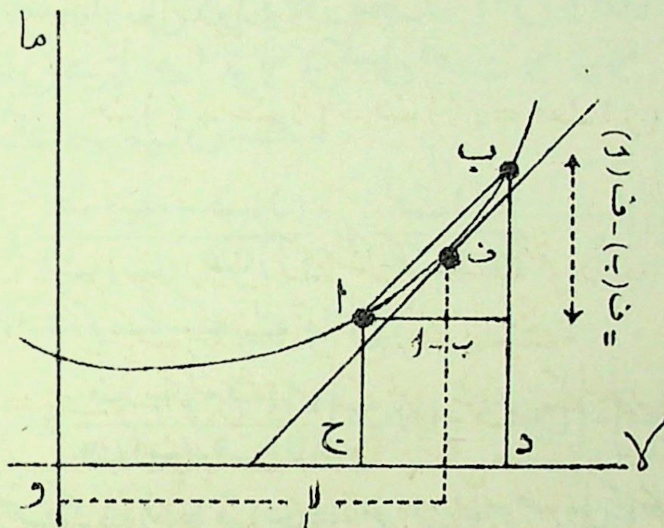
فَ (لا۱) = [ف (ب) - ف (ا)] / (ب - ا) ... (ب) (ا < لا۱ < ب)

اس صورت میں مسئلہ مصرحہ بالا کی آسان ہندسی تعبیر ہوتی ہے۔ ملاحظہ ہو شکل ۴۷ جو ف (لا) کی ترسیم ہے۔

و ج = ا، ج ا = ف (ا)

و د = ب، د ب = ف (ب)

پس $\frac{\text{ف (ب) - ف (ا)}}{\text{ب - ا}}$ = وتر ا ب کا ڈھلان



شکل ۴۷

واضح ہو کہ مساوات (ب) میں ف (لا،) منحنی کی قوس ا ب کے ایک نقطہ پر کا ڈھلان ہے اور مساوات (ب) اس بات کو ظاہر کرتی ہے کہ اس نقطہ پر کا ڈھلان وتر ا ب کے ڈھلان کے مساوی ہے۔ پس قوس ا ب پر کم از کم ایک ایسا نقطہ ف ہے جس کا مماسی خط وتر ا ب کے متوازی ہے۔

شکل ۴۴ کے ملاحظہ سے معلوم ہوگا کہ لا = ا اور لا = ب کے درمیانی وقفہ میں منحنی پر ف کے مماثل اور بھی نقطے ہو سکتے ہیں۔

مساوات (ب) کو کسروں سے پاک کرنے سے مسئلہ حسب ذیل شکل میں لکھا جا سکتا ہے:

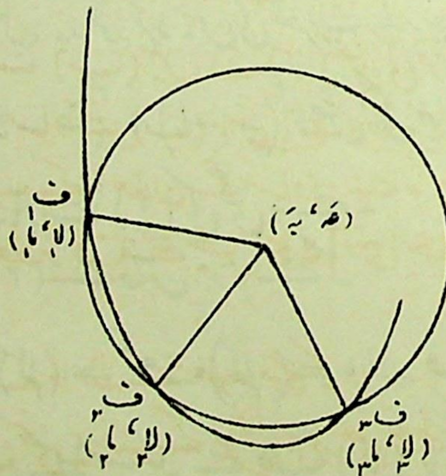
ف (ب) = ف (ا) + (ب - ا) فَ (لا،) .... (ج)

بجائے ب کے ا + مف ا لکھو تب ب ۔ ا = مف ا اور چونکہ لا ا اور ب کے مابین ایک حد ہے اس لیے ہم لا کو ا + طہ۔ مف ا کے مساوی لکھ سکتے ہیں جس میں طہ ایک مثبت واجب کسر ہے۔ اس طرح مساوات (ج) میں عملِ تعویض سے اوسط قیمت کے مسئلہ کی ایک دوسری شکل حاصل ہوتی ہے۔

(د)..... ف (ا + مف ا) ۔ ف (ا) = مف (ا) فَ (ا + طہ۔ مف ا)...
(ا > طہ > ب)

۳۷ ۔ ہم اب رول کے مسئلہ کی مدد سے لثمی دائرہ (Osculating Circle) کی ایک ہندسی مثال حل کرکے بتائینگے۔

تعریف ۔ اگر کسی منحنی پر کے تین پڑوس کے نقطوں ف، فَ، ف میں سے ایک دائرہ کھینچا جائے (ملاحظہ ہو شکل ۴۸) ۔ اور نقاط ف، ف منحنی پر ہٹتے ہوئے نقطہ ف کے بالآخر انتہائی وضع میں بالکل متصل ہو جائیں، تب یہ دائرہ عموماً مقدار اور وضع میں ایک انتہائی دائرہ کو پہنچ جائیگا جو منحنی کا



شکل ۴۸

نقطہ ف پر لثمی دائرہ کہلاتا ہے۔

یہ لٹمی دائرہ، دائرہ انحناء کا بعینہٖ مماثل ہے۔

فرض کرو کہ منحنی کی مساوات ما = ف (لا) ہے .... (۱)

اور لا$_1$، لا$_2$، لا$_3$ علی الترتیب نقاط ف$_1$، ف$_2$، ف$_3$ کے فصیلے یا مقطوعے ہیں، (عہ، بہ) محولہ بالا تینوں نقطوں میں سے گزرنے والے دائرہ کے محدد ہیں اور ص اس کا نصف قطر ہے۔ تب اس دائرہ کی مساوات

(لا − عہ)^2 + (ما − بہ)^2 = ص^2 ہے

اور چونکہ ف$_1$، ف$_2$ اور ف$_3$ نقطوں کے محددوں کو چاہیے کہ یہ مساوات ان پر صادق آئے، لہذا

(لا$_1$ − عہ)^2 + (ما$_1$ − بہ)^2 − ص^2 = ۰
(لا$_2$ − عہ)^2 + (ما$_2$ − بہ)^2 − ص^2 = ۰ .... (۲)
(لا$_3$ − عہ)^2 + (ما$_3$ − بہ)^2 − ص^2 = ۰

اب لا کے تفاعل پر غور کرو جس کی تعریف بذریعہ

ف (لا) = (لا − عہ)^2 + (ما − بہ)^2 − ص^2 کی جاتی ہے، جس میں ما کی تعریف بذریعہ مساوات (۱) کی گئی ہے۔

پس مساواتوں (۲) سے حاصل ہوتا ہے کہ

ف (لا$_1$) = ۰، ف (لا$_2$) = ۰ اور ف (لا$_3$) = ۰

اس لیے رول کے مسئلہ سے فَ (لا) لا کی کم از کم دو قیمتوں پر منعدم ہو جانا چاہیے جن میں سے ایک قیمت لا$_1$ اور لا$_2$ کے درمیان مثلاً لاَ ہے اور دوسری لا$_2$ اور لا$_3$ کے درمیان مثلاً لاً ہے

یعنی فَ (لاَ) = ۰ اور فَ (لاً) = ۰

اسی وجہ سے لا کی کسی قیمت پر مابین لا_1 اور لا_2 کے مثلاً $\text{لا}_ہ$ پر $\text{ف}''(\text{لا})$ منعدم ہو جانا چاہیے - پس

$$\text{ف}''(\text{لا}_ہ) = ۰$$

اس لیے نقاط ف_1، ف_2 اور ف_3 میں سے گزرنے والے دائرہ کے عناصر عہ، بہ اور ص کے لیے ضروری ہے کہ وہ مندرجہ ذیل تین مساواتوں کی تصدیق کریں:

$$\text{ف}(\text{لا}_1) = ۰،\quad \text{ف}'(\text{لا}') = ۰،\quad \text{ف}''(\text{لا}_ہ) = ۰$$

اب ف_2 اور ف_3 بالآخر نقطہ ف_1 کے انتہائی قریب پہنچ جانے دو - تب لا_2، لا_3، $\text{لا}'$، $\text{لا}''$، $\text{لا}_ہ$ نقطہ لا_1 کو بطور انتہا پہنچ جائینگے اور اس لیے لمسی دائرہ کے عناصر عہ، بہ، ص کی تعیین ذیل کی تین مساواتوں سے ہو جائیگی:

$$\text{ف}(\text{لا}_1) = ۰،\quad \text{ف}'(\text{لا}_1) = ۰،\quad \text{ف}''(\text{لا}_1) = ۰$$

حروف کے ذیلی نشانوں کو ترک کرنے سے یہ مساواتیں حسبِ ذیل ہو جاتی ہیں:

$$(\text{لا} - \text{عہ})^2 + (\text{ما} - \text{بہ})^2 = \text{ص}^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۳)$$

(۳) کو تفرق کرکے $$(\text{لا} - \text{عہ}) + (\text{ما} - \text{بہ})\,\text{ما}' = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۴)$$

(۴) کو تفرق کرکے $$۱ + (\text{ما}')^2 + (\text{ما} - \text{بہ})\,\text{ما}'' = ۰ \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۵)$$

مساواتوں (۴) اور (۵) کو (لا − عہ) اور (ما − بہ) کے لیے حل کرنے سے (چونکہ $\text{ما}'' \neq ۰$) مساوات (۶) حاصل ہوتی ہے:

$$\text{لا} - \text{عہ} = \frac{\text{ما}'\{۱ + (\text{ما}')^2\}}{\text{ما}''}،\quad \text{ما} - \text{بہ} = -\frac{۱ + (\text{ما}')^2}{\text{ما}''} \quad \ldots \quad (۶)$$

اس طرح عہ اور بہ کے لیے جو مساواتیں حاصل ہوتی ہیں باب (۹) میں دائرۂ انحناء کے محددوں کے لیے حاصل شدہ مساواتوں کے عین مماثل ہیں۔ ایسا ہی نصف قطرِ انحناء ص کے لیے جو جملہ اخذ کیا جاتا ہے وہ بھی نصف قطرِ انحناء کے جملہ کے مماثل ہے۔ پس لمسی دائرہ دائرہ انحناء کے مماثل ہے۔

مثال (۱) اگر ف (لا) = لا^3 - ۳ لا تو لا کی ان قیمتوں کو دریافت کرو جن کے لیے ف (لا) اور فَ (لا) منعدم ہوتے ہیں رول کے مسئلہ کی تصدیق کرو۔

حل ف (لا) = لا^3 - ۳ لا = لا (لا^2 - ۳) منعدم ہوتا ہے

جبکہ لا = ۰ یا لا = ± √۳

فَ (لا) یعنی ۳ لا^2 - ۳ کو لا کی کم از کم ایک قیمت کے لیے (مابین لا = ۰ اور لا = + √۳، اور لا = ۰ اور لا = - √۳) صفر ہو جانا چاہیے۔ یہ اس وقت ہوتا ہے جبکہ لا^2 - ۱ = ۰ یعنی لا = ± ۱
ف (لا) کی ترسیم کھینچنے سے ان امور کی بہتر توضیح ہو سکتی ہے۔

مثال (۲) لا۱ دریافت کرو جس کے لیے

ف (ب) = ف (ا) + (ب - ا) فَ (لا۱)

درانحالیکہ ف (لا) = لا^2 اور ا = ۱ اور ب = ۲

حل ف (ب) = ب^2 = ۴، ف (ا) = ا^2 = ۱

پس ۴ = ۱ + ۱ فَ (لا۱)

فَ (لا) = فر ف (لا) / فر لا = فر لا^2 / فر لا = ۲ لا

∴ ۴ = ۱ + ۲ لا۱ اور ۲ لا۱ = ۳

∴ لا = ۵ء۱

مثالیں

ذیل کی صورتوں میں لا کی قیمتیں معلوم کرکے جن کے لیے ف (لا) اور فَ (لا) منعدم ہو جاتے ہیں، رول کے مسئلہ کی تصدیق کرو:—

(۱) ف (لا) = لا^{۲} - لا^{۳} (۲) ف (لا) = جب لا

(۳) ف (لا) = جب ۲ لا - جم ۲ لا (۴) ف (لا) = مس لا - لا

(۵) ف (لا) = لا و^{لا} (۶) ف (لا) = لا لوک لا

(۷) لا۱ دریافت کرو جس کے لیے

ف (ب) = ف (ا) + (ب - ا) فَ (لا۱) جبکہ

ف (لا) = و^{لا}، ا = ۰، ب = ۱ [جواب لا۱ = لوک (و - ۱) = ۰ء۵۴]

۴۔ غیر معین صورتیں ۔ جب متبوع متغیر کی کسی خاص قیمت کے لیے کوئی تفاعل مندرجۂ ذیل صورتوں میں سے کوئی صورت اختیار کرتا ہے تو کہا جاتا ہے کہ وہ غیر معین ہے:

$$\frac{0}{0}\ ،\ \frac{\infty}{\infty}\ ،\ 0\times\infty\ ،\ \infty-\infty\ ،\ (0)^{0}\ ،\ (\infty)^{0}\ ،\ (1)^{\infty}$$

اور دیے ہوئے جملہ سے متبوع متغیر کی اُس خاص قیمت کے لیے تفاعل مذکور غیر معرّف ہوتا ہے۔ مثلاً فرض کرو کہ

ما = ف (لا) / فِ (لا)

جس میں متغیر کی کسی قیمت مثلاً لا = ا کے لیے

ف (ا) = ۰ اور فِ (ا) = ۰

لا کی اس قیمت کے لیے متذکرہ بالا تفاعل غیر معرف ہوتا ہے اور اس لیے ہم اس کے لیے جو قیمت چاہیں مقرر کر سکتے ہیں ۔ ہمارا مقصد ہے کہ جہاں کہیں ممکن ہو اس تفاعل کی ایسی قیمت مقرر کی جائے جو اس کو مسلسل بنائے جبکہ لا = ا

اگر تفاعل ف (لا) ایک غیر معیّن صورت اختیار کرتا ہے جبکہ لا = ا، تب اگر

$$\text{نہا}_{\text{لا} \to \text{ا}} \ \text{ف (لا)}$$

موجود اور محدود ہے تو ہم لا = ا کے لیے یہ قیمت مقرر کرتے ہیں اور وہ اب لا = ا کے لیے مسلسل بن جاتا ہے ۔

جیسا کہ ایک سابقہ باب (باب دوم) میں بتایا گیا بعض اوقات ایسے تفاعلوں کی انتہائی قیمت سادہ امتحانوں کے ذریعہ معلوم کر لی جا سکتی ہے ۔ لیکن مصرحہ بالا غیر معیّن صورتوں کی قیمتیں دریافت کرنے کے عام طریقے احصاء ہی پر منحصر ہیں

۵ - غیر معیّن صورت ۰/۰ کی قیمت کی دریافت ۔

اگر تفاعل $\frac{\text{ف (لا)}}{\text{ف (لا)}}$ کی صورت کا ہو ایسا کہ ف (ا) = ۰ اور ف (ا) = ۰

تو یہ تفاعل غیر معیّن ہے جبکہ لا = ا ۔ ہم ثابت کرینگے کہ

$$(\text{ہ}) \ldots\ldots \text{نہا}_{\text{لا} \to \text{ا}} \frac{\text{ف (لا)}}{\text{ف (لا)}} = \text{نہا}_{\text{لا} \to \text{ا}} \frac{\text{فَ (لا)}}{\text{فَ (لا)}}$$

مساوات (۲) § ۲ میں ب = لا لکھو، چونکہ ف (ا) = ف (ا) = ۰

$$\frac{\text{ف (لا)}}{\text{ف (لا)}} = \frac{\text{فَ (لا}_1\text{)}}{\text{فَ (لا}_1\text{)}} \qquad [\,\text{ا} < \text{لا}_1 < \text{لا}\,] \ldots (۱)$$

اگر لا ← ا تو نیز لا₁ ← ا ۔ پس اگر مساوات (۱) کا سیدھے جانب کا رکن ایک انتہا کو پہنچتا ہے جبکہ لا ← ا تو بائیں جانب کا رکن بھی

اسی انتہا کو پہنچتا ہے اور اس طرح رابطہ (ھ) ثابت ہو جاتا ہے۔
رابطہ (ھ) سے اگر فَ (ا) اور فَ (لا) دونوں صفر نہیں ہیں تو

$$\underset{\text{لا} \to \text{ا}}{\text{نہا}} \frac{\text{ف}(\text{لا})}{\text{ف}'(\text{لا})} = \frac{\text{ف}'(\text{ا})}{\text{ف}'(\text{ا})} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۲)$$

پس غیر معین صورت ÷ کی قیمت دریافت کرنے کا قاعدہ یہ ہے کہ شمار کنندہ کو تفرق کرکے ایک نیا شمار کنندہ قرار دیا جائے اور نسب نما کو تفرق کرکے ایک نیا نسب نما قرار دیا جائے۔ اس نئی کسر کی قیمت متغیر کی مقررہ قیمت کے لیے ابتدائی کسر کی انتہائی قیمت ہوگی۔

اگر ایسی صورت پیش آئے کہ متغیر کی مقررہ قیمت کے لیے شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کے پہلے مشتق بھی منعدم ہوں تو رابطہ (ھ) کا عمل نسبت

$$\frac{\text{ف}'(\text{لا})}{\text{ف}'(\text{لا})}$$

پر عائد کیا جا سکتا ہے۔ اگر اس وقت بھی پیشتر ہی کی صورت رونما ہو تو رابطہ (ھ) کا عمل بار بار دہرایا جاتا ہے یہاں تک کہ نتیجہ معین صورت اختیار کر لیتا ہے جبکہ متغیر کی مقررہ قیمت تعویض کی جاتی ہے۔ یعنے مطلوبہ انتہا مندرجہ ذیل جملوں میں سے پہلا جملہ جس کی قیمت لا = ا تعویض کرنے پر معین پائی جائیگی۔

$$\frac{\text{ف}'(\text{لا})}{\text{ف}'(\text{لا})}, \quad \frac{\text{ف}''(\text{لا})}{\text{ف}''(\text{لا})}, \quad \ldots\ldots, \quad \frac{\text{ف}^{(\text{ن})}(\text{لا})}{\text{ف}^{(\text{ن})}(\text{لا})}$$

توضیحی مثال (۱) $\underset{\text{لا} \to \text{ا}}{\text{نہا}} \frac{\text{لا} - \text{ا}}{\text{لا}^{\text{ن}} - \text{ا}^{\text{ن}}}$ کی قیمت دریافت کرو۔

حل $\frac{\text{لا} - \text{ا}}{\text{لا}^{\text{ن}} - \text{ا}^{\text{ن}}} = \div$ جبکہ لا = ا

پس $\underset{\text{لا}\to\text{ا}}{\text{نہا}}\ \dfrac{\text{لا} - \text{ا}}{\text{لا}^{\text{ن}} - \text{ا}^{\text{ن}}} = \dfrac{\text{فر}(\text{لا} - \text{ا})}{\text{فر}(\text{لا}^{\text{ن}} - \text{ا}^{\text{ن}})}$ جبکہ لا = ا

$= \dfrac{1}{\text{ن}\ \text{لا}^{\text{ن}-1}}$ جبکہ لا = ا یعنے $= \dfrac{1}{\text{ن}\ \text{ا}^{\text{ن}-1}}$

توضیحی مثال (۲) $\underset{\text{لا}\to 0}{\text{نہا}}\ \dfrac{\text{لا} - \text{جب لا}}{\text{لا} - \text{مس لا}}$ دریافت کرو۔

حل ۔ $\dfrac{(\text{لا} - \text{جب لا})}{(\text{لا} - \text{مس لا})} = \dfrac{0}{0}$ جبکہ لا = ۰

$\therefore\ \dfrac{\text{فر}(\text{لا} - \text{جب لا})}{\text{فر}(\text{لا} - \text{مس لا})} = \dfrac{1 - \text{جم لا}}{1 - \text{قط}^2\,\text{لا}} = \dfrac{0}{0}$ جبکہ لا = ۰

یعنے غیر معین ہے۔

پس رابطہ (ہ) کے بموجب دوبارہ عمل کرنے سے یعنے دی ہوئی کسر کے شمار کنندہ و نسب نما کو دو دو مرتبہ تفرق کرنے سے

$\dfrac{\text{فر}(1 - \text{جم لا})}{\text{فر}(1 - \text{قط}^2\,\text{لا})} = \dfrac{\text{جب لا}}{-2\ \text{قط}^2\,\text{لا مس لا}}$

لیکن یہ بھی $\frac{0}{0}$ ہے جبکہ لا = ۰ . اس لیے مزید ایک بار تفرق کرنے سے

$\dfrac{\text{فر}(\text{جب لا})}{\text{فر}(-2\ \text{قط}^2\ \text{مس لا})} = \dfrac{\text{جم لا}}{-2\ \text{قط}^4\,\text{لا} - 4\ \text{قط}^2\,\text{لا مس}^2\,\text{لا}} = \dfrac{1}{2}$ جبکہ لا = ۰

پس $\underset{\text{لا}\to 0}{\text{نہا}}\ \dfrac{\text{لا} - \text{جب لا}}{\text{لا} - \text{مس لا}} = -\dfrac{1}{2}$

مثالیں

ذیل کی غیر معین صورتوں کی قیمتیں دریافت کرو :-

(۱) $\dfrac{\text{و}^{\text{لا}} - \text{و}^{-\text{لا}} - 2\ \text{لا}}{\text{لا} - \text{جب لا}}$ جبکہ لا = ۰　　جواب = ۲

(۲) $\dfrac{لا^{3} - 2لا^{2} - لا + 2}{لا^{2} - 7لا + 6}$ جبکہ $لا = 2$　　جواب $= \dfrac{3}{5}$

(۳) $\dfrac{(2 - لا^{2})\,جب\,لا - 2لا\,جم\,لا}{لا^{3}}$ جبکہ $لا = 0$　　جواب $= -\dfrac{1}{3}$

(۴) دریافت کرو $\displaystyle\lim_{لا \to 3} \dfrac{\sqrt{3لا} - \sqrt{12 - لا}}{2لا - 3\sqrt{19 - 5لا}}$　　جواب $= \dfrac{8}{69}$

۷ـ غیر معین صورت $\frac{\infty}{\infty}$ کی قیمت کی دریافت۔

$\displaystyle\lim_{لا \to ر} \dfrac{ف(لا)}{ف(لا)}$ کی قیمت معلوم کرنے کے لیے جبکہ لا ← ر کی حالت میں $ف(لا) = \infty$ اور $ف(لا) = \infty$ اسی قاعدہ پر عمل کیا جاتا ہے جو $\frac{0}{0}$ کی صورت میں استعمال ہوتا ہے۔ یعنے مطلوبہ انتہا

$$\dfrac{ف'(لا)}{ف'(لا)}،\quad \dfrac{ف''(لا)}{ف''(لا)}،\quad \dfrac{ف'''(لا)}{ف'''(لا)} \ldots\ldots،\quad \dfrac{ف^{(ن)}(لا)}{ف^{(ن)}(لا)}$$

میں سے پہلا جملہ ہوگا جس کی قیمت $لا = ر$ تعویض کرنے پر معین پائی جائیگی۔ اس کا باضابطہ ثبوت موجودہ نصاب سے بالاتر ہے۔ اس لیے صرف قاعدہ بیان کردیا گیا۔

توضیحی مثال $\displaystyle\lim_{لا \to 0} \dfrac{لوک\,لا}{قم\,لا}$ دریافت کرو۔

حل۔ $\dfrac{ف(0)}{ف(0)} = \left[\dfrac{لوک\,لا}{قم\,لا}\right]_{لا=0} = \dfrac{-\infty}{\infty}$ اس لیے غیر معین

$\dfrac{ف'(0)}{ف'(0)} = \left[\dfrac{\frac{1}{لا}}{-قم\,لا\,قا\,لا}\right]_{لا=0} = \left[-\dfrac{جب^{2}\,لا}{لا\,جم\,لا}\right]_{لا=0} = \frac{0}{0}$ اس لیے غیر معین

$\dfrac{ف''(0)}{ف''(0)} = \left[-\dfrac{2\,جب\,لا\,جم\,لا}{جم\,لا - لا\,جب\,لا}\right]_{لا=0} = -\dfrac{0}{1} = 0$

۷۔ غیر معین صورت $\cdot \times \infty$ کی قیمت کی دریافت۔

اگر کوئی تفاعل ف (لا) × ف (لا) غیر معین صورت $\cdot \times \infty$ اختیار کرتا ہے جبکہ لا = ل تو اس کو بشکل

$$\frac{\text{ف (لا)}}{\frac{1}{\text{ف (لا)}}} \quad \text{یا} \quad \frac{\text{ف (لا)}}{\frac{1}{\text{ف (لا)}}}$$

لکھ کر بصورت $\frac{\cdot}{\cdot}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ تبدیل کر لیا جاتا ہے اور پھر ان غیر معین صورتوں کی قیمتیں دریافت کرنے کے لیے جو قاعدے اوپر بتائے گئے ہیں ان پر عائد کیے جاتے ہیں۔

توضیحی مثال نہا$_{\text{لا} \leftarrow \cdot}$ و$^{\frac{1}{\text{لا}}}$ (۱ + لوک لا) دریافت کرو۔

حل۔ و$^{-\frac{1}{\text{لا}}}$ (۱ + لوک لا) = $\frac{\text{۱ + لوک لا}}{\text{و}^{\frac{1}{\text{لا}}}}$ جبکہ لا > ۰

لیکن $\frac{\text{۱ + لوک لا}}{\text{و}^{\frac{1}{\text{لا}}}}$ صورت $\frac{\infty}{\infty}$ اختیار کر لیتا ہے اور اس لیے غیر معین ہو جاتا ہے جبکہ لا = ۰۔

پس محولہ بالا قاعدہ سے انتہائے مذکور

$$= \text{نہا}_{\text{لا} \leftarrow \cdot} \frac{\frac{1}{\text{لا}}}{\text{و}^{\frac{1}{\text{لا}}} \cdot -\frac{1}{\text{لا}^2}} = \text{نہا}_{\text{لا} \leftarrow \cdot} - \frac{\text{لا}}{\text{و}^{\frac{1}{\text{لا}}}} = \cdot$$

پس انتہائے مذکور کی قیمت = ۰۔

۸۔ غیر معین صورت $\infty - \infty$ کی قیمت کی دریافت۔

ایسے جملہ کو عموماً ایسی کسر میں تحویل کیا جا سکتا ہے جو صورت $\frac{\cdot}{\cdot}$

یا صورت $\frac{\infty}{\infty}$ اختیار کر لیتی ہے۔

توضیحی مثال۔ $\lim_{\text{لا} \to 1}\left(\frac{\text{لا}}{\text{لا}-1} - \frac{1}{\text{لوک لا}}\right)$ دریافت کرو۔

حل۔ یہ تفاعل $\infty - \infty$ ہو جاتا ہے جبکہ لا = ۱

لیکن $\frac{\text{لا}}{\text{لا}-1} - \frac{1}{\text{لوک لا}} = \frac{\text{لا لوک لا} - \text{لا} + 1}{(\text{لا}-1)\,\text{لوک لا}}$ جبکہ $\text{لا} \neq 1$

مگر جب لا = ۱ تو یہ آخری تفاعل $\frac{0}{0}$ صورت اختیار کر لیتا ہے۔ پس

محولہ بالا قاعدہ کے استعمال سے تفاعل مذکور = $\frac{\text{لوک لا}}{\text{لوک لا} + 1 - \frac{1}{\text{لا}}}$ اور یہ $\frac{0}{0}$

ہو جاتا ہے جبکہ لا = ۱ عمل دہرانے سے $\frac{\frac{1}{\text{لا}}}{\frac{1}{\text{لا}} + \frac{1}{\text{لا}^2}}$ حاصل ہوتا ہے
جو = $\frac{1}{2}$ جبکہ لا = ۱ پس

دیے ہوئے جملہ کی انتہا $\frac{1}{2}$

۹۔ غیر معیّن صورتوں $(0)^0$، $(1)^\infty$، $(\infty)^0$ کی قیمتوں کی دریافت۔

تفاعل اگر بصورت $\text{ف}(\text{لا})^{\text{ف}(\text{لا})}$ ہو

تو اس کو مندرجۂ بالا تین صورتوں میں سے کوئی ایک صورت اختیار کرنے کے لیے ضرور ہے کہ لا کی کسی قیمت کے لیے

ف (لا) = ۰، ف (لا) = ۰ اس سے $(0)^0$ صورت پیدا ہوگی۔

یا ف (لا) = ۱ ف (لا) = ∞ " $(1)^\infty$ "

یا ف (لا) = ∞ ف (لا) = ۰ " $(\infty)^0$ "

فرض کرو $\text{ما} = \text{ف}(\text{لا})^{\text{ف}(\text{لا})}$

دونوں طرف لوکارتم لینے سے $\text{لوک ما} = \text{ف}(\text{لا}) \, \text{لوک ف}(\text{لا})$

اوپر کی ان قسموں میں سے کسی بھی قسم میں ما (یعنے دیے ہوئے تفاعل) کا لوکارتم غیر معیّن صورت $۰ \times \infty$ اختیار کر لیگا۔

پس ۶ کے طریقہ سے اس غیر معیّن صورت کی قیمت دریافت کرنے سے دیے ہوئے تفاعل کے لوکارتم کی انتہا دستیاب ہو جاتی ہے۔ چونکہ یہ تفاعل کے انتہا کے لوکارتم کے مساوی ہے اس لیے تفاعل کی انتہا معلوم ہو جاتی ہے۔ کیونکہ

$$\text{اگر انتہا لوک}_{\text{و}}\,\text{ما} = \text{ا} \quad \text{تو} \quad \text{ما} = \text{و}^{\text{ا}}$$

توضیحی مثال (۱) $\underset{\text{لا}\to۰}{\text{نہا}} (\text{جم لا})^{\frac{۱}{\text{لا}}}$ دریافت کرو۔

حل $(\text{جم لا})^{\frac{۱}{\text{لا}}}$ کی قیمت ۱^{∞} ہو جاتی ہے جبکہ لا = ۰

$$\text{لوک}\,(\text{جم لا})^{\frac{۱}{\text{لا}}} = \frac{۱}{\text{لا}}\,\text{لوک جم لا} = \frac{۰}{۰} \quad \text{(یعنے غیر معیّن) جبکہ لا} = ۰$$

$$\text{لیکن ازروے ۵} \quad \underset{\text{لا}\to۰}{\text{نہا}} \frac{\text{لوک جم لا}}{\text{لا}} = \frac{-\text{مس}\,۰}{۱} = ۰$$

$$\text{چونکہ} \quad \underset{\text{لا}\to۰}{\text{نہا}}\,\text{لوک}\,(\text{جم لا})^{\frac{۱}{\text{لا}}} = ۰ \quad \text{اس لیے} \quad \text{لوک}\,\underset{\text{لا}\to۰}{\text{نہا}}\,(\text{جم لا})^{\frac{۱}{\text{لا}}} = ۰$$

$$\text{یعنے} \quad \underset{\text{لا}\to۰}{\text{نہا}}\,(\text{جم لا})^{\frac{۱}{\text{لا}}} = \text{و}^{۰} = ۱$$

توضیحی مثال (۲) $\underset{\text{لا}\to۰}{\text{نہا}} (\text{مم لا})^{\text{جب لا}}$ دریافت کرو۔

حل فرض کرو $\text{ما} = (\text{مم لا})^{\text{جب لا}}$ تب $\text{لوک ما} = \text{جب لا لوک مم لا} = ۰ \times \infty$ جبکہ لا = ۰

$$\text{پس ازروئے ۶} \quad \text{لوک ما} = \frac{\text{لوک مم لا}}{\text{قم لا}} = \frac{\infty}{\infty} \quad \text{جبکہ لا} = ۰$$

پس ازروے ع ۶ لوک ما = (− قم^۲ لا / مم لا) / (− قم لا مم لا) = جب لا / (لا جم^۲ لا) = ۰

جبکہ لا = ۰

یعنے لوک_و (مم لا)^{جب لا} = ۰ پس (مم لا)^{جب لا} = و^۰ = ۱

غیر متعین صورتوں سے متعلق متفرق مثالیں

ذیل کی غیر متعین صورتوں کی قیمتیں دریافت کرو :—

(۱) نہا_{لا ← ط/۲} مس لا / مس ۳ لا ، جواب = ۳

(۲) نہا_{لا ← ∞} (لا + لوک لا) / (لا لوک لا) ، جواب = ۰

(۳) نہا_{لا ← ۲} (۲ − لا) مس (ط لا / ۴) ، جواب = ۴/ط

(۴) نہا_{لا ← ۰} لا قم ۲ لا ، جواب = ۱/۲

(۵) نہا_{لا ← ۰} (۱/جب^۲ لا − ۱/لا^۲) ، جواب = ۱/۳

(۶) نہا_{لا ← ۰} [۱/(۲ لا) − ۱/(لا (و^{۳ لا} + ۱))] ، جواب = ۳/۴

(۷) نہا_{لا ← و} (لوک لا)^{۱/(لا − و)} ، جواب = و^{۱/و}

(۸) نہا_{لا ← ∞} ۳^لا جب (۲/۳^لا) ، جواب = ۲

(۹) $\underset{\text{لا}\to ۱}{\text{نہا}}\ (۱ - \text{لا})\ \text{مس}\ \frac{\pi\,\text{لا}}{۲}$ ، جواب $= \frac{۲}{\pi}$

(۱۰) $\underset{\text{لا}\to \frac{\pi}{۲}}{\text{نہا}}\ \left[\text{قط لا} - \frac{۱}{۱ - \text{جب لا}}\right]$ ، جواب $= \infty$

(۱۱) $\underset{\text{لا}\to \frac{\pi}{۲}}{\text{نہا}}\ (\text{جب لا})^{\text{قط لا}}$ ، جواب $= ۱$

(۱۲) $\underset{\text{لا}\to ۰}{\text{نہا}}\ (۱ + ۲\,\text{لا})^{\frac{۱}{\text{لا}}}$ ، جواب $= \text{و}^{۲}$

(۱۳) $\underset{\text{لا}\to ۱}{\text{نہا}}\ (۲ - \text{لا})^{\text{مس}\frac{\pi\,\text{لا}}{۲}}$ ، جواب $= \text{و}^{\frac{۲}{\pi}}$

(۱۴) $\underset{\text{لا}\to ۰}{\text{نہا}}\ (\text{و}^{۲\,\text{لا}} + ۲\,\text{لا})^{\frac{۱}{۴\,\text{لا}}}$ ، جواب $= \text{و}$

(۱۵) $\underset{\text{لا}\to \text{و}}{\text{نہا}}\ (\text{لوک لا})^{\frac{۱}{۱ - \text{لوک لا}}}$ ، جواب $= \frac{۱}{\text{و}}$

۱۰ ۔ اوسط قیمت کا وسیع تر مسئلہ ۔

فرض کرو مستقل س کی تعریف مساوات ذیل سے ہوتی ہے :۔

ف (ب) ۔ ف (ا) ۔ (ب ۔ ا) فَ (ا) ۔ ½ (ب ۔ ا)² س = ۰ ..... (۱)

اور فرض کرو کہ ف (لا) ایک ایسا تفاعل ہے جو (۱) کے سیدھے جانب کے رکن میں ب کے عوض لا لکھنے سے بنتا ہے ۔ یعنے

ف (لا) = ف (لا) ۔ ف (ا) ۔ (لا ۔ ا) فَ (ا) ۔ ½ (لا ۔ ا)² س (۲)

(۱) سے، ف (ب) = ۰ اور (۲) سے ف (ا) = ۰ پس رول کے مسئلہ سے (ملاحظہ ہو ۱) لا کی کم از کم ایک قیمت ا اور ب کے درمیان مثلاً لا۱ ایسی ہوگی جو فَ (لا) کو معدوم کردیگی ۔ بدیں وجہ، چونکہ

فَ (لا) = فَ (لا) ۔ فَ (ا) ۔ (لا ۔ ا) س

ہمیں حاصل ہوتا ہے نتیجہ فَ (لا۱) = فَ (لا۱) ۔ فَ (ا) ۔ (لا۱ ۔ ا) س = ۰

چونکہ فَ (لا۱) = ۰ اور فَ (ا) = ۰ اس لیے واضح ہے کہ فَ (لا) بھی رول کے مسئلہ کے شرائط کی تکمیل کرتا ہے لہذا اس کا مشتق یعنے فً (لا) کم از کم لا کی ایک قیمت مابین ا اور لا۱ مثلاً لا۲ کے لیے معدوم ہوجانا چاہیے، اور اس لیے لا۲ بھی ا اور ب کے درمیان واقع ہے ۔ لیکن

فً (لا) = فً (لا) ۔ س پس فً (لا۲) = فً (لا۲) ۔ س = ۰

اور س = فً (لا۲)

اس نتیجہ کو (۱) میں تعویض کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

ف (ب) = ف (ا) + (ب ۔ ا) فَ (ا) + $\frac{1}{\underline{|2}}$ (ب ۔ ا)² فً (لا۲)،

(ا < لا۲ < ب) ...(و)

اس طریقہ کو جاری رکھنے سے ہمیں یہ عام نتیجہ برآمد ہوتا ہے

$$\text{ف}(\text{ب}) = \text{ف}(\text{ا}) + \frac{(\text{ب}-\text{ا})}{\underline{|1}}\,\text{فَ}(\text{ا}) + \frac{(\text{ب}-\text{ا})^{2}}{\underline{|2}}\,\text{فً}(\text{ا})$$

$$+ \frac{(\text{ب}-\text{ا})^{3}}{\underline{|3}}\,\text{فٌ}(\text{ا}) + \cdots\cdots + \frac{(\text{ب}-\text{ا})^{\text{ن}-1}}{\underline{|\text{ن}-1}}\,\text{ف}^{(\text{ن}-1)}(\text{ا})$$

$$+ \frac{(\text{ب}-\text{ا})^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}}\,\text{ف}^{(\text{ن})}(\text{لا}') \quad (\text{ا} < \text{لا}' < \text{ب}) \cdots\cdots(\text{ز})$$

مساوات (ز) وسیع تر مسئلۂ اوسط قیمت یا وسیع تر مسئلۂ اوسط کہلاتی ہے۔

گیارہواں باب

معیاری ابتدائی صورتوں کے تکمّل کے قواعد

۱۔ تکمّل کا تصور بطور مقلوب عملِ تفرّق۔

جس طرح جمع کا مقلوب عمل تفریق ہے یا ضرب کا مقلوبِ عمل تقسیم یا کسی قوت تک بلند کرنے کا مقلوب عمل اصلوں کا حصول ہے اسی طرح تفرّق کا مقلوب عمل تکمّل ہے۔

ہم نے کتاب کے تفرقی احصاء والے حصّہ میں معلوم کیا ہے کہ کسی دیے ہوئے تفاعل ف (لا) کا مشتق فَ (لا) کس طرح دریافت کیا جاتا ہے۔ علامتوں کے ذریعہ یہ عمل بشکل

(فر / فر لا) ف (لا) = فَ (لا) ظاہر کیا جاتا ہے یا اگر

تفرقوں کی رقموں میں ظاہر کیا جائے تو بذریعہ فرف (لا) = فَ (لا) فرلا

تکملی احصاء میں اس کے مقلوب یا متعاکس عمل پر بحث کی جاتی ہے۔ یعنے یہ دریافت کرنے کی کوشش کی جاتی ہے کہ دیا ہوا تفاعل کسی دوسرے تفاعل کا مشتق ہے: علامتوں کے ذریعہ اس کو یوں ظاہر کیا جاسکتا ہے کہ اگر

مشتق فَ (لا) = فہ (لا) دیا جائے تو وہ تفاعل فہ (لا)
دریافت کیا جائے جس کا یہ مشتق ہے۔ چونکہ تکمّلی احصاء میں تفرق بکثرت
استعمال ہوتے ہیں اس لیے فرف (لا) = فَ (لا) فرلا = فہ (لا) فرلا لکھ کر
سوال ان الفاظ میں پیش کیا جا سکتا ہے کہ ”ایک تفاعل کا تفرق دیا
جاتا ہے دریافت کیا جائے کہ خود وہ تفاعل کیا ہے؟“
تفاعل ف (لا) جو اس طرح دریافت کیا جاتا ہے ’دیے ہوئے تفرقی جملہ کا
تکمّلہ کہلاتا ہے۔ اس کے دریافت کرنے کے عمل کو تکملانا یا تکمّل
کہتے ہیں اور اس عمل کا اظہار دیے ہوئے تفرقی جملہ کے آگے علامت تکمّل ∫
لکھ کر کیا جاتا ہے۔ جیسے

∫ فَ (لا) فرلا = ف (لا) (۱)

جو عبارت میں پڑھا جاتا ہے ”فَ (لا) فرلا کا تکملہ مساوی ہے ف (لا)
کے“ تفرق فرلا اس بات کو ظاہر کرتا ہے کہ لا عمل تکمّل کا متغیر ہے۔ مثلاً

(ا) اگر ف (لا) = لا^{۵} تو فَ (لا) فرلا = ۵ لا^{۴} فرلا اور
∫ ۵ لا^{۴} فرلا = لا^{۵}

(ب) اگر ف (لا) = مس لا تو فَ (لا) فرلا = قطۤ^{۲} لا فرلا اور
∫ قط^{۲} لا فرلا = مس لا

(ج) اگر ف (لا) = لوک لا تو فَ (لا) فرلا = $\frac{۱}{لا}$ فرلا اور
∫ $\frac{۱}{لا}$ فرلا = لوک لا

مندرجۂ بالا امور سے ظاہر ہے کہ تفرق اور تکمّل ایک دوسرے کے معکوس عمل ہیں۔
(۱) کو تفرق کرنے سے ’فر ∫ فَ (لا) فرلا = فَ (لا) فرلا .... (۲)
حاصل ہوتا ہے

اس میں فَ (لا)، فرلا کی قیمت [= فرف (لا)] تعویض کرنے سے

∫ فرف (لا) = ف (لا) ...... (۳) برآمد ہوتا ہے

پس بلحاظ نشانات عمل $\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}$ اور ∫ .... فرلا باہمدیگر مقلوب ہیں - یا اگر ہم فرقیے استعمال کر رہے ہوں تو فر اور ∫ علامتیں ایک دوسرے کی مقلوب ہیں -

جب فر کے بعد ∫ علامت لکھی جاتی ہے جیسا کہ (۲) میں تو وہ ایک دوسرے کو تلف کر دیتی ہیں - لیکن جب ∫ کے بعد علامت فر لکھی جاتی ہے جیسا کہ (۳) میں تو عام طور پر ایسا نہیں ہوتا - اس کی وجہ ذیل کی فصل میں تکمل کے مستقل کی جو تعریف کی گئی ہے اس کے ملاحظہ سے فوراً واضح ہو جائیگی -

۲ - تکمل کا مستقل - نامحدود تکملہ -

سابقہ فصل سے ظاہر ہے کہ

چونکہ فر (لا^۵) = ۵ لا^۴ فرلا پس ∫ ۵ لا^۴ فرلا = لا^۵

چونکہ فر (لا^۵ + ۳) = ۵ لا^۴ فرلا پس ∫ ۵ لا^۴ فرلا = لا^۵ + ۳

چونکہ فر (لا^۵ - ۸) = ۵ لا^۴ فرلا پس ∫ ۵ لا^۴ فرلا = لا^۵ - ۸

اسی طرح چونکہ فر (لا^۵ + ج) = ۵ لا^۴ جس میں ج کوئی ایک اختیاری مستقل ہے تو

∫ ۵ لا^۴ فرلا = لا^۵ + ج

ایسے مستقل کو تکمل کا مستقل کہتے ہیں وہ ایک عدد ہے جو تکمل کے

متغیر کا غیر تابع ہے

پس ∫ فَ (لا) فرلا = ف (لا) + ج

اور چونکہ مستقل ج غیر معلوم اور نا محدود ہے اس لیے

جملہ ف (لا) + ج کے لیے نام ∫ فَ (لا) فرلا کا نا محدود تکملہ

رکھا گیا ہے۔

یہ مسئلہ واضح ہے کہ اگر دو تفاعلوں میں ایک مستقل کا فرق ہے تو ان کا مشتق ایک ہی ہوگا۔

لیکن اس مسئلہ کا ضد بدیہی نہیں ہے یعنے اگر فہ (لا) ایک ایسا تفاعل ہے کہ اس کا مشتق ف (لا) ہے تو وہ تمام تفاعل جن کا مشتق ف (لا) ہے

فہ (لا) + ج کی شکل کے ہوتے ہیں جس میں ج کوئی ایک مستقل ہے۔

ہم اب ثابت کرینگے کہ اگر دو تفاعلوں کا مشتق ایک ہی ہو تو ان میں فرق یا تفاوت ایک مستقل ہوتا ہے۔

فرض کرو فہ (لا) اور پہ (لا) دو تفاعل ہیں جن کا مشتق ف (لا) ہے،

فہ (لا) - پہ (لا) کو مساوی ف (لا) کے لکھو

تب مفروضہ کی بناء پر فَ (لا) = فر/فرلا [فہ (لا) - پہ (لا)]

= ف (لا) - ف (لا) = ۰ ...... (۱)

لیکن اوسط قیمت کے مسئلہ کی رو سے

ف (لا + مف لا) ۔ ف (لا)

= مف لا فَ (لا + طہ ۰ مف لا)، ۰ < طہ < ۱

∴ ف (لا + مف لا) ۔ ف (لا) = ۰

[اس لیے کہ (۱) کی رُو سے ف (لا) کا مشتق لا کی تمام قیمتوں کے لیے صفر ہے]

لہذا ف (لا + مف لا) = ف (لا)

یعنے ف (لا) = فہ (لا) ۔ پہ (لا) کی قیمت میں کوئی تبدیلی نہیں ہوتی جبکہ لا میں اضافہ مف لا واقع ہوتا ہے۔ پس بالفاظ دیگر فہ (لا) اور پہ (لا) میں تفاوت صرف ایک مستقل کا ہے۔

کسی دی ہوئی صورت میں مستقل ج کی قیمت دریافت ہوسکتی ہے جبکہ ہمیں متغیر کی کسی قیمت کے لیے تکملہ کی قیمت معلوم ہو۔ آگے چل کر اس کی متعدد مثالوں کے ذریعہ توضیح کی جائیگی۔ یہاں ہم صرف یہ بتانا چاہتے ہیں کہ اگر کوئی تفرقی جملے دیے جائیں تو ان کے نا محدود تکملوں کو کس طرح دریافت کرسکتے ہیں۔

البتہ یہ فرض کرلیا جائیگا کہ ہر ایک مسلسل تفاعل کا ایک تکملہ موجود ہے لیکن اس امر کا باقاعدہ ثبوت اس کتاب کے حیطۂ بحث سے باہر ہے۔ ظاہر ہے کہ کسی بھی نا محدود تکمل کے نتیجہ کی تصدیق اس قاعدہ کے ذریعہ ہوسکتی ہے کہ اس تکمل کا تفرقی دیے ہوئے تفرقی جملہ کے مساوی ہونا چاہیے۔

۳۔ معیاری ابتدائی صورتوں کے تکمل کے قواعد۔ جیسا کہ

ہم نے اس کتاب احصاء کے آغاز میں دیکھا تفرقی احصاء عمل تفرق کے لیے ایک عام قاعدہ مہیا کر دیتا ہے۔ لیکن تکملی احصا سے ہمیں اس کے متناظر کوئی عام قواعد دستیاب نہیں ہوتا جس کی مدد سے فی الفور تکمل عمل میں لایا جا سکے۔ صرف یہی نہیں بلکہ بعض صورتوں میں ایسا بھی ہوتا ہے کہ اگرچہ ہمیں پہلے سے اس کا علم ہوتا ہے کہ دیے ہوئے تفرقی جملہ کا تکمل موجود ہے تاہم اس کا امکان ہے کہ ہم اس تکمل کو معلوم تفاعلوں کی رقموں میں فی الواقع دریافت نہ کر سکیں۔ ہر صورت کے لیے ایک خاص طریقۂ عمل کی ضرورت ہوتی ہے اور ہم کسی دیے ہوئے تفرقی جملہ کا تکمل عمل تفرق کے اپنی سابقہ معلومات کے توسط ہی سے دریافت کر سکتے ہیں۔ بالفاظ دیگر ہم اس سوال کے حل کرنے کی کوشش کرتے ہیں کہ وہ کونسا تفاعل ہے جس کو اگر تفرق کیا جائے تو دیا ہوا تفرقی جملہ حاصل ہوگا۔

بدیں وجہ معلوم تکملوں کی جدولیں تیار کر لی جاتی ہیں جو معیاری صورتوں کے نام سے موسوم ہیں۔ کسی دیے ہوئے تفرقی جملہ کا تکمل دریافت کرنے کے لیے اس جملہ کا ان معیاری صورتوں سے مقابلہ کر کے دیکھ لیا جاتا ہے کہ آیا وہ ان میں سے کسی ایک کے مماثل ہے کہ نہیں۔ اگر نہیں ہے تو ہم کوشش کرتے ہیں کہ اس کو مختلف طریقوں سے ان معیاری صورتوں میں سے کسی ایک صورت میں تحویل کریں۔ یہ طریقے مشق ہی سے ہاتھ آتے ہیں۔ اس کتاب کے آئندہ ابواب کا بیشتر حصہ ایسے تفاعلوں کے تکمل پر مشتمل ہوگا جو عملی مسائل کے حل کرنے میں اکثر استعمال ہوتے ہیں۔

ذیل کے دو قاعدے تفرقی جملوں کو معیاری صورتوں میں تحویل کرنے کے لیے بہت مفید ہیں:-

(۱) تفرقی جملوں کے کسی جبری مجموعہ کا تکمل ان جملوں کے فرداً فرداً تکملوں کا وہی جبری مجموعہ ہے۔

ثبوت - جملہ ∫ فرد + ∫ فرو - ∫ فرھ کو تفرق کرنے سے (جس میں د، و، ھ ایک واحد متغیر کے تفاعل ہیں۔

فرد + فرو - فرھ حاصل ہوتا ہے۔

پس ∫ (فرد + فرو - فرھ) = ∫ فرد + ∫ فرو - ∫ فرھ ..... (۱)

(ب) مستقل جزوِ ضربی علامت تکمل کے آگے لکھا جا سکتا ہے یا بعد۔

ثبوت - جملہ ا ∫ فرو کو تفرق کرنے سے

ا فرو حاصل ہوتا ہے

$$\text{پس} \int \text{ا فرو} = \text{ا} \int \text{فرو}$$

ذیل میں معیاری ابتدائی صورتوں کی ایک مختصر فہرست لکھی جاتی ہے اس کو بطور تکمل کے ضابطوں کے حفظ کر لینا چاہیے تاکہ ان کے ماثل تکملوں کی تعیین آسانی ہو سکے:-

معیاری ابتدائی صورتیں (بالفاظِ دیگر تکمل کے ضابطے)

(۱) $$\int \text{و}^{\text{ن}}\,\text{فرو} = \frac{\text{و}^{\text{ن}+\text{۱}}}{\text{ن}+\text{۱}} + \text{ج} \qquad (\text{ن} \neq -\text{۱})$$

$$\left[\text{چونکہ}\ \text{فر}\left(\frac{\text{و}^{\text{ن}+\text{۱}}}{\text{ن}+\text{۱}} + \text{ج}\right) = \text{و}^{\text{ن}}\,\text{فرن}\right.$$

$$\text{اس لیے} \int \text{و}^{\text{ن}}\,\text{فرو} = \frac{\text{و}^{\text{ن}+\text{۱}}}{\text{ن}+\text{۱}} + \text{ج}$$

یہ رابطہ ن کی تمام قیمتوں کے لیے باستثناء ن = -۱ کے صحیح ہے۔ کیونکہ جب ن = -۱ تو اس صورت میں صفر پر تقسیم کی ضرورت داعی ہوتی ہے۔ صورت ن = -۱ صورت (۲) میں رُونما ہوتی ہے۔]

(۲) $$\int \frac{\text{فرو}}{\text{و}} = \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{و} + \text{ج} = \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{و} + \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ج} = \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ج و}$$

$$\text{جس میں ج} = \text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ج}$$

(۳) $$\int \text{ا}^{\text{و}}\,\text{فرو} = \frac{\text{ا}^{\text{و}}}{\text{لوک}_{\text{و}}\,\text{ا}} + \text{ج}$$

(۴) $$\int \text{و}^{\text{و}}\,\text{فرو} = \text{ن}^{\text{و}} + \text{ج}$$

(۵) $$\int \text{جب و فرو} = -\,\text{جم و} + \text{ج}$$

(۶) ∫ جم و فر و = جب و + ج

(۷) ∫ قط^2 و فر و = مس و + ج

(۸) ∫ قم^2 و فر و = − مم و + ج

(۹) ∫ قط و مس و فر و = قط و + ج

(۱۰) ∫ قم و مم و فر و = − قم و + ج

(۱۱) ∫ مس و فر و = لوک_و قط و + ج

[چونکہ ∫ مس و فر و = ∫ (جب و فر و)/(جم و) = − ∫ (− جب و فر و)/(جم و) = − ∫ (فر (جم و))/(جم و)

= − لوک_و جم و + ج = لوک_و قط و + ج

کیونکہ − لوک جم و = − لوک (۱/قط و) = − لوک ۱ + لوک قط و = لوک قط و]

(۱۲) ∫ مم و فر و = لوک_و جب و + ج

[کیونکہ ∫ مم و فر و = ∫ (جم و فر و)/(جب و) = ∫ (فر (جب و))/(جب و) = لوک_و جب و + ج]

(۱۳) ∫ قط و فر و = لوک_و (قط و + مس و)

[چونکہ قط و = قط و (قط و + مس و)/(قط و + مس و) = (قط و مس و + قط^2 و)/(قط و + مس و)

∴ ∫ قط و فر و = ∫ (قط و مس و + قط^2 و)/(قط و + مس و) فر و = ∫ (فر (قط و + مس و))/(قط و + مس و)

= لوک_و (قط و + مس و) + ج]

(۱۴) ∫ قم و فر و = لوک_و (قم و − مم و) + ج

[چونکہ قم و = قم و (قم و − مم و)/(قم و − مم و)

$$= \frac{-\text{قم و مم و} + \text{قم}^{2}\text{و}}{\text{قم و} - \text{مم و}}$$

$$\therefore \int \text{قم و فرو} = \int \frac{-\text{قم و مم و} + \text{قم}^{2}\text{و}}{\text{قم و} - \text{مم و}}\, \text{فرو} = \int \frac{\text{فر}(\text{قم و} - \text{مم و})}{\text{قم} - \text{مم و}}$$

$$= \text{لوک}_{\text{و}}(\text{قم و} - \text{مم و}) + \text{ج} \;]$$

$$(15)\quad \int \frac{\text{فرو}}{\text{و}^{2} + \text{ا}^{2}} = \frac{1}{\text{ا}}\, \text{مس}^{-1} \frac{\text{و}}{\text{ا}} + \text{ج}$$

$$[\text{چونکہ}\quad \text{فر}\left(\frac{1}{\text{ا}} \text{مس} \frac{\text{و}}{\text{ا}} + \text{ج}\right) = \frac{1}{\text{ا}} \frac{\text{فر}\left(\frac{\text{و}}{\text{ا}}\right)}{\left(\frac{\text{و}}{\text{ا}}\right)^{2} + 1} = \frac{\text{فرو}}{\text{ا}^{2} + \text{و}^{2}} \;]$$

$$(16)\quad \int \frac{\text{فرو}}{\text{و}^{2} - \text{ا}^{2}} = \frac{1}{2\text{ا}}\, \text{لوک}_{\text{و}} \frac{\text{و} - \text{ا}}{\text{و} + \text{ا}} + \text{ج}$$

$$[\text{چونکہ}\quad \frac{1}{\text{و} - \text{ا}} - \frac{1}{\text{و} + \text{ا}} = \frac{2\text{ا}}{\text{و}^{2} - \text{ا}^{2}} \;\therefore\; \frac{1}{\text{و}^{2} - \text{ا}^{2}} = \frac{1}{2\text{ا}} \left(\frac{1}{\text{و} - \text{ا}} - \frac{1}{\text{و} + \text{ا}}\right)$$

$$\text{پس}\quad \int \frac{\text{فرو}}{\text{و}^{2} - \text{ا}^{2}} = \frac{1}{2\text{ا}} \int \frac{\text{فرو}}{\text{و} - \text{ا}} - \frac{1}{2\text{ا}} \int \frac{\text{فرو}}{\text{و} + \text{ا}}$$

$$= \frac{1}{2\text{ا}}\, \text{لوک}_{\text{و}}(\text{و} - \text{ا}) - \frac{1}{2\text{ا}}\, \text{لوک}_{\text{و}}(\text{و} + \text{ا}) = \frac{1}{2\text{ا}}\, \text{لوک}_{\text{و}} \frac{\text{و} - \text{ا}}{\text{و} + \text{ا}} + \text{ج} \;]$$

$$(16\,\text{ا})\quad \int \frac{\text{فرو}}{\text{ا}^{2} - \text{و}^{2}} = \frac{1}{2\text{ا}}\, \text{لوک}_{\text{و}} \frac{\text{ا} + \text{و}}{\text{ا} - \text{و}} + \text{ج}$$

$$[\text{چونکہ}\quad \frac{1}{\text{ا} + \text{و}} + \frac{1}{\text{ا} - \text{و}} = \frac{2\text{ا}}{\text{ا}^{2} - \text{و}^{2}} \;]$$

نوٹ - (۱۶) اور (۱۶ ا) کے ملاحظہ سے واضح ہے کہ

$$\int \frac{\text{فرو}}{\text{و}^{2} - \text{ا}^{2}} = -\int \frac{\text{فرو}}{\text{ا}^{2} - \text{و}^{2}}$$

$$(17)\quad \int \frac{\text{فرو}}{\sqrt{\text{ا}^{2} - \text{و}^{2}}} = \text{جب}^{-1} \frac{\text{و}}{\text{ا}} + \text{ج}$$

[چونکہ $\text{فر}\left(\text{جب}^{-1}\frac{\text{و}}{\text{ا}}+\text{ج}\right)=\frac{\text{فر}\left(\frac{\text{و}}{\text{ا}}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{\text{و}}{\text{ا}}\right)^{2}}}=\frac{\text{فرو}}{\sqrt{\text{ا}^{2}-\text{و}^{2}}}$

$$\therefore \int\frac{\text{فرو}}{\sqrt{\text{ا}^{2}-\text{و}^{2}}}=\text{جب}^{-1}\frac{\text{و}}{\text{ا}}+\text{ج}\ ]$$

(۱۸) $$\int\frac{\text{فرو}}{\sqrt{\text{و}^{2}\pm\text{ا}^{2}}}=\text{لوک}_{\text{و}}\left(\text{و}+\sqrt{\text{و}^{2}\pm\text{ا}^{2}}\right)+\text{ج}$$

[فرض کرو و = ا مس ی جس میں ی ایک نیا متغیر ہے

عمل تفرق سے فرو = ا قط^{2} ی فری پس بذریعۂ ابدال

$$\int\frac{\text{فرو}}{\sqrt{\text{و}^{2}+\text{ا}^{2}}}=\int\frac{\text{ا قط}^{2}\text{ی فری}}{\sqrt{\text{ا}^{2}\text{مس}^{2}\text{ی}+\text{ا}^{2}}}=\int\frac{\text{قط}^{2}\text{ی فری}}{\sqrt{\text{مس}^{2}\text{ی}+1}}$$

$$=\int\text{قط ی فری}=\text{لوک}_{\text{و}}\left(\text{قط ی}+\text{مس ی}\right)+\text{ج}$$ ..... از روئے (۱۳)

$$=\text{لوک}_{\text{و}}\left(\text{مس ی}+\sqrt{\text{مس}^{2}\text{ی}+1}\right)+\text{ج}$$

لیکن مس ی = $\frac{\text{و}}{\text{ا}}$ پس $\int\frac{\text{فرو}}{\sqrt{\text{و}^{2}+\text{ا}^{2}}}$

$$=\text{لوک}_{\text{و}}\left(\frac{\text{و}}{\text{ا}}+\sqrt{\frac{\text{و}^{2}}{\text{ا}^{2}}+1}\right)+\text{ج}$$

$$=\text{لوک}_{\text{و}}\frac{\text{و}+\sqrt{\text{و}^{2}+\text{ا}^{2}}}{\text{ا}}+\text{ج}$$

$$=\text{لوک}_{\text{و}}\left(\text{و}+\sqrt{\text{و}^{2}+\text{ا}^{2}}\right)-\text{لوک}_{\text{و}}\text{ا}+\text{ج}$$

ج = - لوک$_{\text{و}}$ ا + ج لکھنے سے حاصل ہوتا ہے رابطہ

$$\int\frac{\text{فرو}}{\sqrt{\text{و}^{2}+\text{ا}^{2}}}=\text{لوک}_{\text{و}}\left(\text{و}+\sqrt{\text{و}^{2}+\text{ا}^{2}}\right)+\text{ج}$$

اس طرح و = ا قط ی فرض کرنے سے فرو = ا قط ی مس ی فری

اور $$\int\frac{\text{فرو}}{\sqrt{\text{و}^{2}-\text{ا}^{2}}}=\int\frac{\text{ا قط ی مس ی فری}}{\sqrt{\text{ا}^{2}\text{قط}^{2}\text{ی}-\text{ا}^{2}}}=\int\text{قط ی فری}$$

$$= \text{لوک}_{\text{و}}(\text{قط ی} + \text{مس ی}) + \text{ج} = \text{لوک}_{\text{و}}\left(\text{قط ی} + \sqrt{\text{قط}^2\text{ی} - ۱}\right) + \text{ج}$$

$$= \text{لوک}_{\text{و}}\left(\frac{\text{و}}{\text{ا}} + \sqrt{\frac{\text{و}^2}{\text{ا}^2} - ۱}\right) + \text{ج} = \text{لوک}_{\text{و}}\left(\text{و} + \sqrt{\text{و}^2 - \text{ا}^2}\right) + \text{ج} \;]$$

(۱۹) $$\int \sqrt{\text{ا}^2 - \text{و}^2}\;\text{فرو} = \frac{\text{و}}{۲}\sqrt{\text{ا}^2 - \text{و}^2} + \frac{\text{ا}^2}{۲}\,\text{جب}^{-1}\frac{\text{و}}{\text{ا}} + \text{ج}$$

[فرض کرو $\text{و} = \text{ا جب ی}$ $\therefore$ $\text{فرو} = \text{ا جم ی فری}$

اور $\sqrt{\text{ا}^2 - \text{و}^2} = \sqrt{\text{ا}^2 - \text{ا}^2\text{جب}^2\text{ی}} = \text{ا جم ی}$

پس $$\int \sqrt{\text{ا}^2 - \text{و}^2}\;\text{فرو} = \text{ا}^2\int \text{جم}^2\text{ی فری} = \frac{\text{ا}^2}{۲}\int(\text{جم ۲ی} + ۱)\,\text{فری}$$

$$= \frac{\text{ا}^2}{۴}\,\text{جب ۲ی} + \frac{\text{ا}^2}{۲}\,\text{ی} + \text{ج}$$

و کی رقموں میں نتیجہ حاصل کرنے کے لیے، چونکہ $\text{ی} = \text{جب}^{-1}\frac{\text{و}}{\text{ا}}$ اور جب ۲ ی

$$= ۲\,\text{جب ی جم ی} = ۲\,\frac{\text{و}}{\text{ا}}\,\frac{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{و}^2}}{\text{ا}}$$

اس لیے عمل ابدال سے آخری جملہ $= \frac{\text{و}}{۲}\sqrt{\text{ا}^2 - \text{و}^2} + \frac{\text{ا}^2}{۲}\,\text{جب}^{-1}\frac{\text{و}}{\text{ا}} + \text{ج}$]

(۲۰) $$\int \sqrt{\text{و}^2 \pm \text{ا}^2}\;\text{فرو} = \frac{\text{و}}{۲}\sqrt{\text{و}^2 \pm \text{ا}^2} \pm \frac{\text{ا}^2}{۲}\,\text{لوک}_{\text{و}}\left(\text{و} + \sqrt{\text{و}^2 \pm \text{ا}^2}\right) + \text{ج}$$

[$\text{و} = \text{ا مس ی}$ لکھنے سے بہ آسانی معلوم ہو جاتا ہے کہ

(ا)' $$\int \sqrt{\text{و}^2 + \text{ا}^2}\;\text{فرو} = \int (\text{ا قط ی})\,\text{ا قط}^2\text{ی فری} = \text{ا}^2\int \text{قط}^3\text{ی فری}$$

آگے چل کر ہم بتائینگے کہ

(ب)' $$\int \text{قط}^3\text{ی فری} = \frac{۱}{۲}\,\text{قط ی مس ی} + \frac{۱}{۲}\,\text{لوک}(\text{قط ی} + \text{مس ی}) + \text{ج}$$

چونکہ $\text{مس ی} = \frac{\text{و}}{\text{ا}}$ اور $\text{قط ی} = \frac{\sqrt{\text{و}^2 + \text{ا}^2}}{\text{ا}}$ اس لیے (ا) اور (ب) سے حاصل ہوتا ہے

(ج)' $$\int \sqrt{\text{و}^2 + \text{ا}^2}\;\text{فرو} = \frac{\text{و}}{۲}\sqrt{\text{و}^2 + \text{ا}^2} + \frac{\text{ا}^2}{۲}\,\text{لوک}\left(\text{و} + \sqrt{\text{و}^2 + \text{ا}^2}\right) + \text{جَ}$$

جس میں $\text{جَ} = \text{ج} - \frac{\text{ا}^2}{۲}\,\text{لوک ا}$۔ پس رابطہ (۲۰) مستنبط ہو جاتا ہے جبکہ مثبت علامت لی جاتی ہے یعنی $\int \sqrt{\text{و}^2 + \text{ا}^2}\;\text{فرو} = \frac{\text{و}}{۲}\sqrt{\text{و}^2 + \text{ا}^2} + \frac{\text{ا}^2}{۲}\,\text{لوک}_{\text{و}}\left(\text{و} + \sqrt{\text{و}^2 + \text{ا}^2}\right) + \text{ج}$

منفی علامت کے ساتھ رابطہ (۲۰) ثابت کرنے کے لیے و = ا قطا ی لکھا جائے تو حاصل ہوگا

$$(\text{د})\quad \int \sqrt{\text{و}^2 - \text{ا}^2}\ \text{فرو} = \int (\text{ا مس ی})\ \text{ا قطا ی مس ی فری}$$

$$= \text{ا}^2 \int \text{مس}^2\,\text{ی قطا ی فری}$$

$$= \text{ا}^2 \int \text{قطا}^3\,\text{ی فری} - \text{ا}^2 \int \text{قطا ی فری}$$

(د) کا (ب) سے مقابلہ کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے،

$$(\text{ھ})\quad \int \sqrt{\text{و}^2 - \text{ا}^2}\ \text{فرو} = \frac{\text{ا}^2}{2}\,\text{قطا ی مس ی} - \frac{\text{ا}^2}{2}\,\text{لوک}\,(\text{قطا ی} + \text{مس ی}) + \text{ج}$$

لیکن قطا ی = $\frac{\text{و}}{\text{ا}}$ اور اس لیے مس ی = $\frac{\sqrt{\text{و}^2 - \text{ا}^2}}{\text{ا}}$ اس طرح (ھ) میں عمل ابدال سے

حاصل ہوتا ہے $\int \sqrt{\text{و}^2 - \text{ا}^2}\ \text{فرو} = \frac{\text{و}}{2}\sqrt{\text{و}^2 - \text{ا}^2} - \frac{\text{ا}^2}{2}\,\text{لوک}_{\text{ہ}}\left(\text{و} + \sqrt{\text{و}^2 - \text{ا}^2}\right) + \text{ج}$]

معیاری صورتوں (۱) اور (۲) سے متعلق توضیحی مثالیں

مندرجہ ذیل کو تکمل کرو:-

$$(1)\quad \int \left(6\,\text{لا}^3 + 3\,\text{لا}^2 - 4\,\text{لا} + 5\right)\text{فرلا}$$

$$= \int 6\,\text{لا}^3\,\text{فرلا} + \int 3\,\text{لا}^2\,\text{فرلا} - \int 4\,\text{لا فرلا} + \int 5\,\text{فرلا}$$

$$= 6\int \text{لا}^3\,\text{فرلا} + 3\int \text{لا}^2\,\text{فرلا} - 4\int \text{لا فرلا} + 5\int \text{فرلا}$$

$$= \frac{6\,\text{لا}^4}{4} + \frac{3\,\text{لا}^3}{3} - \frac{4\,\text{لا}^2}{2} + 5\,\text{لا} + \text{ج}$$

$$= \frac{3\,\text{لا}^4}{2} + \text{لا}^3 - 2\,\text{لا}^2 + 5\,\text{لا} + \text{ج}$$

$$(2)\quad \int \left(\frac{2\,\text{ا}}{\sqrt[3]{\text{لا}}} - \frac{3\,\text{ب}}{\sqrt{\text{لا}}} + 2\,\text{ج}\,\sqrt[3]{\text{لا}^2}\right)\text{فرلا}$$

$$= \int 2\,\text{ا}\,\text{لا}^{-\frac{1}{3}}\,\text{فرلا} - \int 3\,\text{ب}\,\text{لا}^{-\frac{1}{2}}\,\text{فرلا} + \int 2\,\text{ج}\,\text{لا}^{\frac{2}{3}}\,\text{فرلا}$$

= ۲ ا ∫ لا$^{\frac{۱}{۲}}$ فرلا − ۳ب ∫ لا$^{-\frac{۱}{۲}}$ فرلا + ۲ج ∫ لا$^{\frac{۳}{۲}}$ فرلا

= ۳ ا $\frac{\text{لا}^{\frac{۳}{۲}}}{\frac{۳}{۲}}$ − ۳ ب $\frac{\text{لا}^{\frac{۱}{۲}}}{\frac{۱}{۲}}$ + ۲ ج $\frac{\text{لا}^{\frac{۵}{۲}}}{\frac{۵}{۲}}$ + ج

= ۳ ا لا$^{\frac{۳}{۲}}$ − ۶ ب لا$^{\frac{۱}{۲}}$ + $\frac{۴}{۵}$ ج لا$^{\frac{۵}{۲}}$ + ج

(۳) ∫ (ب^{۲} − ا^{۲} لا^{۲})$^{\frac{۳}{۲}}$ لا فرلا

پہلے ہم اس تکمل کو معیاری صورت (۱) میں تبدیل کر لیتے ہیں۔ چنانچہ و = (ب^{۲} − ا^{۲} لا^{۲})

ن = $\frac{۳}{۲}$ اور فرو = − ۲ ا^{۲} لا فرلا

پس تکمل = − ∫ $\frac{\text{و}^{\frac{۳}{۲}}\ \text{فرو}}{۲\text{ا}^{۲}}$ = − $\frac{۱}{۲\text{ا}^{۲}}$ ∫ و$^{\frac{۳}{۲}}$ فرو = − $\frac{۱}{۲\text{ا}^{۲}}$ $\frac{\text{و}^{\frac{۵}{۲}}}{\frac{۵}{۲}}$ + ج

= − $\frac{۱}{۵\text{ا}^{۲}}$ و$^{\frac{۵}{۲}}$ + ج

= − $\frac{(\text{ب}^{۲} - \text{ا}^{۲}\text{لا}^{۲})^{\frac{۵}{۲}}}{۵\text{ا}^{۲}}$ + ج

(۴) ∫ $\frac{۳\text{لا} + ۱}{۳\text{لا} - ۴}$ فرلا

ذرا سا غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ عملِ تقسیم سے جملہ $\frac{۳\text{لا} + ۱}{۳\text{لا} - ۴}$ تکمل کے لیے آسان تر اور معیاری صورت (۲) کے مشابہ ہو جاتا ہے:—

چنانچہ تکمل = ∫ (۱ + $\frac{۵}{۳\text{لا} - ۴}$) فرلا = ∫ فرلا + ∫ $\frac{۵}{۳\text{لا} - ۴}$

= ∫ فرلا + $\frac{۵}{۳}$ ∫ $\frac{۳\ \text{فرلا}}{۳\text{لا} - ۴}$ = ∫ فرلا + $\frac{۵}{۳}$ ∫ $\frac{\text{فر}(۳\text{لا} - ۴)}{۳\text{لا} - ۴}$

= لا + $\frac{۵}{۳}$ لوک (۳لا − ۴) + ج

= لا + لوک (۳لا − ۴)$^{\frac{۵}{۳}}$ + ج

مثالیں

مندرجہ ذیل کو معیاری صورت $\int و^ن فرو$ میں تحویل کرکے تکمیل کرو:-

(۱) $\int (ا+لا)^۲ \sqrt{لا}\ فرلا$ جواب $= \frac{۲}{۳} ا^۲ لا^{\frac{۳}{۲}} + \frac{۴}{۵} ا لا^{\frac{۵}{۲}} + \frac{۲}{۷} لا^{\frac{۷}{۲}} + ج$

(۲) $\int \frac{(لا+۱)\ فرلا}{(لا^۲+۲لا+۳)^۳}$ 〃 $= -\frac{۱}{۴}(لا^۲+۲لا+۳)^{-۲} + ج$

(۳) $\int (ا^ن + ب)^۲ ا^ن\ فرلا$ 〃 $= \frac{۱}{۳ ن لوک ا}(ا^ن+ب)^۳ + ج$

(۴) $\int \frac{و^لا - و^{-لا}}{(و^لا + و^{-لا})^۲}\ فرلا$ 〃 $= -\frac{۱}{و^لا + و^{-لا}} + ج$

(۵) $\int \frac{مس^{-۱}لا\ فرلا}{۱+لا^۲}$ 〃 $= \frac{۱}{۲}(مس^{-۱}لا)^۲ + ج$

(۶) $\int \frac{لوک^۳ لا\ فرلا}{لا}$ 〃 $= \frac{۱}{۴} لوک^۴ لا + ج$

(۷) $\int جم^۴ ۲لا\ جب ۲لا\ فرلا$ 〃 $= -\frac{۱}{۱۰} جم^۵ ۲لا + ج$

مندرجہ ذیل کو معیاری صورت $\int \frac{فرو}{و}$ میں تحویل کرکے تکمیل کرو:-

(۸) $\int \frac{(۳لا+۱)\ فرلا}{۳لا^۲+۲لا-۱}$ جواب $= \frac{۱}{۲} لوک(۳لا^۲+۲لا-۱) + ج$

(۹) $\int \frac{ما\sqrt{ما^۲-۱}}{(ما^۲-۱)^{\frac{۳}{۲}} - ۴}\ فرما$ 〃 $= \frac{۱}{۳} لوک\left[(ما^۲-۱)^{\frac{۳}{۲}} - ۴\right] + ج$

(۱۰) $\int \frac{جب ط\ فرط}{۲جم ط + ۳}$ 〃 $= -\frac{۱}{۲} لوک(۲جم ط + ۳) + ج$

(۱۱) $\int \frac{فرط}{(۱+ط^۲)\ مس^{-۱}ط}$ 〃 $= لوک\ مس^{-۱}ط + ج$

(۱۲) $\int \frac{فرط}{(۴-ط^۲)^{\frac{۱}{۲}} جب^{-۱}\frac{ط}{۲}}$ 〃 $= لوک\ جب^{-۱}\frac{ط}{۲} + ج$

معیاری صورتوں (۳) اور (۴) سے متعلق توضیحی مثالیں

ثابت کرو :-

(۱) $\int \text{ا ب}^{\text{۲لا}}\, \text{فرلا} = \frac{\text{ا ب}^{\text{۲لا}}}{\text{۲ لوک ب}} + \text{ج}$

$\text{۲لا} = \text{و}$ لکھو تب $\text{فرو} = \text{۲ فرلا}$ اور $\int \text{ا ب}^{\text{۲لا}}\, \text{فرلا} = \frac{۱}{۲} \int \text{ا ب}^{\text{۲لا}}\, \text{فر(۲لا)}$

$= \frac{\text{ا}}{۲} \int \text{ب}^{\text{و}}\, \text{فرو} = \frac{\text{ا}}{۲} \cdot \frac{\text{ب}^{\text{و}}}{\text{لوک ب}} = \frac{\text{ا}}{۲} \cdot \frac{\text{ب}^{\text{۲لا}}}{\text{لوک ب}} + \text{ج}$

(۲) $\int \frac{\text{و}^{\sqrt{\text{لا}}}\, \text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}}} = \text{۲ و}^{\sqrt{\text{لا}}} + \text{ج}$

فرض کرو $\sqrt{\text{لا}} = \text{و}'$ ، $\text{فرو}' = \frac{۱}{۲\sqrt{\text{لا}}}\, \text{فرلا}$

$\therefore$ دیا ہوا تکمل $= \int \frac{\text{و}^{\text{و}'}}{\sqrt{\text{لا}}} (۲\sqrt{\text{لا}}\, \text{فرو}') = ۲ \int \text{و}^{\text{و}'}\, \text{فرو}' = \text{۲ و}^{\text{و}'} + \text{ج}$

$= \text{۲ و}^{\sqrt{\text{لا}}} + \text{ج}$

مثالیں

مندرجۂ ذیل کو معیاری صورتوں $\int \text{ا}^{\text{و}}\, \text{فرو}$ ، $\int \text{و}^{\text{و}}\, \text{فرو}$ میں تحویل کر کے تکمل کرو :-

(۱) $\int \frac{\text{م و}^{\sqrt{\text{م}^۲ + \text{۱}}}}{\sqrt{\text{م}^۲ + ۱}}\, \text{فرم}$ جواب $= \text{و}^{\sqrt{\text{م}^۲ + ۱}} + \text{ج}$

(۲) $\int (\text{۳ و})^{\text{مس لا}}\, \text{قط}^۲ \text{لا فرلا}$ ″ $= \frac{(\text{۳ و})^{\text{مس لا}}}{\text{۱} + \text{لوک}_{\text{و}} ۳} + \text{ج}$

(۳) $\int \frac{(\text{ب و})^{\frac{۱}{\text{لا}}}\, \text{فرلا}}{\text{لا}^۲}$ ″ $= -\frac{(\text{ب و})^{\frac{۱}{\text{لا}}}}{\text{۱} + \text{لوک}_{\text{و}} \text{ب}} + \text{ج}$

(۴) $\int \text{ا}^{\text{لا}}\, \text{و}^{\text{لا}}\, \text{فرلا}$ ″ $= \frac{\text{ا}^{\text{لا}}\, \text{و}^{\text{لا}}}{\text{۱} + \text{لوک}_{\text{و}} \text{ا}} + \text{ج}$

(۵) $\int (\text{م} - ۱)\, \text{و}^{\text{م}^۲ - \text{۲م}}\, \text{فرم}$ ″ $= \frac{۱}{۲}\, \text{و}^{\text{م}^۲ - \text{۲م}} + \text{ج}$

معیاری صورتوں (۵) تا (۱۴) سے متعلق مثالیں

ثابت کرو :-

(۱) ∫ فرلا / جم (۲لا + ۱) = − ½ جم (۲لا + ۱) + ج

(۲) ∫ فرلا / جم² √۳ لا = (۱/√۳) مس √۳ لا + ج

(۳) ∫ (لا − ۱) جب (۲لا² − ۴لا + ۱) فرلا = − ¼ جم (۲لا² − ۴لا + ۱) + ج

(۴) ∫ (مس ۲لا − ۱)² فرلا = ½ مس ۲لا + لوک جم ۲لا + ج

(۵) ∫ قط² لا فرلا / (۱ + مس لا) = لوک (۱ + مس لا) + ج

(۶) ∫ قم² (لوک لا²) فرلا / لا = − ½ مم (لوک لا²) + ج

(۷) ∫ فرط / (۲ جب ط/۲) = لوک (قم ط/۲ − مم ط/۲) + ج

(۸) ∫ جب (مس⁻¹ لا) فرلا / (۱ + لا) = − جم (مس⁻¹ لا) + ج

(۹) ∫ قم √لا مم √لا فرلا / √لا = −۲ قم √لا + ج

(۱۰) ∫ مس ۲ط / جم ۲ط فرط = ½ قط ۲ط + ج

(۱۱) ∫ مس ۲لا فرلا = ½ لوک قط ۲لا + ج

(۱۲) ∫ لا قط لا² فرلا = ½ لوک (قط لا² + مس لا²) + ج

(۱۳) $\int \text{قم}\,\sqrt{۳}\,\text{لا}\ \text{فرلا} = \frac{۱}{\sqrt{۳}}\,\text{لوک}\left(\text{قم}\,\sqrt{۳}\,\text{لا} - \text{مم}\,\sqrt{۳}\,\text{لا}\right) + \text{ج}$

(۱۴) $\int ۲\,\text{مم}\,۲\text{لا}\ \text{فرلا} = \frac{۱}{۲}\,\text{لوک}\ \text{جب}\,۲\text{لا} + \text{ج}$

(۱۵) $\int \frac{\text{قط}^{۲}\text{لا}\ \text{فرلا}}{\sqrt{\text{مس}^{۲}\text{لا}+۲}} = \text{لوک}\left(\text{مس}\,\text{لا} + \sqrt{\text{مس}^{۲}\text{لا}+۲}\right) + \text{ج}$

بقیہ یعنی (۱۵) سے (۲۰) تک کی معیاری صورتوں سے متعلق توضیحی مثالیں

تکمل کرو:-

(۱) $\int \frac{\text{فرلا}}{۲\text{لا}^{۲}+۱}$ یہ معیاری صورت (۱۵) کے مشابہ ہے

اور $= \frac{۱}{\sqrt{۲}}\int \frac{\text{فر}(\sqrt{۲}\,\text{لا})}{(\sqrt{۲}\,\text{لا})^{۲}+۱} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\,\text{مس}^{-۱}\sqrt{۲}\,\text{لا} + \text{ج}$

(۲) $\int \frac{\text{فرلا}}{۹\text{لا}^{۲}-۱} = \frac{۱}{۳}\int \frac{\text{فر}(۳\text{لا})}{(۳\text{لا})^{۲}-۱}$ یہ مشابہ ہے معیاری صورت (۱۶) کے

اور $= \frac{۱}{۳}\times\frac{۱}{۲}\,\text{لوک}_{\text{و}}\frac{۳\text{لا}-۱}{۳\text{لا}+۱} + \text{ج} = \frac{۱}{۶}\,\text{لوک}_{\text{و}}\frac{۳\text{لا}-۱}{۳\text{لا}+۱} + \text{ج}$

(۳) $\int \frac{۲\,\text{فرھ}}{۳-۸\text{ھ}^{۲}} = \frac{۲}{\sqrt{۸}}\int \frac{\text{فر}\sqrt{۸}\,\text{ھ}}{(\sqrt{۳})^{۲}-(\sqrt{۸}\,\text{ھ})^{۲}}$ جو مشابہ ہے معیاری صورت ۱۶ (ا) کے

اور $= \frac{۲}{\sqrt{۸}}\times\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}\,\text{لوک}_{\text{و}}\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۸}\,\text{ھ}}{\sqrt{۳}-\sqrt{۸}\,\text{ھ}} + \text{ج}$

$= \frac{۱}{۲\sqrt{۶}}\,\text{لوک}_{\text{و}}\frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۸}\,\text{ھ}}{\sqrt{۳}-\sqrt{۸}\,\text{ھ}} + \text{ج}$

(۴) $\int \frac{۴\,\text{لا}\ \text{فرلا}}{\sqrt{۲-\text{لا}^{۴}}} = \frac{۴}{۲}\int \frac{\text{فر}(\text{لا}^{۲})}{\sqrt{۲-(\text{لا}^{۲})^{۲}}}$ جو مشابہ ہے معیاری صورت (۱۷) کے

اور $= ۲\,\text{جب}^{-1}\frac{\text{لا}^{۲}}{\sqrt{۲}} + \text{ج}$

(۵) $\int\frac{\text{فرلا}}{\sqrt{۱۱-۶\,\text{لا}+\text{لا}^{۲}}} = \int\frac{\text{فرلا}}{\sqrt{(\text{لا}-۳)^{۲}+(\sqrt{۲})^{۲}}}$ جو مشابہ ہے معیاری صورت (۱۸) کے

اور $= \text{لوک}_{\text{و}}\left\{(\text{لا}-۳)+\sqrt{(\text{لا}^{۲}-۶\,\text{لا}+۹)+۲}\right\}+\text{ج}$

$= \text{لوک}_{\text{و}}\left\{(\text{لا}-۳)+\sqrt{\text{لا}^{۲}-۶\,\text{لا}+۱۱}\right\}+\text{ج}$

(۶) $\int\sqrt{۴-۹\,\text{لا}^{۲}}\ \text{فرلا} = \frac{۱}{۳}\int\sqrt{(۲)^{۲}-(۳\,\text{لا})^{۲}}\ \text{فر}(۳\,\text{لا})$

یہ مشابہ ہے معیاری صورت (۱۹) کے

اور $= \frac{۱}{۳}\left\{\frac{۳\,\text{لا}}{۲}\sqrt{۴-۹\,\text{لا}^{۲}}+\frac{۴}{۲}\,\text{جب}^{-1}\frac{۳\,\text{لا}}{۲}\right\}+\text{ج}$

$= \frac{\text{لا}}{۲}\sqrt{۴-۹\,\text{لا}^{۲}}+\frac{۲}{۳}\,\text{جب}^{-1}\frac{۳\,\text{لا}}{۲}+\text{ج}$

(۷) $\int\sqrt{۵\,\text{لا}^{۲}\pm ۳\,\text{و}^{۲}}\ \text{فرلا} = \frac{۱}{\sqrt{۵}}\int\frac{\text{فر}(\sqrt{۵}\,\text{لا})}{\sqrt{۵\,\text{لا}^{۲}\pm ۳\,\text{و}^{۲}}}$

یہ مشابہ ہے معیاری صورت (۲۰) کے

اور $= \frac{۱}{\sqrt{۵}}\left\{\frac{\sqrt{۵}\,\text{لا}}{۲}\sqrt{۵\,\text{لا}^{۲}\pm ۳\,\text{و}^{۲}}\pm\frac{۳\,\text{و}^{۲}}{۲}\,\text{لوک}_{\text{و}}\left(\sqrt{۵}\,\text{لا}+\sqrt{۵\,\text{لا}^{۲}\pm ۳\,\text{و}^{۲}}\right)\right\}+\text{ج}$

$= \frac{\text{لا}}{۲}\sqrt{۵\,\text{لا}^{۲}\pm ۳\,\text{و}^{۲}}\pm\frac{۳\,\text{و}^{۲}}{۲\sqrt{۵}}\,\text{لوک}_{\text{و}}\left(\sqrt{۵}\,\text{لا}+\sqrt{۵\,\text{لا}^{۲}\pm ۳\,\text{و}^{۲}}\right)+\text{ج}$

[نوٹ (۱) طالب علم نے دیکھ لیا ہوگا کہ معیاری صورت ۱۶ اور ۱۶ (ا) کے تکملوں میں $\int\frac{\text{فرو}}{\text{و}^{۲}-\text{ا}^{۲}} = -\int\frac{\text{فرو}}{\text{ا}^{۲}-\text{و}^{۲}}$ کا رشتہ ہے۔ پس ان میں سے حسب ضرورت کسی ایک صورت کا ضابطہ استعمال ہوسکتا ہے۔ جہاں تک ممکن ہو ایک ہی صورت کا ضابطہ استعمال کرنا مناسب ہے]

نوٹ (۲) طالب علم کو بطور خود حسب ذیل ضابطے اخذ کرنے میں کوئی دقت نہ ہونی چاہیے

$\int\frac{\text{فرو}}{\text{ا}^{۲}+\text{و}^{۲}} = \frac{۱}{\text{ا}}\,\text{مس}\,\frac{\text{و}}{\text{ا}}+\text{ج} = -\frac{۱}{\text{ا}}\,\text{مم}^{-1}\frac{\text{و}}{\text{ا}}+\text{ج}$

$$\int \frac{\text{فرو}}{\sqrt{\text{ا}^{۲} - \text{و}^{۲}}} = \text{جب}^{-۱}\frac{\text{و}}{\text{ا}} + \text{ج} = -\frac{۱}{\text{ا}}\,\text{جم}^{-۱}\frac{\text{و}}{\text{ا}} + \text{ج}$$

اور

$$\left[\int \frac{\text{فرو}}{\text{و}\sqrt{\text{و}^{۲} - \text{ا}^{۲}}} = \frac{۱}{\text{ا}}\,\text{قط}^{-۱}\frac{\text{و}}{\text{ا}} + \text{ج} = -\frac{۱}{\text{ا}}\,\text{قم}^{-۱}\frac{\text{و}}{\text{ا}} + \text{ج}\right]$$

مثالیں

ثابت کرو :-

(۱) $\int \frac{\text{فرو}}{\text{لا}^{۲} + ۲\text{لا} + ۵} = \frac{۱}{۲}\,\text{مس}^{-۱}\frac{\text{لا} + ۱}{۲} + \text{ج}$

[اشارہ $\text{لا}^{۲} + ۲\text{لا} + ۵ = \text{لا}^{۲} + ۲\text{لا} + ۱ + ۴ = (\text{لا} + ۱)^{۲} + (۲)^{۲}$]

(۲) $\int \frac{۲\,\text{فرلا}}{\sqrt{۲ + \text{لا} - \text{لا}^{۲}}} = ۲\,\text{جب}^{-۱}\left(\frac{۲\text{لا} - ۱}{۳}\right) + \text{ج}$

(۳) $\int \frac{\text{فرلا}}{۳\text{لا}^{۲} + ۴\text{لا} - ۷} = \frac{۱}{۱۰}\,\text{لوک}_{\text{و}}\left(\frac{۳\text{لا} - ۳}{۳\text{لا} + ۷}\right) + \text{ج}$

(۴) $\int \frac{\text{فرلا}}{۹\text{لا}^{۲} - ۶\text{لا} - ۸} = \frac{۱}{۱۸}\,\text{لوک}_{\text{و}}\left(\frac{۳\text{لا} - ۴}{۳\text{لا} + ۲}\right) + \text{ج}$

(۵) $\int \frac{۸\,\text{فرو}}{۱۶\text{و}^{۲} + ۸\text{و} + ۹} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}\,\text{مس}^{-۱}\left(\frac{۴\text{و} + ۱}{۲\sqrt{۲}}\right) + \text{ج}$

(۶) $\int \frac{۲\,\text{فرلا}}{\sqrt{۵ - ۴\text{لا} - ۳\text{لا}^{۲}}} = \frac{۲}{\sqrt{۳}}\,\text{جب}^{-۱}\left(\frac{۳\text{لا} + ۲}{\sqrt{۱۹}}\right) + \text{ج}$

(۷) $\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{۷\text{لا} + ۴\text{لا}^{۲}}} = \frac{۱}{۲}\,\text{لوک}\left(\text{لا} + \frac{۷}{۸} + \sqrt{\text{لا}^{۲} + \frac{۷\text{لا}}{۴}}\right) + \text{ج}$

(۸) $\int \frac{(۳\text{لا} - ۲)\,\text{فرلا}}{۱ - ۶\text{لا} - ۹\text{لا}^{۲}} = -\frac{۱}{۶}\,\text{لوک}\left(۱ - ۶\text{لا} - ۹\text{لا}^{۲}\right) + \frac{\sqrt{۲}}{۴}\,\text{لوک}\left(\frac{۳\text{لا} + ۱ - \sqrt{۲}}{۳\text{لا} + ۱ + \sqrt{۲}}\right) + \text{ج}$

(۹) $\int \frac{\text{لا}\,\text{فرلا}}{\sqrt{۲۷ + ۶\text{لا} - \text{لا}^{۲}}} = \sqrt{۲۷ + ۶\text{لا} - \text{لا}^{۲}} + ۳\,\text{جب}^{-۱}\left(\frac{\text{لا} - ۳}{۶}\right) + \text{ج}$

$$(\text{۱۰})\quad \int \frac{(\text{۳لا} - ۲)\,\text{فرلا}}{\sqrt{\text{۴لا}^{۲} - \text{۴لا} + ۵}} = \frac{۳}{۴}\sqrt{\text{۴لا}^{۲} - \text{۴لا} + ۵}$$

$$- \frac{۱}{۴}\,\text{لوک}\left(\text{۲لا} - ۱ + \sqrt{\text{۴لا}^{۲} - \text{۴لا} + ۵}\right) + \text{ج}$$

$$(\text{۱۱})\quad \int \sqrt{۵ - \text{۳لا}^{۲}}\ \text{فرلا} = \frac{\text{لا}}{۲}\sqrt{۵ - \text{۳لا}^{۲}} + \frac{۵}{۲\sqrt{۳}}\,\text{جب}^{-۱}\sqrt{\frac{۳}{۵}} + \text{ج}$$

$$(\text{۱۲})\quad \int \sqrt{\text{۳لا}^{۲} + \text{۴لا} - ۷}\ \text{فرلا} = \frac{۱}{۶}(\text{۳لا} + ۲)\sqrt{\text{۳لا}^{۲} + \text{۴لا} - ۷}$$

$$- \frac{۲۵\sqrt{۳}}{۱۸}\,\text{لوک}\left(\text{۳لا} + ۲ + \sqrt{\text{۹لا}^{۲} + \text{۱۲لا} - ۲۱}\right) + \text{ج}$$

$$(\text{۱۳})\quad \int \frac{(۸ - \text{۳لا})\,\text{فرلا}}{\sqrt{\text{۱۲لا} - \text{۴لا}^{۲} - ۵}} = -۲\sqrt{\text{۱۲لا} - \text{۴لا}^{۲} - ۵} + \frac{۹}{۲}\,\text{جب}^{-۱}\left(\frac{\text{۲لا} - ۳}{۲}\right) + \text{ج}$$

$$(\text{۱۴})\quad \int \sqrt{۱۰ - \text{۴لا} + \text{۴لا}^{۲}}\ \text{فرلا} = \frac{\text{۲لا} - ۱}{۴}\sqrt{۱۰ - \text{۴لا} + \text{۴لا}^{۲}}$$

$$+ \frac{۹}{۴}\,\text{لوک}\left(\text{۲لا} - ۱ + \sqrt{۱۰ - \text{۴لا} + \text{۴لا}^{۲}}\right) + \text{ج}$$

$$(\text{۱۵})\quad \int \frac{(\text{۲لا} + ۵)\,\text{فرلا}}{\text{لا}^{۲} + \text{۲لا} + ۵} = \text{لوک}\left(\text{لا}^{۲} + \text{۲لا} + ۵\right) + \frac{۳}{۲}\,\text{مس}^{-۱}\frac{(\text{لا} + ۱)}{۲} + \text{ج}$$

۳ — مثلثی تفرقے (Trigonometric differential)

بعض مثلثی تفرقے بکثرت استعمال ہوتے ہیں اور ساتھ ہی اس کے سادہ مثلثی تحویلوں کے ذریعہ معیاری صورتوں میں ڈھالے جاکر بآسانی تکمل کیے جاسکتے ہیں۔ یہاں ہم اُن تفرقوں اور ان کے تکمل کے طریقوں پر غور کرینگے۔

مثال $\int \text{جب}^{\text{م}}\text{ی}\ \text{جم}^{\text{ن}}\text{ی}\ \text{فری}$ کی تعیین

جبکہ م یا ن میں سے کوئی ایک مثبت طاق صحیح عدد ہوتا ہے (علی الرغم اس کے کہ دوسرا عدد خواہ کچھ ہی ہو) یہ تکمل سادہ استحالوں کے ذریعہ معیاری صورت (۱) میں لیعنی

$$\int \text{و}^{\text{ن}}\,\text{فرو} = \frac{\text{و}^{\text{ن}+۱}}{\text{ن}+۱} + \text{ج}$$

میں تبدیل کرکے عمل میں لایا جاسکتا ہے۔

مثلاً اگر م طاق ہے تو ہم لکھتے ہیں جب^{م} ی = جب$^{م-۱}$ ی جب ی

پس چونکہ م - ۱ جفت ہے تو مساوات کے بائیں جانب کے رکن کی پہلی رقم جب^{۲} ی کی کوئی طاقت ہوگی اور بذریعہ ضابطہ جب^{۲} ی = ۱ - جم^{۲} ی اس کو ہم جم ی کی طاقتوں میں ظاہر کرسکینگے - اس لیے تکملہ مذکور صورت ذیل میں لکھا جاسکیگا:

(۱) ∫ (مجموعہ جس میں جم ی کی رقمیں شامل ہونگی) جب ی فر ی

اور چونکہ جب ی فر ی = - فر (جم ی) ہر رقم جس کو تکمل کرنا ہوگا بصورت و^{ن} فر و ہوگی جس میں و = جم ی

اس طرح اگر ن ایک طاق عدد ہے تو جم^{ن} ی = جم$^{ن-۱}$ ی جم ی لکھو اور جم^{۲} ی = ۱ - جب^{۲} ی تعویض کرو - تب تکملہ بصورت

(۲) ∫ (مجموعہ جس میں جب ی کی رقمیں شامل ہونگی) جم ی فر ی

اور چونکہ جم ی فر ی = - فر (جب ی) ہر رقم جس کو تکمل کرنا ہوگا بصورت و^{ن} فر و ہوگی جس میں و = جب ی

توضیحی مثال (۱) ∫ $\frac{\text{جب}^{5}\text{ لا}}{\sqrt{\text{جم لا}}}$ دریافت کرو ۔

حل ۔ تکملہ = ∫ (جب^{۲} لا)^{۲} جب لا (جم لا)$^{-\frac{1}{2}}$ فر لا

= ∫ (۱ - جم^{۲} لا)^{۲} جب لا (جم لا)$^{-\frac{1}{2}}$ فر لا

= ∫ (۱ - ۲ جم^{۲} لا + جم^{۴} لا) جب لا (جم لا)$^{-\frac{1}{2}}$ فر لا

= ∫ { (جم لا)$^{-\frac{1}{2}}$ - ۲ (جم لا)$^{\frac{3}{2}}$ + (جم لا)$^{\frac{7}{2}}$ } جب لا فر لا

= - ∫ { (جم لا)$^{-\frac{1}{2}}$ - ۲ (جم لا)$^{\frac{3}{2}}$ + (جم لا)$^{\frac{7}{2}}$ } فر (جم لا)

= - { $\frac{(\text{جم لا})^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$ - ۲ $\frac{(\text{جم لا})^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}$ + $\frac{(\text{جم لا})^{\frac{9}{2}}}{\frac{9}{2}}$ } + ج

= - ۲ (جم لا)^{۱/۲} (۱ - ۲/۵ جم^۲ لا + جم^۴ لا / ۹) + ج

= - ۲ √جم لا (۱ - ۲/۵ جم^۲ لا + جم^۴ لا / ۹) + ج

توضیحی مثال (۲) ∫ مس^۳ و / قط^۲ و فرو دریافت کرو

حل - تکملہ = ∫ مس^۳ و جم^۲ و فرو = ∫ جب^۳ و جم^{-۱} فرو

= ∫ جب^۲ و جب و جم^{-۱} فرو = ∫ (۱ - جم^۲ و) جب و (جم و)^{-۱} فرو

= ∫ جب و جم^{-۱} فرو - ∫ جم و جب و فرو

= - ∫ (جم و)^{-۱} فر (جم و) + ∫ جم و فر (جم و)

= - ∫ فر (جم و) / جم و + (جم و)^۲ / ۲ + ج

= - لوک جم و + ۱/۲ جم^۲ و + ج

توضیحی مثال (۳) ∫ جم^۳ ۲لا/۳ فرلا دریافت کرو

حل - تکملہ = ∫ جم^۲ ۲لا/۳ جم ۲لا/۳ فرلا = ∫ (۱ - جب^۲ ۲لا/۳) جم ۲لا/۳ فرلا

= ∫ (جم ۲لا/۳ - جب^۲ ۲لا/۳ جم ۲لا/۳) فرلا

= ۳/۲ ∫ جم ۲لا/۳ فر ۲لا/۳ - ۳/۲ ∫ (جب ۲لا/۳)^۲ فر (جب ۲لا/۳)

= ۳/۲ جب ۲لا/۳ - ۳/۲ (جب ۲لا/۳)^۳ / ۳ + ج

= ۳/۲ جب (۲لا/۳) - ۱/۲ جب^۳ (۲لا/۳) + ج

مثالیں

مندرجۂ ذیل نتائج حاصل کرو:-

(۱) ∫ جب^۲ لا جم^۵ لا فرلا = جب^۳ لا / ۳ − ۲ جب^۵ لا / ۵ + جب^۷ لا / ۷ + ج

(۲) ∫ (جب ۲لا / جم^۳ ۲لا) فرلا = ۱/۴ قط^۲ ۲لا + ج

(۳) ∫ جب^۳ ۳ا √(جم ۳ا) فرا = ۲/(۳۷) جم^(۷/۲) ۳ا − ۲/(۳۳) جم^(۳/۲) ۳ا + ج

(۴) ∫ (مس لا / √قط لا) فرلا = − ۲ √جم لا + ج

(۵) ∫ جب^۵ ط/۵ فرط = ۱۰/۳ جم^۳ ط/۵ − ۵ جم ط/۵ − جم^۵ ط/۵ + ج

(ب) ∫ مس^ن ی فری یا ∫ ظم^ن ی فری کی تعیین

ان صورتوں کا تکمل سابقہ صورت یعنے (۲) کے تکمل کے لیے جو طریقہ اختیار کیا گیا تھا اس کے مشابہ طریقہ سے بآسانی دریافت ہو سکتا ہے جبکہ ن ایک صحیح عدد ہے، چنانچہ

∫ مس^ن ی فری = ∫ مس^(ن−۲) ی مس^۲ ی = ∫ مس^(ن−۲) ی (قط^۲ ی − ۱) فری

= ∫ مس^(ن−۲) ی قط^۲ ی − ∫ مس^(ن−۲) ی فری

= ∫ مس^(ن−۲) ی فر(مس ی) − ∫ مس^(ن−۴) ی (قط^۲ ی − ۱) فری

= ∫ مس^(ن−۲) ی فر(مس ی) − ∫ مس^(ن−۴) ی قط^۲ ی فری
　+ ∫ مس^(ن−۴) ی فری

= ∫ مس^(ن−۲) ی فر(مس ی) + ∫ مس^(ن−۴) ی فر(مس ی)
　+ ∫ مس^(ن−۴) ی فری

= (مس ی)^(ن−۱) / (ن−۱) − (مس ی)^(ن−۳) / (ن−۳) + ∫ مس^(ن−۴) ی فری + ج

اسی طرح عمل جاری رہے یہاں تک کہ سب سے آخر جو رقم $\int \text{مس}^{\text{ن}-\text{م}}\,\text{ء}\ \text{فر ء}$ حاصل ہو
اس میں ن - م = ۲ یا ۱ بلطور توضیحی مثال

$$(1)\quad \int \text{مس}^{6}\text{ط فر ط} = \int \text{مس}^{4}\text{ط مس}^{2}\text{ط فر ط} = \int \text{مس}^{4}\text{ط}\,(\text{قط}^{2}\text{ط} - 1)\,\text{فر ط}$$

$$= \int \text{مس}^{4}\text{ط قط}^{2}\text{ط فر ط} - \int \text{مس}^{4}\text{ط فر ط} = \int \text{مس}^{4}\text{ط فر}\,(\text{مس ط})$$

$$- \int \text{مس}^{2}\text{ط}\,(\text{قط}^{2}\text{ط} - 1)\,\text{فر ط}$$

$$= \int \text{مس}^{4}\text{ط فر}\,(\text{مس ط}) - \int \text{مس}^{2}\text{ط فر}\,(\text{مس ط}) + \int \text{مس}^{2}\text{ط فر ط}$$

$$= \int \text{مس}^{4}\text{ط فر}\,(\text{مس ط}) - \int \text{مس}^{2}\text{ط فر}\,(\text{مس ط}) + \int \text{قط}^{2}\text{ط فر ط} - \int \text{فر ط}$$

$$= \frac{1}{5}\text{مس}^{5}\text{ط} - \frac{1}{3}\text{مس}^{3}\text{ط} + \text{مس ط} - \text{ط} + \text{ج}$$

اسی طرح باسانی ثابت ہو سکتا ہے کہ

$$\int \text{مس}^{5}\text{ط فر ط} = \frac{1}{4}\text{مس}^{4}\text{ط} - \frac{1}{2}\text{مس}^{2}\text{ط} + \text{لوک قط ط} + \text{ج}$$

$\int \text{مم}^{\text{ن}}\,\text{ء}\ \text{فر ء}$ کی تعیین کے لیے بھی ایسا ہی عمل کیا جاتا ہے

چنانچہ $\int \text{مم}^{\text{ن}}\,\text{ء فر ء} = \int \text{مم}^{\text{ن}-2}\,\text{ء مم}^{2}\text{ء فر ء} = \int \text{مم}^{\text{ن}-2}\,\text{ء}\,(\text{قم}^{2}\text{ء} - 1)\,\text{فر ء}$

اور بالآخر $= -\frac{(\text{مم ء})^{\text{ن}-1}}{\text{ن}-1} + \frac{(\text{مم ء})^{\text{ن}-3}}{\text{ن}-3} + \int \text{مم}^{\text{ن}-4}\,\text{ء فر ء} + \text{ج}$

بطور توضیحی مثال

$$\int \text{مم}^{5}\frac{\text{ع}}{3}\,\text{فر ع} = \int \text{مم}^{3}\frac{\text{ع}}{3}\left(\text{قم}^{2}\frac{\text{ع}}{3} - 1\right)\text{فر ع}$$

$$= \int \text{مم}^{3}\frac{\text{ع}}{3}\,\text{قم}^{2}\frac{\text{ع}}{3}\,\text{فر ع} - \int \text{مم}^{3}\frac{\text{ع}}{3}\,\text{فر ع}$$

$$= -3\int \text{مم}^{3}\frac{\text{ع}}{3}\,\text{فر}\left(\text{مم}\frac{\text{ع}}{3}\right) - 3\int \text{مم}\frac{\text{ع}}{3}\,\text{قم}\frac{\text{ع}}{3}\,\text{فر}\frac{\text{ع}}{3} + 3\int \text{مم}\frac{\text{ع}}{3}\,\text{فر}\frac{\text{ع}}{3}$$

= ۳ ∫ مم^{۳} ع/۳ فر (مم ع/۳) - ۳ مم ع/۳ فر (مم ع/۳) + ۳ ∫ مم ع/۳ فر ع/۳

= - ۳/۴ مم^{۴} ع/۳ + ۳/۲ مم^{۲} ع/۳ + ۳ لوک جب ع/۳ + ج

(ج) ∫ قط^{ن} ء فر ء یا ∫ قم^{ن} ء فر ء کی تعیین۔

ن جب ایک مثبت جفت صحیح عدد ہوتا ہے تو ان تکملوں کی قیمت آسانی سے معلوم کرلی جاسکتی ہے۔ سب سے پہلے ان تکملوں کو بصورت ذیل لکھا جائے:

قط^{ن} ء = قط$^{ن-۲}$ ء قط^{۲} ء = (مس^{۲} ء + ۱)$^{\frac{ن}{۲}-۱}$ قط^{۲} ء ،

یا قم^{ن} ء = قم$^{ن-۲}$ ء قم^{۲} ء = (مم^{۲} ء + ۱)$^{\frac{ن}{۲}-۱}$ قم^{۲} ء

ذیل کی مثال سے بقیہ طریقۂ عمل واضح ہوجائیگا:

∫ قط^{۶} ء فر ء = ∫ (مس^{۲} ء + ۱)^{۲} قط^{۲} ء فر ء = ∫ (مس^{۴} ء + ۲ مس^{۲} ء + ۱) قط^{۲} ء فر ء

= ∫ مس^{۴} ء قط^{۲} ء فر ء + ۲ ∫ مس^{۲} ء قط^{۲} ء فر ء + ∫ قط^{۲} ء فر ء

= ∫ مس^{۴} ء فر (مس ء) + ۲ ∫ مس^{۲} ء فر (مس ء) + ∫ قط^{۲} ء فر ء

= مس^{۵} ء/۵ + ۲ مس^{۳} ء/۳ + مس ء + ج

(د) ∫ مس^{م} ء قط^{ن} ء فر ء یا ∫ مم^{م} ء قم^{ن} ء فر ء کی تعیین۔

جبکہ ن ایک مثبت جفت صحیح عدد ہوتا ہے تو سابقہ صورت کی طرح عمل کیا جاتا ہے۔

مثلاً ∫ مس$^{\frac{۲}{۳}}$ لا قط^{۴} لا فر لا کی تعیین میں قط^{۴} لا کے عوض (مس^{۲} لا + ۱) قط^{۲} لا لکھنے سے

تکمل = ∫ مس$^{\frac{۲}{۳}}$ لا مس^{۲} لا قط^{۲} لا فر لا + ∫ مس$^{\frac{۲}{۳}}$ لا قط^{۲} لا فر لا

= ∫ مس$^{۷/۲}$ لا فر (مس لا) + ∫ مس$^{۳/۲}$ فر (مس لا)

= $\frac{۲}{۹}$ مس$^{۹/۲}$ لا + $\frac{۲}{۵}$ مس$^{۵/۲}$ + ج

جبکہ ن ایک طاق عدد ہوتا ہے تو ذیل کی مثال کی طرح عمل کیا جا سکتا ہے۔

توضیحی مثال۔

∫ مس^{۵} لا قط$^{۷/۲}$ لا فرلا = مس^{۴} لا مس لا قط لا قط$^{۵/۲}$ لا فرلا

= ∫ (قط^{۲} لا - ۱)^{۲} قط$^{۵/۲}$ لا (مس لا قط لا) فرلا

= ∫ (قط$^{۹/۲}$ لا - ۲ قط$^{۵/۲}$ لا + قط$^{۱/۲}$ لا) فر (قط لا)

= $\frac{۲}{۱۱}$ قط$^{۱۱/۲}$ لا - $\frac{۴}{۷}$ قط$^{۷/۲}$ لا + $\frac{۲}{۳}$ قط$^{۳/۲}$ لا + ج

= ۲ قط$^{۳/۲}$ لا ($\frac{\text{قط}^{۴}\text{ لا}}{۱۱}$ - $\frac{۲\text{ قط}^{۲}\text{ لا}}{۷}$ + $\frac{۱}{۳}$) + ج

مثالیں

مندرجۂ ذیل تکملوں کو ثابت کرو :-

(۱) ∫ مس^{۳} ۳ط فرط = $\frac{۱}{۶}$ مس^{۲} ۳ط + $\frac{۱}{۳}$ لوک جم ۳ط + ج

(۲) ∫ ($\frac{\text{مس لا}}{\text{جم لا}}$)^{۴} فرلا = $\frac{۱}{۷}$ مس^{۷} لا + $\frac{۱}{۵}$ مس^{۵} لا + ج

(۳) ∫ $\frac{\text{فرلا}}{\text{جب}^{۲}\text{ لا جم}^{۴}\text{ لا}}$ = - ظم لا + ۲ مس لا + $\frac{۱}{۳}$ مس^{۳} لا + ج

(۴) ∫ قط^{۶} لا مس$^{-۴}$ لا فرلا = مس لا - $\frac{۱}{۳}$ ظم^{۳} لا - ۲ ظم لا + ج

(۵) ∫ (مس ع + ظم ع)^{۳} فرع = $\frac{۱}{۲}$ (مس^{۲} ع - ظم^{۲} ع) + ۲ لوک مس ع + ج

(۵) $\int$ جب^م د جم^ن د فرد کی تعیین ضعفی زاویوں کے ذریعہ سے۔

جبکہ م یا ن ایک مثبت طاق صحیح عدد ہوتا ہے تو سب سے مختصر طریقہ حل وہ ہے جس کی توضیح صورت (۴) میں کی گئی ہے۔ جبکہ م اور ن دونوں مثبت جفت صحیح عدد ہوں تو دیا ہوا تفرقی جملہ مناسب مثلثی ابدالوں کے ذریعہ ایک ایسے جملہ میں مستحیل کیا جا سکتا ہے جس میں ضعفی زاویوں کی جیوب اور جیوب التمام شریک ہونگی۔ اس استحالہ کے بعد اس کا تکمل عمل میں لایا جائیگا۔ بدیں غرض مندرجۂ ذیل مثلثی ضابطے استعمال کیے جاتے ہیں:۔

$$\text{جب د جم د} = \tfrac{1}{2}\,\text{جب ۲د}$$

$$\text{جب}^2\text{ د} = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\,\text{جم ۲د}$$

$$\text{جم}^2\text{ د} = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,\text{جم ۲د}$$

توضیحی مثال (۱) ثابت کرو کہ

$$\int \text{جم}^4\text{لا فرلا} = \frac{\text{۳لا}}{8} + \frac{\text{جب ۲لا}}{4} + \frac{\text{جب ۴لا}}{32} + \text{ج}$$

حل۔ $\int \text{جم}^4\text{لا فرلا} = \int \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,\text{جم ۲لا}\right)^2 \text{فرلا}$

$$= \int \left(\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{2}\,\text{جم ۲لا} + \tfrac{1}{4}\,\text{جم}^2\text{ ۲لا}\right) \text{فرلا}$$

$$= \tfrac{1}{4}\int \text{فرلا} + \tfrac{1}{4}\int \text{جم ۲لا فر(۲لا)} + \tfrac{1}{4}\int \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,\text{جم ۴لا}\right) \text{فرلا}$$

$$= \frac{\text{لا}}{4} + \frac{\text{جب ۲لا}}{4} + \frac{\text{لا}}{8} + \frac{\text{جب ۴لا}}{32} + \text{ج}$$

$$= \frac{\text{۳لا}}{8} + \frac{\text{جب ۲لا}}{4} + \frac{\text{جب ۴لا}}{32} + \text{ج}$$

توضیحی مثال (۲) بتاؤ کہ

∫ جب² ۲لا جم² ۲لا فرلا = ۱/۸ (۱ - جب ۸لا / ۸) + ج

حل۔ تکملہ = ۱/۴ ∫ (۲ جب ۲لا جم ۲لا)² فرلا = ۱/۴ ∫ (جب² ۴لا) فرلا

= ۱/۴ ∫ (۱/۲ - ۱/۲ جم ۸لا) فرلا = لا/۸ - جب ۸لا / ۶۴ + ج

(۹) ∫ جب م لا جم ن لا فرلا، ∫ جب م لا جب ن لا فرلا، ∫ جم م لا جم ن لا فرلا کی تعیین جبکہ م ≠ ن

علم مثلث کا ضابطہ جب م لا جم ن لا = ۱/۲ جب (م+ن) لا + ۱/۲ جب (م-ن) لا استعمال کرنے سے

∫ جب م لا جم ن لا فرلا = ۱/۲ ∫ جب (م+ن) لا فرلا + ۱/۲ ∫ جب (م-ن) لا فرلا

= - جم (م+ن) لا / ۲(م+ن) - جم (م-ن) لا / ۲(م-ن) + ج

اسی طرح ∫ جب م لا جب ن لا فرلا = ۱/۲ ∫ {جم (م-ن) لا - جم (م+ن) لا} فرلا

= جب (م-ن) لا / ۲(م-ن) - جب (م+ن) لا / ۲(م+ن) + ج

اور ∫ جم م لا جم ن لا فرلا = ۱/۲ ∫ {جم (م+ن) لا + جم (م-ن) لا} فرلا

= جب (م+ن) لا / ۲(م+ن) + جب (م-ن) لا / ۲(م-ن) + ج

مثالیں

ثابت کرو:

(۱) $\int \text{جب}^{6}\text{طہ}\,\text{فرطہ} = \frac{1}{16}\left(5\,\text{طہ} - 4\,\text{جب}\,2\,\text{طہ} + \frac{\text{جب}^{3}\,2\,\text{طہ}}{3} + \frac{3\,\text{جب}\,4\,\text{طہ}}{4}\right) + \text{ج}$

(۲) $\int \text{جم}^{6}\text{طہ}\,\text{فرطہ} = \frac{1}{16}\left(5\,\text{طہ} + 4\,\text{جب}\,2\,\text{طہ} - \frac{\text{جب}^{3}\,2\,\text{طہ}}{3} + \frac{3\,\text{جب}\,4\,\text{طہ}}{4}\right) + \text{ج}$

(۳) $\int \text{جب}^{2}\frac{\text{طہ}}{2}\,\text{جم}^{2}\frac{\text{طہ}}{2}\,\text{فرطہ} = \frac{1}{8}\left(\frac{\text{طہ}}{2} - \frac{\text{جب}\,2\,\text{طہ}}{4} + \frac{\text{جب}^{3}\,\text{طہ}}{3}\right) + \text{ج}$

(۴) $\int \text{جب}\,5\,\text{لا}\,\text{جم}\,3\,\text{لا}\,\text{فرلا} = -\frac{\text{جم}\,8\,\text{لا}}{16} - \frac{\text{جم}\,2\,\text{لا}}{4} + \text{ج}$

(۵) $\int \text{جب}\,7\,\text{لا}\,\text{جب}\,4\,\text{لا}\,\text{فرلا} = \frac{\text{جب}\,3\,\text{لا}}{6} - \frac{\text{جب}\,11\,\text{لا}}{22}$

(۶) $\int \text{جم}\,4\,\text{لا}\,\text{جم}\,3\,\text{لا}\,\text{فرلا} = \frac{\text{جب}\,7\,\text{لا}}{14} + \frac{\text{جب}\,\text{لا}}{2} + \text{ج}$

۴ ۔ مثلثی ابدال کے ذریعہ ایسے جملوں کا تکمل جن میں $\sqrt{\text{ا}^2 - \text{ی}^2}$ یا $\sqrt{\text{ی}^2 \pm \text{ا}^2}$ شریک ہو ۔

اکثر صورتوں میں ایسے جملوں کے تکمل کا سہل ترین طریقہ یہ ہوتا ہے کہ متغیر کو ذیل کی طرح تبدیل کر دیا جائے ۔

اگر $\sqrt{\text{ا}^2 - \text{ی}^2}$ شریک ہو تو $\text{ی} = \text{ا}\,\text{جب}\,\text{ی}$ لکھا جائے

اگر $\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ی}^2}$ شریک ہو تو $\text{ی} = \text{ا}\,\text{مس}\,\text{ی}$ لکھا جائے

اور اگر $\sqrt{\text{ی}^2 - \text{ا}^2}$ شریک ہو تو $\text{ی} = \text{ا}\,\text{قط}\,\text{ی}$ لکھا جائے

واضح ہو کہ معیاری صورتوں ۱۵ تا ۲۰ کے تکملوں میں یہ مثلثی ابدال استعمال کیے گئے تھے ۔ ایسا کرنے سے علامت جذر ساقط ہو جاتی ہے ۔ کیونکہ

جملہ $\sqrt{\text{ا}^2 - \text{ی}^2}$ تحویل مصرحہ سے $\text{ا}\,\text{جم}\,\text{ی}$ ہو جاتا ہے

" $\sqrt{\text{ا}^2 + \text{ی}^2}$ " $\text{ا}\,\text{قط}\,\text{ی}$ "

اور " $\sqrt{\text{ی}^2 - \text{ا}^2}$ " $\text{ا}\,\text{مس}\,\text{ی}$ "

توضیحی مثال (۱) ∫ (√(۵ - لا²) فرلا) / لا² دریافت کرو۔

حل - فرض کرو ا² = ۵ اور لا = ا جب ی

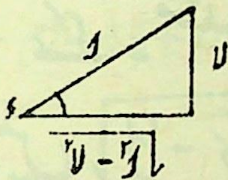
∴ √(۵ - لا²) = ا √(۱ - جب² ی) = ا جم ی

اور فرلا = ا جم ی فری

∴ ∫ (√(۵ - لا²) / لا²) فرلا = ∫ (ا جم ی ا جم ی) / (ا² جب² ی) فری = ∫ ظم² ی فری

= ∫ (قم² ی - ۱) فری = - ظم ی - ی + ج

شکل ۴۹ میں ایک زاویہ قائمہ والا مثلث کھینچا گیا ہے جس میں عمود لا ہے اور وتر ا



شکل ۴۹

پس قاعدہ = √(ا² - لا²)

اس لیے ظم ی = √(ا² - لا²) / لا = √(۵ - لا²) / لا

اور تکملہ = - √(۵ - لا²) / لا - جب⁻¹ (لا / √۵) + ج

توضیحی مثال (۲) ∫ فرلا / (لا² + ۳)^(۳/۲) دریافت کرو۔

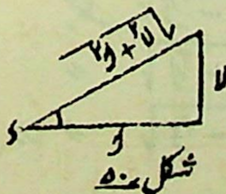
حل - فرض کرو ا² = ۳ اور لا = ا مس ی ∴ (لا² + ۳)^(۳/۲) = ا³ قط³ ی

اور فرلا = ا قط² ی فری

اور تکملہ = ∫ (ا قط² ی فری) / (ا³ قط³ ی) = ∫ فری / (ا² قط ی) = (۱/ا²) ∫ جم ی فری

= (۱/ا²) جب ی = (۱/۳) لا / √(لا² + ۳) + ج

ملاحظہ ہو شکل ۵۰



شکل ۵۰

توضیحی مثال (۳) $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{4}\sqrt{\text{لا}^{2}-2}}$ دریافت کرو۔

حل ۔ فرض کرو $\text{ا}^{2} = 2$ اور $\text{لا} = \text{ا قط ی}$

$\therefore$ $\text{فرلا} = \text{ا قط ی مس ی فری}$ اور $\sqrt{\text{لا}^{2}-2} = \text{ا مس ی}$

$$\text{پس تکملہ} = \int \frac{\text{ا قط ی مس ی فری}}{\text{ا}^{4}\,\text{قط}^{4}\text{ی}\ \text{ا مس ی}} = \frac{1}{\text{ا}^{4}}\int \frac{\text{فری}}{\text{قط}^{3}\text{ی}}$$

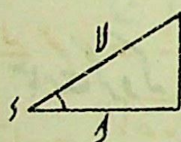
$$= \frac{1}{\text{ا}^{4}}\int \text{جم}^{3}\text{ی فری} = \frac{1}{\text{ا}^{4}}\int \text{جم}^{2}\text{ی جم ی فری} = \frac{1}{\text{ا}^{4}}\int (1-\text{جب}^{2}\text{ی})\,\text{جم ی فری}$$

$$= \frac{1}{\text{ا}^{4}}\int \text{جم ی فری} - \frac{1}{\text{ا}^{4}}\int \text{جب}^{2}\text{ی فر(جب ی)} = \frac{1}{\text{ا}^{4}}\left(\text{جب ی} - \frac{\text{جب}^{3}\text{ی}}{3}\right) + \text{ج}$$

$$= \frac{1}{\text{ا}^{4}}\,\text{جب ی}\left(1-\frac{\text{جب}^{2}\text{ی}}{3}\right) = \frac{1}{\text{ا}^{4}}\,\frac{\sqrt{\text{لا}^{2}-\text{ا}^{2}}}{\text{لا}}\left(1-\frac{\text{لا}^{2}-\text{ا}^{2}}{3\,\text{لا}^{2}}\right)$$

ملاحظہ ہو شکل ۵۱

$$= \text{بالآخر}\ \frac{(\text{لا}^{2}+1)\sqrt{\text{لا}^{2}-2}}{6\,\text{لا}^{3}}$$



شکل ۵۱

مثالیں

مندرجۂ ذیل تکملے معلوم کرو:—

(۱) $\int \frac{\text{فرط}}{\text{ط}\sqrt{4\text{ط}^{2}+9}}$ $\left[\text{جواب} = \frac{1}{3}\,\text{لوک}\ \frac{\sqrt{4\text{ط}^{2}+9}-3}{2\text{ط}} + \text{ج}\right]$

(۲) $\int \frac{\sqrt{\text{ی}^{2}-36}\ \text{فری}}{\text{ی}^{2}}$ $\left[\text{جواب} = \text{لوک}\left(\text{ی}+\sqrt{\text{ی}^{2}-36}\right) - \frac{\sqrt{\text{ی}^{2}-36}}{\text{ی}} + \text{ج}\right]$

ثابت کرو کہ:—

(۳) $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}\sqrt{49-\text{لا}^{2}}} = \frac{1}{7}\,\text{لوک}_{\text{و}}\left(\frac{\text{لا}}{7+\sqrt{49-\text{لا}^{2}}}\right) + \text{ج}$

$$(\text{۴})\quad \int \frac{\sqrt{\text{لا}^{۲} - \text{۷}}\ \text{فرلا}}{\text{لا}^{۴}} = \frac{(\text{لا}^{۲} - \text{۷})^{\frac{۳}{۲}}}{\text{۲۱}\ \text{لا}^{۳}} + \text{ج}$$

$$(\text{۵})\quad \int \frac{\text{ا}^{۳}\ \text{فرا}}{\sqrt{\text{ا}^{۲} + \text{۳}}} = \frac{(\text{ا}^{۲} + \text{۳})^{\frac{۱}{۲}}(\text{ا}^{۲} - \text{۶})}{\text{۳}} + \text{ج}$$

$$(\text{۶})\quad \int \frac{\text{ا}^{۳}\ \text{فرا}}{\sqrt{\text{ا}^{۲} - \text{۴}}} = \frac{\text{۴}}{\text{۳}}(\text{ا}^{۲} - \text{۱})\sqrt{\text{ا}^{۲} - \text{۴}} + \text{ج}$$

تکمل کے سوالات حل کرنے میں طالب علم کو اچھی مہارت صرف اس وقت حاصل ہوتی ہے جبکہ وہ سوال کو بغور دیکھ کر جلد پہچان لیتا ہے کہ اس کے حل کے لیے تکمل کے ضابطوں میں سے کونسا ضابطہ استعمال کرنا چاہیے ۔ یہ مہارت مشق ہی سے حاصل ہو سکتی ہے ۔ اس لیے ہم ذیل میں چند متفرق سوالات طالب علم کی مشق کے لیے درج کیے دیتے ہیں ۔

متفرق مثالیں

ثابت کرو کہ :-

$$(\text{۱})\quad \int \frac{\text{جب طہ}}{\sqrt{\text{جم طہ}}}\left(\text{۱} - \sqrt{\text{جم طہ}}\right)^{\frac{۱}{۲}} \text{فرطہ} = \frac{\text{۴}}{\text{۳}}\left(\text{۱} - \sqrt{\text{جم طہ}}\right)^{\frac{۳}{۲}} + \text{ج}$$

$$(\text{۲})\quad \int \frac{\text{فرطہ}}{(\text{۱} + \text{طہ}^{۲})\ \text{مس}^{-۱}\text{طہ}} = \text{لوک مس}^{-۱}\text{طہ} + \text{ج}$$

$$(\text{۳})\quad \int \frac{\text{فرطہ}}{\sqrt{\text{۳} - \text{طہ}^{۲}}\ \text{جم}^{-۱}\frac{\text{طہ}}{\text{۳}}} = \text{لوک جب}^{-۱}\frac{\text{طہ}}{\text{۲}} + \text{ج}$$

$$(\text{۴})\quad \int (\text{لا} + \text{۱})\ \text{ی}^{\text{لا}^{۲} + \text{۲لا} - \text{۱}}\ \text{فرلا} = \frac{\text{ی}^{\text{لا}^{۲} + \text{۲لا} - \text{۱}}}{\text{۲ لوک ی}} + \text{ج}$$

$$(\text{۵})\quad \int \frac{\text{ا}\ \text{و}^{\sqrt{\text{ا}^{۲} + \text{ب}^{۲}}}}{\sqrt{\text{ا}^{۲} + \text{ب}^{۲}}}\ \text{فرا} = \text{و}^{\sqrt{\text{ا}^{۲} + \text{ب}^{۲}}} + \text{ج}$$

(۶) $\int (\text{۵ و})^{\text{مس لا}}\ \text{قط}^{۲}\text{لا فرلا} = \frac{(\text{۵ و})^{\text{مس لا}}}{\text{۱ + لوک ۵}} + \text{ج}$

(۷) $\int \frac{(\text{ا و})^{1/\text{ط}}\ \text{فرط}}{\text{ط}^{۲}} = -\frac{(\text{ا و})^{1/\text{ط}}}{\text{۱ + لوک ا}} + \text{ج}$

(۸) $\int \frac{\text{جب}\,(\text{مس}^{-۱}\text{ع})\ \text{فرع}}{\text{۱} + \text{ع}^{۲}} = -\text{جم}\,(\text{مس}^{-۱}\text{ع}) + \text{ج}$

(۹) $\int \text{جب}^{\frac{۲}{۳}}\text{ا ط جم ا ط فرط} = \frac{۳}{\text{۵ ا}}\ \text{جب}^{\frac{۵}{۳}}\text{ا ط} + \text{ج}$

(۱۰) $\int -\text{مس}^{۳}\ \text{۲ ما قط}^{۲}\ \text{۲ ما فرما} = -\frac{۱}{۸}\ \text{مس}^{۴}\ \text{۲ ما} + \text{ج}$

(۱۱) $\int \left(\text{و}^{\frac{\text{لا}}{\text{ا}}} + \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{\text{ا}}}\right)^{\text{ن}} \left(\text{و}^{\frac{\text{لا}}{\text{ا}}} - \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{\text{ا}}}\right) \text{فرلا}$ جبکہ $\text{ن} \neq -۱$

$= \frac{\text{ا}}{\text{ن + ۱}} \left(\text{و}^{\frac{\text{لا}}{\text{ا}}} + \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{\text{ا}}}\right)^{\text{ن + ۱}} + \text{ج}$

(۱۲) $\int \frac{\text{قط}^{۲}\text{لا فرلا}}{\sqrt{\text{۱ - مس لا}}} = -۲\,(\text{۱ - مس لا})^{\frac{۱}{۲}} + \text{ج}$

(۱۳) $\int \frac{\text{و}^{\text{جب}^{-۱}\text{ط}}}{\sqrt{\text{۱} - \text{ط}^{۲}}}\ \text{فرط} = \text{و}^{\text{جب}^{-۱}\text{لا}} + \text{ج}$

(۱۴) $\int \sqrt{\frac{\text{و}^{\text{۲ لا}}}{\text{۴ + و}^{\text{لا}}}}\ \text{فرلا} = ۲\,(\text{۴ + و}^{\text{لا}})^{\frac{۱}{۲}} + \text{ج}$

(۱۵) $\int \frac{\text{جم}\sqrt{\text{۲ لا}}\ \text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}}\ \text{جب}\sqrt{\text{۲ لا}}} = -\sqrt{۲}\ \text{قم}\sqrt{\text{۲ لا}} + \text{ج}$

(۱۶) $\int \frac{\text{فرما}}{\text{ما لوک ما لوک (لوک ما)}} = \text{لوک}\left\{\text{لوک (لوک ما)}\right\} + \text{ج}$

(۱۷) $\int \frac{\text{جم ۳ لا فرلا}}{\text{جب}^{۲}\ \text{۳ لا}} = -\frac{۱}{۳}\ \text{قم ۳ لا} + \text{ج}$

(۱۸) $\int \frac{(\text{ط + ۱})\ \text{فرط}}{\text{ط}^{۲} + \text{۲ ط - ۱}} = \frac{۱}{۲}\ \text{لوک}\,(\text{ط}^{۲} + \text{۲ ط - ۱}) + \text{ج}$

۵۔ تکمل بالحصص ۔ ایک ہی متغیر کے دو تفاعلوں کے

حاصل ضرب کے طریقۂ تفرق پر غور کرنے سے ایسے حاصل ضرب کے تکمل کا ایک مفید ضابطہ دستیاب ہوتا ہے جو بکثرت استعمال ہوتا ہے اور تکمل بالحصص کا ضابطہ کہلاتا ہے۔

چنانچہ اگر ی اور و ایک واحد متغیر متبوع کے تفاعل ہوں تو

چونکہ فر(ی و) = ی فرو + و فری

اس لیے تبدیلی ترتیب سے

ی فرو = فر(ی و) ۔ و فری

اس کو تکمل کرنے سے

∫ ی فرو = ی و ۔ ∫ و فری ..... (۱)

یہ ضابطہ استعمال کرنے کے لیے ضروری ہے کہ دیے ہوئے تفرقہ کو دو اجزاء ضربی میں علیحدہ کریں یعنے ی اور فرو ۔ اگرچہ ان اجزائے ضربی کے انتخاب کے متعلق کوئی عام قاعدہ پیش نہیں کیا جاسکتا تاہم مندرجۂ ذیل ہدایات پر عمل ضروری ہے :۔

(۱) فرلا ہمیشہ فرو کا ایک حصّہ ہونا چاہیے۔

(۲) فرو تکمل پذیر یعنی تکمل کیے جانے کے قابل ہونا چاہیے۔

(۳) جملہ جس کا تکمل مقصود ہے جب دو تفاعلوں کا حاصل ضرب ہوتا ہے تو عموماً انسب طریقہ یہی ہے کہ سب سے زیادہ پیچیدہ شکل کے ممکن التکمل جزو ضربی کو بطور حصّہ فرو منتخب کیا جائے۔

ذیل کی مثالوں کے مطالعہ سے معلوم ہو جائیگا کہ یہ ضابطہ کس طرح استعمال کیا جاتا ہے۔

توضیحی مثال (۱) ∫ لا^{۳} $\sqrt{\text{ا}^{۲} - \text{لا}^{۲}}$ فرلا دریافت کرو۔

حل۔ فرض کرو ی = لا^۲ اور (۱ - لا^۲)^{۱/۲} لا فرلا = فرو ∴ فری = ۲ لا فرلا

تب ∫ لا^۳ (۱ - لا^۲)^{۱/۲} فرلا = ∫ ی فرو = ی و - ∫ و فری

و = ∫ لا (۱ - لا^۲)^{۱/۲} فرلا = - ۱/۲ ∫ (۱ - لا^۲)^{۱/۲} فر(۱ - لا^۲) = - ۱/۳ (۱ - لا^۲)^{۳/۲}

اور ∫ و فری = - ۱/۳ ∫ (۱ - لا^۲)^{۳/۲} ۲ لا فرلا = ۱/۳ ∫ (۱ - لا^۲)^{۳/۲} فر(۱ - لا^۲)

= ۲/۱۵ (۱ - لا^۲)^{۵/۲}

اور تکملہ = - لا^۲/۳ (۱ - لا^۲)^{۳/۲} - ۲/۱۵ (۱ - لا^۲)^{۵/۲} + ج

= - (۱ - لا^۲)^{۳/۲}/۱۵ (۳ لا^۲ + ۲) + ج

توضیحی مثال (۲) ∫ لا مس^{-۱} لا فرلا دریافت کرو۔

حل۔ فرض کرو ی = مس^{-۱} لا اور فرو = لا فرلا

∴ فری = فرلا/(۱ + لا^۲) اور و = لا^۲/۲

∴ تکملہ = (لا^۲/۲) مس^{-۱} لا - ۱/۲ ∫ لا^۲ فرلا/(۱ + لا^۲)

= لا^۲/۲ مس^{-۱} لا - ۱/۲ ∫ (۱ - ۱/(۱ + لا^۲)) فرلا

= لا^۲/۲ مس^{-۱} لا - ۱/۲ لا + ۱/۲ ∫ فرلا/(۱ + لا^۲)

= لا^۲/۲ مس^{-۱} لا - ۱/۲ لا + ۱/۲ مس^{-۱} لا + ج

= (لا^۲ + ۱)/۲ مس^{-۱} لا - لا/۲ + ج

بعض صورتوں میں تکمیل بالحصص کا ضابطہ ایک سے زیادہ مرتبہ استعمال کرنے کی ضرورت ہوتی ہے جیسا کہ ذیل کی مثال سے ظاہر ہوگا۔

توضیحی مثال (۳) ∫ لا^{۲} لوک^{۲} لا فرلا دریافت کرو ۔

حل ۔ فرض کرو ی = لوک^{۲} لا اور فرو = لا^{۲} فرلا

∴ فری = (۲ لوک لا)/(لا) فرلا اور و = (لا^{۳})/(۳)

∴ ∫ ی فرو = لوک^{۲} لا ((لا^{۳})/(۳)) − ∫ (لا^{۳})/(۳) ((۲ لوک لا فرلا)/(لا))

= (لا^{۳})/(۳) لوک^{۲} لا − (۲)/(۳) ∫ لا^{۲} لوک لا فرلا

تکمل بالحصص کا ضابطہ مکرر استعمال کرنے سے ∫ لا^{۲} لوک لا فرلا کی تعیین ہو جاتی ہے ۔ چنانچہ فرض کرو یَ = لوک لا اور لا^{۲} فرلا = فروَ ∴ فریَ = (فرلا)/(لا) اور وَ = (لا^{۳})/(۳)

پس ∫ (لوک لا) لا^{۲} فرلا = لوک لا ((لا^{۳})/(۳)) − ∫ (لا^{۳})/(۳) (فرلا)/(لا) = (لا^{۳} لوک لا)/(۳) − (۱)/(۳) (لا^{۳})/(۳)

∴ دیا ہوا تکملہ = (لا^{۳})/(۳) لوک^{۲} لا − (۲)/(۳) ((لا^{۳} لوک لا)/(۳) − (لا^{۳})/(۹)) + ج

= (لا^{۳})/(۳) (لوک^{۲} لا − (۲)/(۳) لوک لا + (۲)/(۹)) + ج

توضیحی مثال (۴) ∫ قط^{۲} لا لوک مس لا فرلا کی تعیین کرو ۔

حل ۔ ذرا سا غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ سہولت اسی میں ہے کہ فرض کیا جائے کہ

لوک مس لا = ی اور قط^{۲} ی فری = فرو

∴ فری = (قط^{۲} لا فرلا)/(مس لا) اور و = ∫ قط^{۲} لا فرلا = مس لا

پس دیا ہوا تکملہ = (لوک مس لا)(مس لا) − ∫ مس لا (قط^{۲} لا فرلا)/(مس لا)

= مس لا لوک مس لا − ∫ قط^{۲} لا فرلا

= مس لا لوک مس لا - مس لا + ج

= مس لا (لوک مس لا - ۱) + ج

توضیحی مثال (۵) ثابت کرو کہ

∫ ق^لا جب م لا فرلا = ق^لا (ا جب م لا - م جم م لا) / (ا^۲ + م^۲) + ج

حل - فرض کرو ی = ق^لا اور فرو = جب م لا فرلا

تب فری = ا ق^لا فرلا اور و = - جم م لا / م

پس دیا ہوا تکملہ = - ق^لا جم م لا / م + ا/م ∫ ق^لا جم م لا فرلا .... (۱)

نئے تکمل کو حصص کے طریقے سے تکملانے کے لیے فرض کرو

یَ = ق^لا اور فروَ = جم م لا فرلا

تب فریَ = ا ق^لا فرلا اور و = جب م لا / م

پس ∫ ق^لا جم م لا فرلا = ق^لا جب م لا / م - ا/م ∫ ق^لا جب م لا فرلا .... (۲)

(۲) کو (۱) میں تعویض کرنے سے

∫ ق^لا جب م لا فرلا = ق^لا / م^۲ (ا جب م لا - م جم م لا) - ا^۲/م^۲ ∫ ق^لا جب م لا فرلا

آخری مساوات میں دونوں تکملے ایک ہی ہیں - پس بائیں جانب کے تکمل کو مساوات کے سیدھے جانب منتقل کرکے مساوات کو حل کرنے سے

∫ ق^لا جب م لا فرلا = ق^لا (ا جب م لا - ا جم م لا) / (ا^۲ + م^۲) + ج

واضح ہو کہ تکمل بالحصص کے طریقے کے سب سے اہم اطلاقات حسب ذیل ہیں :-

(ا) تفرقے جن میں حاصل ضرب شریک ہیں -
(ب) تفرقے جن میں لوکارتم شریک ہیں -
(ج) تفرقے جن میں مقلوب دائری تفاعل شریک ہیں -

مثالیں

مندرجۂ ذیل تکملوں کی تصدیق کرو :-

(۱) ∫ لوک لا فرلا = لا لوک (لا - ۱) + ج

(۲) ∫ لا جم ۳لا فرلا = ۱/۳ لا جب ۳لا + ۱/۹ جم ۳لا + ج

(۳) ∫ لا جب^۲ لا/۲ فرلا = ۱/۴ لا^۲ - ۱/۲ لا جب لا - ۱/۲ جم لا + ج

(۴) ∫ جب لا جم ۳لا فرلا = ۱/۸ (۳ جب لا جب ۳لا + جم لا جم ۳لا) + ج

(۵) ∫ لا^ن لوک لا فرلا = لا^(ن+۱)/(ن+۱) (لوک لا - ۱/(ن+۱)) + ج

(۶) ∫ جب^-۱ لا فرلا = لا جب^-۱ لا + √(۱ - لا^۲) + ج

(۷) ∫ مم^-۱ ط فرط = ط مم^-۱ ط + ۱/۲ لوک (۱ + ط^۲) + ج

(۸) ∫ مس^-۱ ط/۳ فرط = ط مس^-۱ ط/۳ - ۳/۲ لوک (ط + ۹) + ج

(۹) ∫ (مس^-۱ ما فرما)/ما^۲ = لوک (ما/√(ما^۲ + ۱)) - (مس^-۱ ما)/ما + ج

(۱۰) ∫ لوک (۱ - √ط) فرط = (ط - ۱) لوک (۱ - √ط) - ۱/۲ (ط + ۲√ط) + ج

(۱۱) ∫ (جب لا فرلا)/و^لا = - (جب لا + جم لا)/(۲ و^لا) + ج

(۱۲) ∫ و^-ف جب ۳ف فرف = - و^-ف/۱۰ (جب ۳ف + ۳ جم ۳ف) + ج

(۱۳) $$\int \frac{\text{ط}\ \text{و}^{\text{ط}}\ \text{فر ط}}{(1+\text{ط})^2} = \frac{\text{و}^{\text{ط}}}{1+\text{ط}} + \text{ج}$$

(۱۴) $$\int \frac{\text{ط}^2\ \text{فر ط}}{\text{و}^{\text{ط}}} = -\frac{2 + 2\text{ط} + \text{ط}^2}{\text{و}^{\text{ط}}} + \text{ج}$$

(۱۵) $$\int \text{و}^{-2\text{لا}} (\text{جم لا} - \text{جب لا})\ \text{فر لا} = \frac{\text{و}^{-2\text{لا}} (2\ \text{جب لا} - \text{جم لا})}{5} + \text{ج}$$

(۱۶) $$\int \text{ا}^2\ \text{لوک}\ (\text{ا} - 3)\ \text{فر ا} = \frac{\text{ا}^3 - 27}{3}\ \text{لوک}\ (\text{ا} - 3)$$
$$- \frac{1}{3}\left(\frac{\text{ا}^3}{3} + \frac{3\text{ا}^2}{2} + 9\text{ا}\right) + \text{ج}$$

(۱۷) $$\int (\text{و}^{\text{ف}} - \text{و}^{-\text{ف}})\ \text{جب ر ف فر ف}$$
$$= \frac{(\text{و}^{\text{ف}} - \text{و}^{-\text{ف}})\ \text{جب ر ف} - \text{ر}\ (\text{و}^{\text{ف}} - \text{و}^{-\text{ف}})\ \text{جم ر ف}}{\text{ر}^2 + 1} + \text{ج}$$

بارہواں باب

تکمل کا مستقل اور محدود تکملہ

۱ - ابتدائی شرائط کے ذریعہ تکمّل کے مستقل کی تعیین

تعیین — جیسا کہ سابقہ باب کے آغاز میں بتایا گیا ہے کسی دی ہوئی مثال میں تکمل کا مستقل دریافت کر لیا جا سکتا ہے جبکہ ہمیں متغیر کی کسی قیمت کے لیے تکمل کی قیمت معلوم ہو جاتی ہے۔ بالفاظ دیگر کسی نامحدود تکملہ کا مستقل دریافت کر لیا جا سکتا ہے جبکہ یہ معلوم ہو کہ حاصل شدہ تفاعل کسی معین شرط کو پورا کرتا ہے مثلاً تکمل ف (لا) = ∫ فہ (لا) فرلا + ج ایک نامحدود تکمل ہے

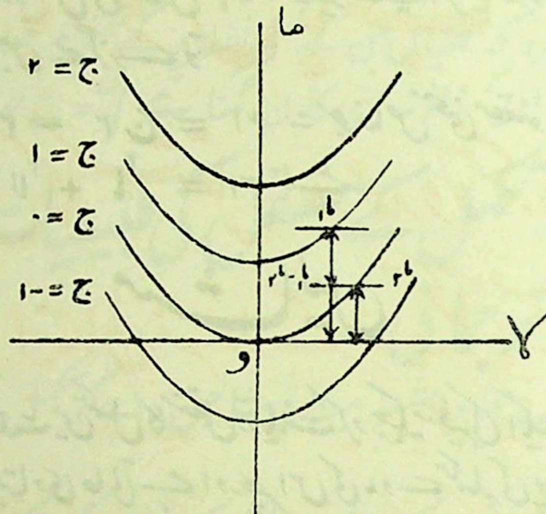
جس میں مستقل ج کی قیمت معلوم کرنے کے لیے ہمیں یہ جاننا ضروری ہے کہ متغیر لا کی کسی خاص قیمت کے لیے تفاعل ف (لا) یعنے تکمل کی کیا قیمت ہے۔

توضیحی مثال (۱) ∫ لا فرلا کے تکمل میں ج کی قیمت دریافت کرو یہ معلوم رکھ کر کہ تکمل = ۴ جبکہ لا = ۲

چونکہ ۱ = ف (لا) = ∫ لا فرلا = $\frac{\text{لا}^2}{2}$ + ج

اور ما = ۴ جبکہ لا = ۲ پس $۴ = \frac{۴}{۲} + ج \quad \therefore \quad ج = ۲$

تفاعل کے مستقل کی ہندسی ترجمانی بھی آسان ہے ۔ چنانچہ اس توضیحی مثال کی ترسیم یعنے شکل ۵۲ کے معائنہ سے واضح ہوگا کہ تکمل کو من مانے قیمت دی جاسکتی ہے اگر ہم لا = صفر فرض کرکے ج کو تکمل کی قیمت عطا کریں ۔



شکل ۵۲

واضح ہے کہ مساوات بالا میں ج کی ہر معین قیمت کے لیے ایک معین ترسیم موجود ہے ۔ اگر ہم اس نظام کے کوئی دو منحنی منتخب کریں مثلاً

$$ما_1 = \frac{لا^2}{۲} + ج_1 \quad \text{اور} \quad ما_2 = \frac{لا^2}{۲} + ج_2$$

ان کے معینوں (ordinates) کا تفاوت $ما_1 - ما_2 = ج_1 - ج_2$ غیر تابع ہے لا کا ۔

توضیحی مثال (۲) ایسے منحنی کی مساوات دریافت کرو کہ منحنی کے کسی نقطہ پر خطِ مماس کا ڈھلان تبدیلی علامت کے ساتھ فصلہ اور معیّن کی نسبت کے مساوی ہے ۔

حل ۔ اس سوال کی ترجمانی مساوات ذیل سے ہوتی ہے $\frac{فرما}{فرلا} = -\frac{لا}{ما}$

متغیروں کو جدا کرنے سے $\text{ما}\,\text{فرما} = -\text{لا}\,\text{فرلا}$

اور عمل تکمل سے $\frac{\text{ما}^2}{2} = -\frac{\text{لا}^2}{2} + \text{ج}$ ∴ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = 2\,\text{ج}$

واضح ہے کہ یہ ایک ہم مرکز دائروں کے نظام کی مساوات ہے جن کے مرکز مبدا پر ہیں - یہ ایک نا محدود تکمل کی مثال ہے - تحدید کے لیے اگر یہ شرط لگا دی جائے کہ منحنی نقطہ (۴، ۵) میں سے گزرے تو

$16 + 25 = 2\,\text{ج} = 41$ ∴ جو خاص منحنی مقصود ہے -

دائرہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = 41$ ہے

مثالیں

مندرجۂ ذیل سوالات میں تکمل کا مستقل دریافت کرو جبکہ متغیر کی ایک دی ہوئی قیمت کے لیے تکملہ کی قیمت بتا دی جاتی ہے اور پھر اس کی مدد سے تکملہ کی پوری قیمت حاصل کرو :-

(۱) $\int \frac{-\text{لا}\,\text{فرلا}}{\sqrt{100 - \text{لا}^2}}$ جبکہ $\text{لا} = 6$ تو تکملہ $= 8$ [جواب۔ مستقل = ۰، تکملہ کی پوری قیمت = $\sqrt{100 - \text{لا}^2}$

(۲) $\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{1 - \text{لا}^2}}$ جبکہ $\text{لا} = 1$ تو تکملہ $= \frac{5\text{ٹ}}{2}$ [جواب۔ مستقل = 2ٹ تکملہ کی پوری قیمت = $\text{جب}^{-1}\text{لا} + 2\text{ٹ}$

(۳) $\int \text{مس ط}\,\text{فرط}$ جبکہ $\text{ط} = 0$ تو تکملہ $= 3$ [جواب۔ مستقل = ۳ تکملہ کی پوری قیمت = $\text{لوک قاط ط} + 3$

منحنیوں کے نظام کی مساوات حاصل کرو جبکہ ان کے کسی نقطہ پر کے خطِ مماس کا ڈھلان حسبِ ذیل ہے :-

(۴) $\frac{\text{لا}^2}{\text{ما}}$ [جواب۔ نیم کعبی خطوط مکافی $\frac{\text{ما}^2}{2} = \frac{\text{لا}^3}{3} + \text{ج}$

(۵) $\frac{\text{ب}^2\,\text{لا}}{\text{ا}^2\,\text{ما}}$ [جواب۔ خطوط زائد $\text{ب}^2\,\text{لا}^2 - \text{ا}^2\,\text{ما}^2 + \text{ج}$

(۶) $\frac{-ب^{۲} لا}{ا^{۲} ما}$ [جواب۔ خطوط ناقص ب^{۲} لا^{۲} + ا^{۲} ما^{۲} = ج

(۷) $\frac{۱ + لا}{۱ - ما}$ [جواب۔ دوائر لا^{۲} + ما^{۲} + ۲لا − ۲ما = ج

(۸) ثابت کرو کہ منحنی جس کا زیر مماس مستقل اور ا کے مساوی ہے
ا لوک ما = لا + ج ہے۔

(۹) ثابت کرو کہ منحنیاں جن کے کسی نقطہ پر کے سمتی نیم قطر اور خطِ مماس کے مابین زاویہ زاویۂ سمتی کا ن گنا ہے ر^{ن} = ج جیب ن طہ ہیں۔

۲۔ تکمل کے مستقل کی طبیعیات کے مسائل کے ذریعہ ترجمانی۔

ذیل میں ہم دو مشہور میکانی مثالیں دے کر تکمل کے مستقل کا مفہوم بتائینگے۔

(۱) خطِ مستقیم میں مستقل اسراع کے ساتھ حرکت کرنے والے ذرہ کے کلیاتِ حرکت اخذ کرو۔

حل۔ چونکہ اسراع = $\frac{فر ر}{فر و}$ = مستقل جس میں ر = رفتار اور و = وقت اس لیے $\frac{فر ر}{فر و}$ = ا لکھو

تب فر ر = ا فر و اور تکمل کرنے سے ر = ا و + ج ..... (۱)

ج کی تعیین کے لیے فرض کرو کہ ذرہ کی ابتدائی رفتار ر. ہے یعنے ر = ر. جبکہ و = ۰ ∴ ر. = ۰ + ج یعنے ج = ر.

پس مساوات (۱) ہوجاتی ہے ر = ا و + ر. ..... (۲)

چونکہ ر = $\frac{فر س}{فر و}$ جس میں س = فاصلہ اور و = وقت

پس مساوات (۲) سے فرس/فرو = ا و + ر۔ اور فرس = ا و فرو + ر۔ فرو

تکمل کرنے سے س = ۱/۲ ا و۲ + ر۔ و + ج . . . . . . (۳)

ج کی تعیین کے لیے فرض کرو کہ ابتدائی فاصلہ س۔ ہے یعنے س = س۔ جبکہ و = ۰

تب (۳) میں عمل ابدال سے س۔ = ۰ + ۰ + ج ∴ ج = س۔

اور اس لیے س = ۱/۲ ا و۲ + ر۔ و + س۔ . . . . . . (۴)

(۲) مرمی کی حرکت پر بحث کرو جس کی ابتدائی رفتار ر۔ افقی سطح سے زاویہ عہ پر مائل ہے صرف جاذبہ زمین کا عمل فرض کیا جائے۔

حل - فرض کرو کہ لا م ما (شکل ۵۳) حرکت کا مستوی ہے۔

شکل ۵۴

م لا اُفقی اور م ما انتصابی خط ہے اور مرمی مبداء م سے پھینکا جاتا ہے - چونکہ صرف جاذبہ زمین کا عمل مانا گیا ہے اس لیے اُفقی سمت میں اسراع صفر ہے اور انتصابی سمت میں - ج

پس فرلا/فرو = ۰ اور فرما/فرو = - ج

عمل تکمل سے رلا = هـ۱ اور رما = − ج و + هـ۲

(نوٹ ۔ چونکہ جاذبہ زمین کے لیے علامت ج لکھی گئی ہے اس لیے مستقل کے لیے علامت هـ اختیار کی گئی)

لیکن ر جم عہ = ابتدائی رفتار اُفقی سمت میں اور ر جب عہ = ابتدائی رفتار انتصابی سمت میں

لہذا هـ۱ = ر جم عہ اور هـ۲ = ر جب عہ

∴ رلا = ر جم عہ اور رما = − ج و + ر جب عہ . . . . (۱)

لیکن رلا = $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر و}}$ اور رما = $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر و}}$

∴ $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر و}}$ = ر جم عہ اور $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ = − ج و + ر جب عہ

یعنے فر لا = ر جم عہ فر و اور فر ما = − ج و فر و + ر جب عہ فر و

تکمل کرنے سے   لا = ر جم عہ . و + هـ۳   اور

ما = − $\frac{1}{2}$ ج و^2 + ر جب عہ . و + هـ۴ . . . . (۲)

هـ۳ اور هـ۴ کی تعیین کے لیے ہمیں معلوم ہے کہ جب و = ۰ تو لا = ۰ اور ما = ۰

پس عمل ابدال سے هـ۳ = ۰ اور هـ۴ = ۰

∴ لا = ر جم عہ . و اور ما = − $\frac{1}{2}$ ج و^2 + ر جب عہ . و . . . . (۳) اور (۴)

آخرالذکر مساواتوں میں و کو ساقط کرنے سے

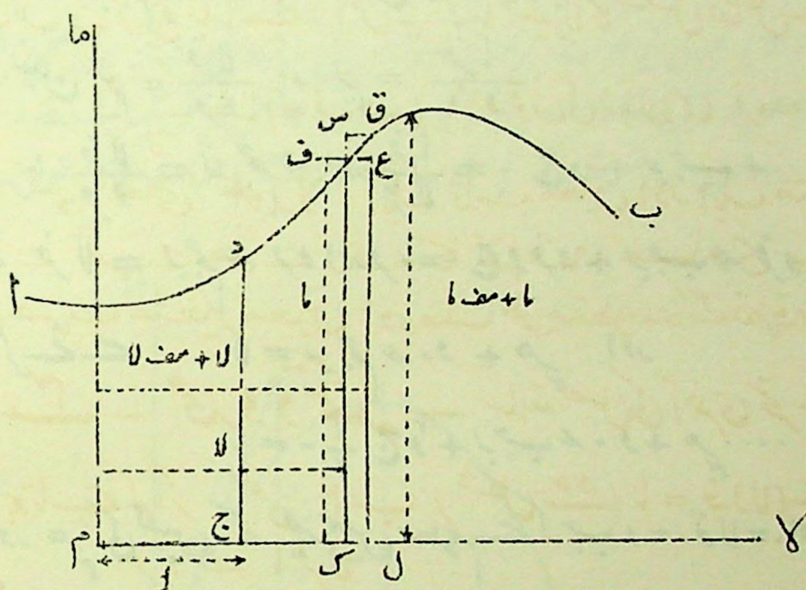
ما = لا مس عہ − $\frac{\text{ج لا}^2}{2\,\text{ر}^2\,\text{جم}^2\,\text{عہ}}$ . . . . (۵)

جو مراة کی مساوات ہے اور جس سے ظاہر ہے کہ مرمی خط مکافی میں حرکت کرتا ہے۔

محدود تکملہ

۳ - منحنی کے نیچے کے رقبہ کا تفرقہ -

مسلسل تفاعل فہ (لا) پر غور کرو اور فرض کرو کہ ما = فہ (لا) منحنی ا ب کی مساوات ہے جس کی ترسیم شکل ۵۴ میں بتائی گئی ہے -



شکل ۵۴

ج د ثابت معین ہے اور ک ف متغیر معین ہے - فرض کرو کہ رقبہ ج ک ف د کی پیمائش ہے - لا کی قیمت میں ایک چھوٹا اضافہ مف لا واقع ہوتا ہے اور شکل میں رقبہ ک ل ق ف اس کو تعبیر کرتا ہے - اگر مستطیل ک ل ع ف اور ک ل ق س مکمل کھینچے جائیں تو واضح ہے کہ

رقبہ ک ل ع ف < رقبہ ک ل ق ف < رقبہ ک ل ق س

یعنے (ک ف) مف لا > مف ی > (ل ق) مف لا

مف لا پر تقسیم کرنے سے ک ف > مف ی / مف لا > ل ق

[نوٹ - اگر شکل ایسی ہو کہ ک ف زائد ہو ل ق سے تو اوپر کی سطر میں بجائے علامت > کے علامت < لکھنا ہوگا] -

اب مف لا کو صفر تک بطور انتہا پہنچنے دو - چونکہ ک ف ثابت ہے اور ل ق بطور انتہا ک ف کو پہنچ جاتا ہے (اس لیے کہ ما متغیر لا کا مسلسل تفاعل ہے)

اس لیے فر ی / فر لا = ما (= ک ف) یا تفرقوں کی زبان میں فر ی = ما فر لا

پس کسی منحنی، محور لا، ایک ثابت معین اور ایک متغیر معین سے گھرے ہوئے رقبہ کا تفرقہ مساوی ہے حاصل ضرب متغیر معین اور متناظر مقطوعہ کے تفرقہ کے۔

۴ - محدود تکملہ

سابقہ فصل کی آخری تحریر سے مستنبط ہوتا ہے کہ اگر منحنی ا ب (شکل ۸۴) ما = فہ (لا) ہے تو

فر ی = ما فر لا

یعنے فر ی = فہ (لا) فر لا . . . . (۱)

جس میں فر ی منحنی، محور لا اور دو معینوں کے درمیانی رقبہ کا تفرقہ ہے۔

تکمل کرنے سے ی = ∫ فہ (لا) فر لا حاصل ہوتا ہے۔

∫ فہ (لا) فر لا کو ف (لا) + ج سے تعبیر کرو۔

∴ ی = ف (لا) + ج . . . . (۲)

ج کی اس طرح تعیین کی جاتی ہے کہ ی = صفر جبکہ لا = ا

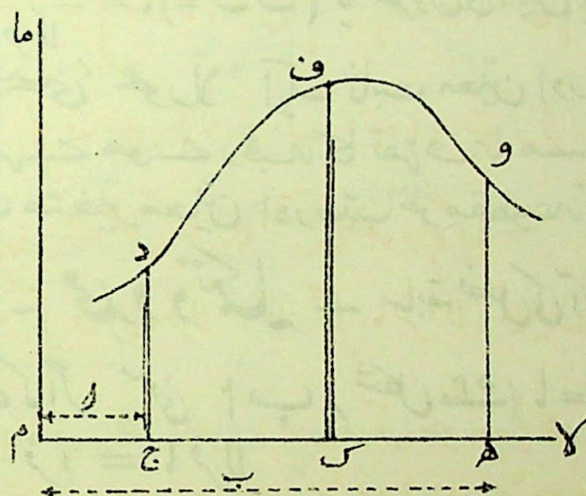
ان قیمتوں کو نتیجہ (۲) میں تعویض کرنے سے

۰ = ف (ا) + ج ∴ ج = ۔ ف (ا)

اس لیے (۲) ہو جاتا ہے ء = ف (لا) ۔ ف (ا) ...... (۳)

اور مطلوبہ رقبہ ج ھ و د (شکل ۵۵) ء کی قیمت ہے (۳) میں جبکہ لا = ب

پس رقبہ ج ھ و د = ف (ب) ۔ ف (ا) ...... (ا)



شکل ۵۵

مسئلہ ۔ ∫ ما فرلا کی قیمتوں کا تفاوت جبکہ لا = ا اور لا = ب اُس رقبہ کو تعبیر کرتا ہے جو معیّن ما والے منحنی، محور لا اور لا = ا اور لا = ب کے متناظر معینوں کے درمیان واقع ہے۔

یہ تفاوت علامت $\int_{ا}^{ب}$ ما فرلا یا $\int_{ا}^{ب}$ فہ (لا) فرلا کے ذریعہ ظاہر

کیا جاتا ہے اس طریق کتابت کا موجد فرانس کا مشہور ماہر ریاضی جوزف فورئے (Joseph Fourier) ہے۔ اور پڑھا جاتا ہے "ما فرلا کا تکملہ ا سے ب تک۔ اس عمل کو "حدود کے مابین تکمل کرنا" کہتے ہیں۔ ا کو حدِ زیریں اور ب کو حدِ بالا کہتے ہیں۔

چونکہ (۳) کی ہمیشہ ایک محدود قیمت ہوتی ہے اس لیے وہ محدود تکملہ کہلاتا ہے۔

کیونکہ اگر $\int$ فہ (لا) فرلا = ف (لا) + ج

تب $\int_{ا}^{ب}$ فہ (لا) فرلا = $\Big[$ ف (لا) + ج $\Big]_{ا}^{ب}$ = $\Big[$ ف (ب) + ج $\Big]$ - $\Big[$ ف (ا) + ج $\Big]$

یعنی $\int_{ا}^{ب}$ فہ (لا) فرلا = ف (ب) - ف (ا)

جس میں سے عمل تکمل کا مستقل مفقود ہو گیا۔

پس ہم علامت $\int_{ا}^{ب}$ فہ (لا) فرلا یا $\int_{ا}^{ب}$ ما فر (لا) کی یوں تعریف کر سکتے ہیں کہ

وہ عددی پیمائش ہے اس رقبہ کی جو گھیرا ہوا ہے منحنی ما = فہ (لا)، محور لا اور لا = ا اور لا = ب پر کے منحنی کے معیّنوں سے۔ یہ تعریف پہلے ہی سے فرض کر لیتی ہے کہ یہ خطوط ایک رقبہ کو گھیر لیتے ہیں۔ یعنی منحنی لا تناہی تک نہ تو اوپر کی طرف جاتا ہے اور نہ نیچے کی طرف اور ا اور ب دونوں محدود ہیں۔

واضح رہے کہ فہ (لا) پورے وقفہ [ا، ب] میں مسلسل اور وحید القیمت ہے۔

محدود تکمل کی قیمت کی تعیین کا قاعدہ۔

پہلے دیے ہوئے تفرقی جملہ کا غیر محدود تکملہ دریافت کیا جائے پھر اس میں اولاً بالائی حد درج کی جائے اور بعد کو زیرین حد درج کی جائے۔ اس کے بعد آخر الذکر کو اول الذکر میں سے تفریق کیا جائے۔

توضیحی مثال (۱) $\int_{۰}^{۲} (۳ - \text{لا})^{۳}\,\text{فرلا}$ کی قیمت دریافت کرو۔

حل - $\int_{۰}^{۲} (۳ - \text{لا})^{۳}\,\text{فرلا} = - \left[\frac{(۳ - \text{لا})^{۴}}{۴} \right]_{۰}^{۲}$

$= - \left[\frac{(۳ - ۲)^{۴}}{۴} - \frac{(۳ - ۰)^{۴}}{۴} \right] = ۲۰$

توضیحی مثال (۲) $\int_{-۱}^{۱} \frac{\text{فرلا}}{۹\text{لا}^{۲} - ۲۵}$ کی قیمت دریافت کرو۔

حل - یہ سوال معیاری صورت (۱۶) اور (۱۶ ا) کے مشابہ ہے۔

پس $= \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۵ \times ۲} \left[\text{لوک}_{\text{و}} \frac{۳\text{لا} - ۵}{۳\text{لا} + ۵} \right]_{-۱}^{۱}$ یا $= - \frac{۱}{۳۰} \left[\text{لوک}_{\text{و}} \frac{۵ + ۳\text{لا}}{۵ - ۳\text{لا}} \right]_{-۱}^{۱}$

پہلے طریقہ پر عمل کرنے سے منفی عدد کا لوکارتم ملتا ہے اس لیے دوسرا طریقہ اختیار کیا جانا چاہیے۔

پس تکملہ $= - \frac{۱}{۳۰} \left[\text{لوک}_{\text{و}} \frac{۵ + ۳}{۵ - ۳} - \text{لوک}_{\text{و}} \frac{۵ - ۳}{۵ + ۳} \right] = - \frac{۱}{۳۰} \left(-\text{لوک}_{\text{و}} \frac{۱}{۴} \right) = - \frac{۱}{۳۰}\, \text{لوک}_{\text{و}} ۴$

۵ - متغیر کی تبدیلی کے متناظر حدود تکمل کی تبدیلی

جب کسی نئے متغیر کی مدد سے تکمل عمل میں لایا جاتا ہے تو بعض اوقات ابتدائی متغیر کی رقموں میں نتیجہ کو ظاہر کرنے میں دقت پیش آتی ہے جبکہ حدود کے مابین جب تکمل کرنا ہوتا ہے تو ہم ابتدائی متغیر کے استعمال سے

بچ سکتے ہیں اگر ان معینہ حدود کو نئے متغیر کی رقموں میں پیش کر دیں۔ چند ایک مثالوں کے مطالعہ سے معلوم ہو جائیگا کہ یہ کس طرح کیا جا سکتا ہے۔

توضیحی مثال (۱) $\int_{0}^{\text{ا}} \sqrt{\text{ا}^{2} - \text{لا}^{2}}\ \text{فرلا}$ کی قیمت معلوم کرو۔

حل۔ لا = ا جب فہ لکھو تب فرلا = ا جم فہ فرفہ اور جبکہ لا بدلتا ہے صفر سے ا تک تو فہ بدلتا ہے صفر سے $\frac{\pi}{2}$ تک پس

$$\int_{0}^{\text{ا}} \sqrt{\text{ا}^{2} - \text{لا}^{2}}\ \text{فرلا} = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \text{ا}^{2}\,\text{جم}^{2}\,\text{فہ فرفہ} = \left[\frac{\text{ا}^{2}\,\text{فہ}}{2} + \frac{\text{ا}^{2}\,\text{جب}\,2\,\text{فہ}}{4}\right]_{0}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4}\pi\,\text{ا}^{2}$$

توضیحی مثال (۲) $\int_{1}^{4} \frac{\text{فرو}}{\sqrt{5 - \text{و}}}$ کی قیمت دریافت کرو۔

حل۔ لا² = و لکھو تب $\sqrt{5 - \text{و}} = \sqrt{5 - \text{لا}^{2}}$

اور $\text{فرو} = \text{فرلا}^{2} = 2\,\text{لا فرلا}$

$$\therefore \int_{1}^{4} \frac{\text{فرو}}{\sqrt{5 - \text{و}}} = \int_{1}^{2} \frac{2\,\text{لا فرلا}}{(5 - \text{لا}^{2})^{\frac{1}{2}}}$$ اور $\text{فر}(5 - \text{لا}^{2}) = -2\,\text{لا فرلا}$

معہذا جبکہ و = ۴ لا = ± ۲

اور جبکہ و = ۱ لا = ± ۱

$$\therefore \text{تکملہ} = -\int_{1}^{2} (5 - \text{لا}^{2})^{-\frac{1}{2}}\ \text{فر}(5 - \text{لا}^{2}) = -\left[\frac{(5 - \text{لا}^{2})^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_{1}^{2}$$

$$= -2\left[(5 - 4)^{\frac{1}{2}} - (5 - 1)^{\frac{1}{2}}\right] = -2\,(-1) = 2$$

[نوٹ۔ واضح ہو کہ سابقہ اور جدید متغیر میں تعلق اس طرح کا ہونا چاہیے کہ حدود تکمل کے اندر ایک متغیر کی ہر ایک قیمت کے متناظر دوسرے متغیر کی ہمیشہ ایک اور صرف ایک محدود قیمت ہو۔ جبکہ ایک متغیر دوسرے متغیر کا کثیر القیمت تفاعل دیا جاتا ہے تو احتیاط کی بابت چاہیے کہ صحیح و موزوں قیمتیں ہی منتخب کی جائیں]۔

مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ ∫ (ل سے ب تک) ف (لا) فرلا = − ∫ (ب سے ل تک) ف (لا) فرلا

متذکرہ ذیل کی تصدیق کرو:۔

(۲) ∫ (۳ سے ۴ تک) فرلا / (لا √(۲۵ − لا²)) = ۱/۵ لوک ۳/۲

(۳) ∫ (۰ سے π/۴ تک) قط³ ع فرع = ۱/۴ + ۱/۴ لوک ۳

(۴) ∫ (۰ سے ۲ تک) لا² √(۱ + لا³) فرلا = ۵ ۷/۹

(۵) ∫ (۱ سے ۲ تک) √(لا² − ۱) فرلا / لا = √۳ − π/۳

۵۔ رقبوں کی حسابی تعیین۔ قبل ازیں (۴۰ کے آغاز میں) بتا دیا گیا ہے کہ ایک منحنی، محور لا اور معینوں لا = ل اور لا = ب کے مابین کا رقبہ ضابطہ

رقبہ = ∫ (ل سے ب تک) ما فرلا .... (ب)

سے مشخص ہوتا ہے جس میں دیے ہوئے منحنی کی مساوات کی مدد سے ما کی قیمت لا کی رقموں میں تعویض کی جاتی ہے۔

توضیحی مثال (۱) دائرہ لا² + ما² = ۳۶، محور لا اور معینوں لا = −۴ اور لا = ۵ سے گھیرے ہوئے رقبہ کی تعیین کرو۔

حل۔ ∫ (−۴ سے ۵ تک) √(۳۶ − لا²) فرلا = [لا/۲ √(۳۶ − لا²) + ۳۶/۲ جب⁻¹ لا/۶] (−۴ سے ۵ تک)

= ۵/۲ √۱۱ + ۳۶/۲ جب⁻¹ ۵/۶ + ۴/۲ √۲۰ + ۳۶/۲ جب⁻¹ (−۲/۳)

= ۸٫۳ + ۱۸ (۵۶° ۲۴′) + ۸٫۶۵ + ۱۸ (۴۱° ۴۸′)

= ۱۶٫۹۵ + ۱۸ (۹۸° ۱۲′) = ۱۶٫۹ + ۳۰٫۶ = ۴۷٫۵

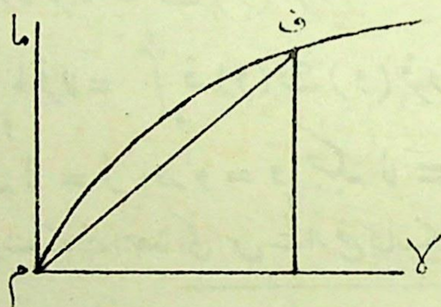
واضح ہے کہ یہ چھوٹا ہے نصف دائرہ کے رقبہ (متناظر لا = −۶ اور لا = +۶) سے

یعنے ½ π (۳۶) = ۱۸π = ۵۶٫۵ سے

توضیحی مثال (۲) ثابت کرو کہ خط مکافی ما² = ۴ لا اور خطِ مستقیم ما = لا سے گھیرا ہوا رقبہ = ۸/۳

حل - منحنی محور لا اور معیّن ما سے گھیرا ہوا (دیکھو شکل ۵۶)

رقبہ = ∫ ما فرلا اور چونکہ ما² = ۴ لا ∴ ما = ± ۲ (لا)^½



شکل ۵۶

ہم یہاں صرف مثبت علامت لینگے

اس لیے رقبہ = ∫ ۲ (لا)^½ فرلا = ۲ (لا^{۳/۲} ÷ ۳/۲) = ۴/۳ لا^{۳/۲}

خطِ مستقیم ما = لا، محور لا اور معیّن ما سے گھرے ہوئے مثلث کا رقبہ = ½ لا ما

لیکن چونکہ لا = ما ∴ مثلث کا رقبہ = ½ لا²

پس مکافی اور خطِ مستقیم کا درمیانی رقبہ = (۴/۳ لا^{۳/۲} − ½ لا²)

مکافی اور خطِ مستقیم کے نقاطِ تقاطع ما^2 = ۴ لا اور ما = لا ہمزاد مساواتوں کے حل سے دریافت ہو جاتے ہیں۔ یعنے لا^2 = ۴ لا یا لا (لا - ۴) = ۰
یعنے لا = ۰ یا لا = ۴ سے
پس تکملہ کے حدود لا = ۰ اور لا = ۴ لیے جانے چاہئیں۔

$$\therefore \left[\frac{4}{3} لا^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} لا^2\right]^4_0 = \left[\left(\frac{4}{3} \times 8 - 16 \times \frac{1}{2}\right) - 0\right] = \frac{8}{3} \text{ جواب}$$

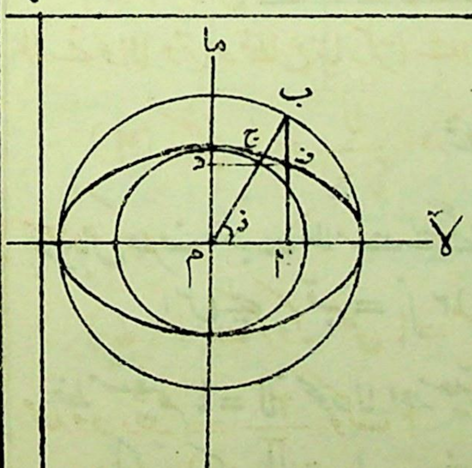
۶۔ رقبہ کی تعیین جبکہ منحنیوں کی مساواتیں مبدّلی شکل میں دی گئی ہوں۔

فرض کرو کہ منحنی کی مبدّلی مساواتیں لا = ف (و) اور ما = فہ (و) ہیں
تب ما = فہ (و) اور فرلا = فَ (و) فرو

$$\text{پس رقبہ} = \int_ا^ب ما \, فرلا = \int_{و_1}^{و_2} فہ(و) فَ(و) \, فرو \quad \ldots\ldots (1)$$

جس میں و = و$_1$ جبکہ لا = ا اور و = و$_2$ جبکہ لا = ب

[نوٹ۔ اس تعویض کے باضابطہ ثبوت کے لیے احصاء کی اس سے ارفع کتاب کا مطالعہ کیا جائے]۔



شکل ۷۸

توضیحی مثال۔ خط ناقص کا رقبہ دریافت کرو جس کی مبدّلی مساواتیں ہیں۔
لا = ا جم فہ اور ما = ب جب فہ

حل۔ چونکہ لا = ا جم فہ ∴ فرلا = - ا جب فہ فرفہ
جبکہ لا = ۰، فہ = $\frac{\pi}{2}$ اور جبکہ لا = ا، فہ = ۰
ان کو مساوات (۱) میں تعویض کرنے سے ناقص کے

$$\text{پہلے ربع کا رقبہ} = \int_0^ا ما \, فرلا =$$

$$= -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} ا ب \, جب^2 فہ \, فرفہ = \frac{\pi ا ب}{4}$$

∴ پورے ناقص کا رقبہ = π ا ب

مثالیں

دیے ہوئے منحنی، محور لا اور دیے ہوئے معینوں سے گھرے ہوئے مندرجہ ذیل رقبوں کی تعیین کرو:—

(۱) ما = لا + $\frac{۴}{لا^۲}$، لا = ۲، لا = ۴ [جواب = ۷

(۲) ما = $تو^{\frac{لا}{۲}}$، لا = ۰، لا = ۲ [جواب ۱٫۳۶

(۳) ثابت کرو کہ خطِ مکافی کے کسی قطاع کا رقبہ جو مکافی کے محور کے علی القوائم وتر سے کٹ کر بنتا ہے، پیرامونی مستطیل کا دو تہائی ہے۔

(۴) ثابت کرو کہ مکافیوں $ما^۲$ = ۸ لا اور $لا^۲$ = ۸ ما سے گھیرا ہوا رقبہ $\frac{۶۴}{۳}$ ہے۔

(۵) مکافی ما = ۶ + لا − $لا^۲$ سے نقاط (−۱، ۴) اور (۳، ۰) کو ملانے والا وتر جو قطاع تیار کرتا ہے اس کا رقبہ دریافت کرو [جواب = ۱۰ $\frac{۲}{۳}$

(۶) منحنی ما = $\frac{لا}{۱ + لا^۲}$ اور خطِ مستقیم ۴ ما = لا کا درمیانی رقبہ معلوم کرو۔ [جواب = لوک ۴ − $\frac{۳}{۴}$

(۷) ثابت کرو کہ منحنی ما = مس $\frac{π لا}{۴}$، محور لا اور خط لا = ۱ سے محدود رقبہ = $\frac{۲}{π}$ لوک ۲

(۸) بتاؤ کہ خطِ تدویر (Cycloid) لا = ا (طہ − جب طہ)، ما = ا (۱ − جم طہ) کی ایک کمان اور محور لا کا درمیانی رقبہ = ۳ π $ا^۲$ ہے۔

(۹) بتاؤ کہ خطِ صنوبری لا = ا (۲ جم و - جم ۲ و)، ما = ا (۲ جب و - جب ۲ و) کا رقبہ = ۶ ۲۲ ا۲

(۱۰) ثابت کرو کہ درندویر (hypocycloid) لا = جم۳ طہ،
ما = ا جب۳ طہ (جس میں طہ مبدّل ہے) کا رقبہ ۳/۸ ۲۲ ا۲ یعنی پیرامونی دائرہ کے رقبہ کا ۳/۸ ہے۔

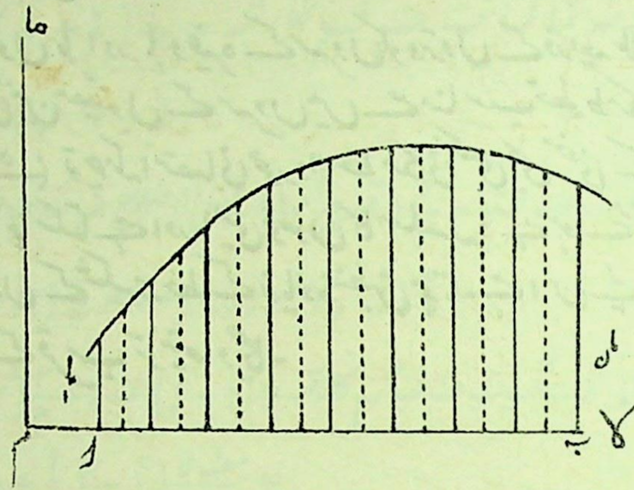
[نوٹ۔ جس طرح لا، ما کو کسی منحنی کے محدد مان کر ما فرلا کا مقررہ حدود میں تکملہ محسوب کرنے سے رقبہ دریافت ہوتا ہے اسی طرح اگر لا، ما کسی متحرک ذرہ سے متعلق وقت اور متناظر رفتار کو تعبیر کرتے ہیں تو لا کے معینہ حدود میں ∫ ما فرلا محسوب کرنے سے محدود تکملہ ذرّہ کا طے کیا ہوا فاصلہ ظاہر کریگا۔ یعنے ایسی صورت میں رقبہ طے شدہ فاصلہ کی ہندسی تعبیر کرتا ہے۔ پس واضح ہے کہ مناسب قرار دادوں کے لحاظ سے حجم، سطح، کمیت، قوت، توانائی وغیرہ کے محدود تکملوں کی بھی ہندسی طریقہ پر رقبہ سے تعبیر ہو سکتی ہے۔ آگے چل کر ان کی متعدد مثالیں پیش کی جائینگی]۔

ث۔ تقریبی تکمل۔ منحرف نما شکل کا قاعدہ (Trapezoidal rule)

اب ہم ∫ا^ب ف (لا) فرلا کی تقریبی قیمت معلوم کرنے کے دو قاعدے پیش کرینگے۔ یہ ان صورتوں میں کارآمد ہوتے ہیں جبکہ مندرجہ بالا تکمل ابتدائی تفاعلوں کی رقموں میں مشکل یا ناممکن ہوتا ہے۔

واضح ہے کہ ∫ا^ب ف (لا) فرلا کی کا ٹھیک صحیح عددی قیمت، منحنی ما = ف (لا)، محور لا اور لا = ا، لا = ب معینوں سے گھیرے ہوئے رقبہ کی پیمایش ہے۔ یہ رقبہ تقریبی طریقہ پر عنصری منحرف نماؤں کے جوڑنے سے دریافت ہو سکتا ہے جیسا کہ ذیل کے بیان سے معلوم ہوگا۔ محور م لا کے قطع ب - ا کو ن مساوی حصوں میں تقسیم کرو، ہر حصہ = مف لا۔ نقاطِ تقسیم کے

متواتر مقطوعوں کو لا$_0$ (= ا)، لا$_1$ لا$_2$ ...... لا$_n$ (= ب) مانو۔



شکل ۵۵

ان نقطوں پر منحنی ما = ف (لا) کے متعلقہ معین ما$_0$ = ف (لا$_0$)، ما$_1$ = ف (لا$_1$)، ما$_2$ = ف (لا$_2$) .... ما$_n$ = ف (لا$_n$) کھینچو متصل معینوں کے سروں کو وتروں کے ذریعہ ملا دو اس طرح ن منحرف نما تیار ہو نگے۔

تب ہندسہ کے مشہور ضابطہ سے پہلے منحرف نما کا رقبہ = $\frac{1}{2}$ (ما$_0$ + ما$_1$) مف لا

دوسرے ״ ״ = $\frac{1}{2}$ (ما$_1$ + ما$_2$) مف لا

ن-ویں ״ ״ = $\frac{1}{2}$ (ما$_{n-1}$ + ما$_n$) مف لا

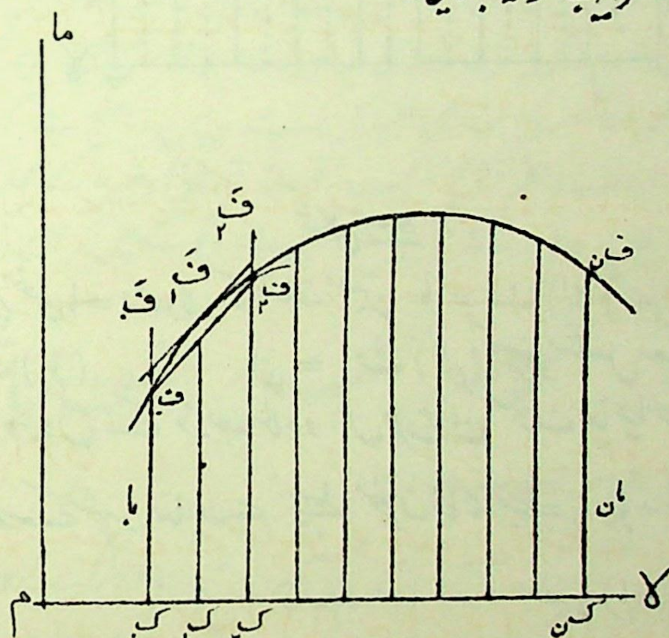
ان سب کو جمع کرنے سے منحرف نمائی قاعدہ

رقبہ = ($\frac{1}{2}$ ما$_0$ + ما$_1$ + ما$_2$ + ... ما$_{n-1}$ + ما$_n$) مف لا (ح)

حاصل ہوتا ہے۔ ظاہر ہے کہ اس طریقہ میں مف لا جتنا چھوٹا ہوگا منحرف نماؤں کے رقبوں کا مجموعہ دیے ہوئے منحنی کے نیچے کے رقبہ کے قریب تر مساوی ہوگا۔

سمپسن (Simpson) کا قاعدہ (یا مکافی شکل کا قاعدہ)

اگر متواتر معینوں ما اور ما وغیرہ کے سروں کو وتروں کے ذریعہ ملانے کے عوض متصل کے تین تین معینوں کے سروں میں سے مناسب خطوط مکافی کھینچیں۔ (دیکھو شکل ۵۹) تو چونکہ انتصابی محور والا خط مکافی کسی بھی منحنی کے تین نقطوں میں سے گزارا جا سکتا ہے اور ایسی قوسوں کا سلسلہ دیے ہوئے منحنی کے ساتھ بہ نسبت وتروں کے شکستہ خط کے زیادہ منطبق ہوتا ہے اس لیے یہ طریقہ رقبہ کی صحیح قیمت کے قریب تر نتیجہ دیگا۔



شکل ۵۹

شکل ۵۹ میں محور م لا پر لا = ا م ک سے لے کر لا = ب = م کن تک کے وقفہ کو ن جفت مساوی حصوں میں تقسیم کیا گیا ہے ہر حصہ = مف لا۔ ہر تین نقطوں ف، ف، ف، ف، ف، ف وغیرہ کے متواتر جُٹ میں سے انتصابی محور والے خطوط مکافی کھینچے گئے ہیں۔

چنانچہ مکافی ٹکڑے ک ف ف ف ک کا رقبہ

= منحرف نما ک ب ف ب ف$_{۲}$ ک$_{۲}$ + قطاع مکافی ف ب ف$_{۱}$ ف$_{۲}$

لیکن منحرف نما ک ب ف ب ف$_{۲}$ ک$_{۲}$ کا رقبہ $= \frac{۱}{۲}$ (ما$_{۰}$ + ما$_{۲}$) ۲ مف لا

= (ما$_{۰}$ + ما$_{۲}$) مف لا

اور قطاع مکافی ف ب ف$_{۱}$ ف$_{۲}$ $= \frac{۲}{۳}$ (رقبہ پیرامونی متوازی الاضلاع ف ب ف$_{۲}$ ف$_{۲}$ فو) [دیکھو مثال (۱۲) متعلقہ مماس]

$= \frac{۲}{۳}$ (ما$_{۱}$ − $\frac{۱}{۲}$ (ما$_{۰}$ + ما$_{۲}$)) ۲ مف لا $= \frac{۲}{۳}$ (۲ ما$_{۱}$ − ما$_{۰}$ − ما$_{۲}$) مف لا

پس پہلے مکافی ٹکڑے گ ب ف ب ف$_{۱}$ ف$_{۲}$ ک$_{۲}$ کا رقبہ = (ما$_{۰}$ + ما$_{۲}$) مف لا + $\frac{۲}{۳}$ (۲ ما$_{۱}$ − ما$_{۰}$ − ما$_{۲}$) مف لا

$= \frac{\text{مف لا}}{۳}$ (ما$_{۰}$ + ۴ ما$_{۱}$ + ما$_{۲}$)

اسی طرح دوسرے (دُہرے) ٹکڑے کا رقبہ $= \frac{\text{مف لا}}{۳}$ (ما$_{۲}$ + ۴ ما$_{۳}$ + ما$_{۴}$)

تیسرے ،، ،، $= \frac{\text{مف لا}}{۳}$ (ما$_{۴}$ + ۴ ما$_{۵}$ + ما$_{۶}$)

. . . .

آخری ،، ،، $= \frac{\text{مف لا}}{۳}$ (ما$_{ن-۲}$ + ۴ ما$_{ن-۱}$ + ما$_{ن}$)

ان سب کو جمع کرنے سے سمپسن کا قاعدہ (ن کو جفت لے کر) حاصل ہوتا ہے :-

(س) رقبہ $= \frac{\text{مف لا}}{۳}$ (ما$_{۰}$ + ۴ ما$_{۱}$ + ۲ ما$_{۲}$ + ۴ ما$_{۳}$ + ۲ ما$_{۴}$ + ... ما$_{ن}$)

منحرف نمائی قاعدہ کی طرح اس قاعدہ میں بھی مف لا جتنا چھوٹا ہوگا (یعنی ن کی تعداد بڑی ہوگی) منحنی کے نیچے کے رقبہ کی قیمت سے نتیجہ اتنا ہی زیادہ قریب تر ہوگا۔

مثال کے طور پر ہم تکملہ $\int^{۲} \sqrt{۴ + \text{لا}^{۳}}$ فرلا کی دونوں طریقوں سے تقریبی قیمت معلوم کرکے ان قیمتوں کا باہمدیگر مقابلہ کرتے ہیں۔

حل ۔ پہلے فرض کرو ن = ۴

پس مف لا = ۰٫۵ اور چونکہ ما = $\sqrt{۴ + \text{لا}^۳}$

اس کی مدد سے لا، ما کی قیمتوں کی ایک جدول کرلیتے ہیں چنانچہ تقریبی ضابطہ (ح) استعمال کرنے سے

لا	ما	
۰	۲٫۰۰۰	= $\text{ما}_۰$
۰٫۵	۲٫۰۳۱	= $\text{ما}_۱$
۱٫۰	۲٫۲۳۶	= $\text{ما}_۲$
۱٫۵	۲٫۷۱۶	= $\text{ما}_۳$
۲٫۰	۳٫۴۶۴	= $\text{ما}_۴$

تکملہ = (۱٫۰۰ + ۲٫۰۳۱ + ۲٫۲۳۶ + ۲٫۷۱۶ + ۱٫۷۳۲) × ۰٫۵

= ۴٫۸۵۸ جواب

اگر ن = ۱۰ لیا جائے تو اسی قاعدے سے جواب ۴٫۸۲۶ آتا ہے جو صحیح جواب سے قریب تر ہے۔

اسی تکملہ کو تقریبی ضابطہ (س) استعمال کرکے اور ن = ۴ ہی لے کر دریافت کریں تو

جواب برآمد ہوگا = (۲٫۰۰۰ + ۸٫۱۲۴ + ۴٫۴۷۲ + ۱۰٫۸۶۴ + ۳٫۴۶۴) × $\frac{۰٫۵}{۳}$

= ۴٫۸۲۱ جو ضابطہ (ح) میں ن = ۱۰ لے کر عمل کرنے کے قریب قریب ہے

مثالیں

سمپسن کے قاعدہ کے ذریعہ مندرجہ ذیل تکملوں کی تقریبی قیمتیں دریافت کرو۔ ن کی مصرحہ قیمتیں استعمال کی جائیں۔

(۱) $\int_۰^۴ \sqrt[۳]{۱۰ + \text{لا}^۲}\ \text{فزلا}$ ن = ۴ [جواب = ۹٫۸۴]

(۲) $\int_۰^۴ \sqrt{۱۰۰ - \text{لا}^۳}\ \text{فزلا}$ ن = ۴ [جواب = ۳۶٫۳۹]

(۳) $\int_۰^۲ \sqrt{۹ + \text{لا}^۴}\ \text{فزلا}$ ن = ۴ [جواب = ۶٫۸۹]

(۴) ∫ ₋₃^۱ [۳ لا^۲ − ۱۶] فرلا ن = ۶ [جواب = ۱۸،۱۰

۸۔ محدود تکملہ کے حدود کا باہمی تبادلہ مترادف ہے محدود تکملہ کی تبدیلی علامت کے۔

چونکہ ∫ ₐ^ب فہ (لا) فرلا = ف (ب) − ف (ا)

اور ∫ ب^ا فہ (لا) فرلا = ف (ا) − ف (ب)

پس ∫ ₐ^ب فہ (لا) فرلا = − ∫ ب^ا فہ (لا) فرلا

۹۔ محدود تکملہ کے وقفہ تکمل کی تحلیل۔

چونکہ ∫ ₐ^لاا فہ (لا) فرلا = ف (لاا) − ف (ا)

اور ∫ لاا^ب فہ (لا) فرلا = ف (ب) − ف (لاا)

اس لیے دونوں کو جمع کرنے سے ∫ ₐ^لاا فہ (لا) فرلا + ∫ لاا^ب فہ (لا) فرلا = ف (ب) − ف (ا)

لیکن ∫ ₐ^ب فہ (لا) فرلا = ف (ب) − ف (ا)

پس آخری دو جملوں کے مقابلہ سے واضح رہے کہ

∫ ₐ^ب فہ (لا) فرلا = ∫ ₐ^لاا فہ لا (فرلا) + ∫ لاا^ب فہ (لا) فرلا

اس مسئلہ کی ہندسی ترجمانی بھی باسانی ہو سکتی ہے۔ بطور مشق یہ کام طالب علم

کے لیے چھوڑ دیا گیا ہے۔ یہ بھی واضح ہے کہ محدود تکملہ کی حسب طریقہ بالا نہ صرف دو بلکہ متعدد جداگانہ محدود تکملوں میں تحلیل ہو سکتی ہے۔

۹ - ایک محدود تکملہ اس کے حدود کا تفاعل ہے۔ اس لیے کہ

$\int_{ا}^{ب}$ فہ (لا) فرلا = ف (ب) - ف (ا) اسی طرح $\int_{ا}^{ب}$ فہ (ی) فری = ف (ب) - ف (ا)

اور $\int_{ا}^{ب}$ فہ (لا) فرلا کی بعینہٖ وہی قیمت ہے جو $\int_{ا}^{ب}$ فہ (ی) فری وغیرہ کی

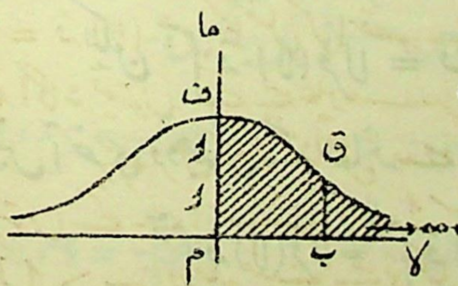
۱۰ - نامتناہی حدود — اب تک فرض کیا گیا تھا کہ تکمل کے حدود محدود ہیں۔ معمولی کاموں میں بھی بعض اوقات اس شرط کے رفع کرنے کی ضرورت پیش آتی ہے۔ خاص خاص صورتوں میں مندرجۂ ذیل تعریفات کی مدد سے یہ شرط رفع ہو سکتی ہے۔

تعریفات:-

جب بالائی حد نامتناہی ہے تو $\int_{ا}^{+\infty}$ فہ (لا) فرلا = نہا$_{ب \to +\infty}$ $\int_{ا}^{ب}$ فہ (لا) فرلا

اور جب زیریں حد نامتناہی ہے تو $\int_{-\infty}^{ب}$ فہ (لا) فرلا = نہا$_{ا \to -\infty}$ $\int_{ا}^{ب}$ فہ (لا) فرلا

بشرطیکہ ایسی انتہائیں موجود ہیں۔



شکل ۶۰

توضیحی مثال (۱) اگنیسی کی ڈائن کی مساوات لا^2 ما = ۴ ا^2 (۲ ا - ما) ہے

یعنے ما = $\frac{۸ ا^3}{لا^2 + ۴ ا^2}$ اور شکل نمبر ۶۰ اس کی ترسیم ہے

$\int_{0}^{+\infty} \frac{۸ ا^3 \, فرلا}{لا^2 + ۴ ا^2}$ کی تعیین کی

ہندسی ترجمانی رقبہ م ف ق ب کی قیمت دریافت کرنا ہے جبکہ معین ب ق لاتناہی تک سیدھے جانب ہٹتا چلا جاتا ہے - پہلی تعریف کے لحاظ سے

$$\int_{\cdot}^{+\infty}\frac{\text{۸ ا}^{3}\text{ فرلا}}{\text{لا}^{2}+\text{۴ ا}^{2}}=\underset{\text{ب}\to+\infty}{\text{نہا}}\int_{\cdot}^{\text{ب}}\frac{\text{۸ ا}^{3}\text{ فرلا}}{\text{لا}^{2}+\text{۴ ا}^{2}}=\underset{\text{ب}\to+\infty}{\text{نہا}}\left[\text{۴ ا}^{2}\text{ مس}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{۲ ا}}\right]_{\cdot}^{\text{ب}}$$

$$=\underset{\text{ب}\to+\infty}{\text{نہا}}\left[\text{۴ ا}^{2}\text{ مس}^{-1}\frac{\text{ب}}{\text{۲ ا}}\right]=\text{۴ ا}^{2}\,\frac{\pi}{2}=2\pi\,\text{ا}^{2}\ \text{جواب}$$

اس نتیجہ سے ظاہر ہے ۲π ا^۲ کو ہم دیے ہوئے منحنی معیّن م ف اور محور م لا سے گھیرا ہوا یا محدود رقبہ کہہ سکتے ہیں - اگرچہ درحقیقت یہ رقبہ بالکلیہ گھیرا ہوا یا محدود نہیں ہے -

توضیحی مثال (۲) $\int_{1}^{+\infty}\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}}$ کی قیمت دریافت کرو -

حل - دیا ہوا تکملہ $=\underset{\text{ب}\to+\infty}{\text{نہا}}\int_{1}^{\text{ب}}\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}}=\underset{\text{ب}\to+\infty}{\text{نہا}}(\text{لوک ب})$

ب کی قیمت جب نا متناہی طریقہ پر بڑھتی ہے تو لوک ب کی انتہا وجود نہیں رکھتی - پس اس مثال میں تکملہ بے معنی ہے -

۱۱۱ - اب ہم ایسی چند صورتوں سے بحث کرینگے جن میں تفاعل ما = فہ (لا) جس کا تکمل کرنا مقصود ہے تکمل کے حدود کے مابین متغیر کی جداگانہ قیمتوں کے لیے غیر مسلسل ہے -

پہلے فرض کرو کہ تفاعل، حدود ا اور ب کے مابین لا کی تمام قیمتوں کے لیے باستثناء لا = ا مسلسل ہے -

اگر ا < ب اور صہ مثبت ہے تو تکملہ کے لیے ہم تعریف ذیل استعمال کرینگے :-

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}}\text{فہ (لا) فرلا}=\underset{\text{صہ}\to 0}{\text{نہا}}\int_{\text{ا}+\text{صہ}}^{\text{ب}}\text{فہ (لا) فرلا}\quad\ldots\ldots\ (1)$$

بشرطیکہ یہ انتہا موجود ہے۔

اب فرض کرو کہ تفاعل حدود ا اور ب کے مابین لا کی تمام قیمتوں کے لیے باستثناء لا = ب مسلسل ہے۔ تو اس کے لیے یہ تعریف استعمال کرینگے

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فہ (لا) فرلا} = \text{نہا}_{\text{صہ} \to 0} \int_{\text{ا}}^{\text{ب} - \text{صہ}} \text{فہ (لا) فرلا} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

بشرطیکہ یہ انتہا موجود ہے۔

جب تفاعل دیے ہوئے حدود کے مابین لا کی تمام قیمتوں کے لیے باستثناء لا = ج مسلسل ہے اور ج واقع ہے ا اور ب کے درمیان۔ تو صہ اور صَہ کو مثبت اعداد مان کر تکملہ کی اس طرح تعریف کرینگے :-

$$\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فہ (لا) فرلا} = \text{نہا}_{\text{صہ} \to 0} \int_{\text{ا}}^{\text{ج} - \text{صہ}} \text{فہ (لا) فرلا}$$

$$+ \text{نہا}_{\text{صَہ} \to 0} \int_{\text{ج} + \text{صَہ}}^{\text{ب}} \text{فہ (لا) فرلا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۳)$$

بشرطیکہ یہ انتہائیں علحدہ علحدہ موجود ہیں۔

توضیحی مثال (۱) $\int_{0}^{1} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{3}}$ کی تعیین کرو۔

حل - اس مثال میں $\frac{1}{\text{لا}^{3}}$ نامتناہی ہو جاتا ہے جبکہ لا = 0۔

پس تعریف (۱) کے بموجب $\int_{0}^{1} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{3}} = \text{نہا}_{\text{صہ} \to 0} \int_{\text{صہ}}^{1} \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{3}} = \text{نہا}_{\text{صہ} \to 0} \left[\frac{1}{2\,\text{صہ}^{2}} - \frac{1}{2} \right]$

اس صورت میں کوئی انتہا نہیں ہے اس لیے تکملہ کا وجود نہیں ہے۔

توضیحی مثال (۲) $\int_{0}^{\text{ا}} \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{ا}^{2} - \text{لا}^{2}}}$ کی قیمت معلوم کرو۔

حل - اس مثال میں $\frac{1}{\sqrt{\text{ا}^{2} - \text{لا}^{2}}}$ نامتناہی ہو جاتا ہے جبکہ لا = ا

پس تعریف (۲) کے بموجب $\int_{۰}^{۲} \frac{\text{فر لا}}{\sqrt{۴ - \text{لا}^{۲}}} = \underset{\text{صہ} \to ۰}{\text{نہا}} \int_{۰}^{۲-\text{صہ}} \frac{\text{فر لا}}{\sqrt{۴ - \text{لا}^{۲}}}$

$= \underset{\text{صہ} \to ۰}{\text{نہا}} \left[\text{جب}^{-۱} \frac{\text{لا}}{۲}\right]_{۰}^{۲-\text{صہ}} = \underset{\text{صہ} \to ۰}{\text{نہا}} \left[\text{جب}^{-۱} \left(۱ - \frac{\text{صہ}}{۲}\right)\right] = \text{جب}^{-۱}\, ۱$

$= \frac{\pi}{۲}$ جواب

توضیحی مثال (۳) $\int_{۰}^{۳\text{ب}} \frac{۲\, \text{لا فر لا}}{(\text{لا}^{۲} - \text{ب}^{۲})^{\frac{۲}{۳}}}$ کی قیمت دریافت کرو۔

اس مثال میں تکمل طلب تفاعل حدود تکمل یعنے لا کی قیمتوں صفر اور ۳ ب کے مابین لا = ب پر غیر مسلسل ہوجاتا ہے۔

پس بموجب تعریف (۳) $\int_{۰}^{۳\text{ب}} \frac{۲\, \text{لا فر لا}}{(\text{لا}^{۲} - \text{ب}^{۲})^{\frac{۲}{۳}}} = \underset{\text{صہ} \to ۰}{\text{نہا}} \int_{۰}^{\text{ب}-\text{صہ}} \frac{۲\, \text{لا فر لا}}{(\text{لا}^{۲} - \text{ب}^{۲})^{\frac{۲}{۳}}}$

$+ \underset{\text{صہ} \to ۰}{\text{نہا}} \int_{\text{ب}+\text{صہ}}^{۳\text{ب}} \frac{۲\, \text{لا فر لا}}{(\text{لا}^{۲} - \text{ب}^{۲})^{\frac{۲}{۳}}} = \underset{\text{صہ} \to ۰}{\text{نہا}} \left[۳ (\text{لا}^{۲} - \text{ب}^{۲})^{\frac{۱}{۳}}\right]_{۰}^{\text{ب}-\text{صہ}}$

$+ \underset{\text{صہ} \to ۰}{\text{نہا}} \left[۳ (\text{لا}^{۲} - \text{ب}^{۲})^{\frac{۱}{۳}}\right]_{\text{ب}+\text{صہ}}^{۳\text{ب}} = \underset{\text{صہ} \to ۰}{\text{نہا}} \left[۳ \sqrt[۳]{(\text{ب} - \text{صہ})^{۲} - \text{ب}^{۲}} + ۳\, \text{ب}^{\frac{۲}{۳}}\right]$

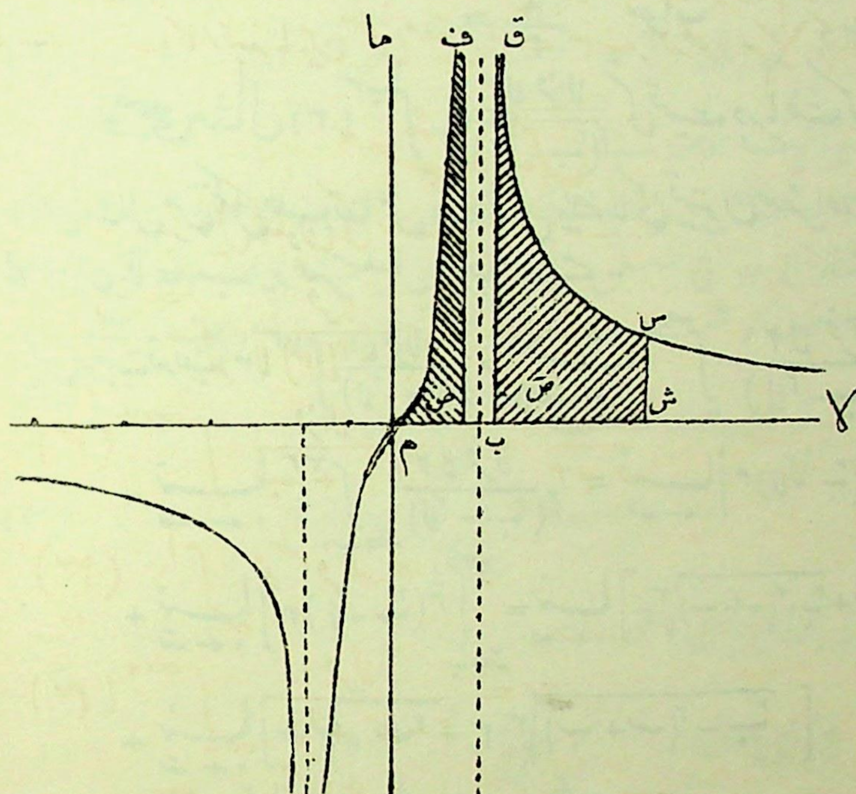
$+ \underset{\text{صہ} \to ۰}{\text{نہا}} \left[۳ \sqrt[۳]{۸\, \text{ب}^{۲}} - ۳ \sqrt[۳]{(\text{ب} + \text{صہ})^{۲} - \text{ب}^{۲}}\right]$

$= ۳\, \text{ب}^{\frac{۲}{۳}} + ۶\, \text{ب}^{\frac{۲}{۳}} = ۹\, \text{ب}^{\frac{۲}{۳}}$ جواب

اس کی ہندسی ترجمانی کے لیے منحنی $\text{ما} = \frac{۲\, \text{لا}}{\sqrt[۳]{(\text{لا}^{۲} - \text{ب}^{۲})^{۲}}}$ شکل ۶۱ میں مرتسم کیا گیا ہے۔ اس کے ملاحظہ سے واضح ہوگا کہ لا = ب ایک متقارب ہے۔ م ش = ۳ ب، م ص = ب − صہ اور م ص' = ب + صہ رقبہ م ف ص $= \int_{۰}^{\text{ب}-\text{صہ}} \frac{۲\, \text{لا فر لا}}{\sqrt[۳]{(\text{لا}^{۲} - \text{ب}^{۲})^{۲}}} = ۳ \sqrt[۳]{(\text{ب} - \text{صہ})^{۲} - \text{ب}^{۲}} + ۳\, \text{ب}^{\frac{۲}{۳}}$

جیسے جیسے ف ص متقارب کی طرف سیدھے جانب آگے بڑھتا ہے

یعنے جوں جوں صہ صفر کے قریب پہنچتا ہے، رقبہ م ف ص ۳ $\text{ب}^{\frac{۲}{۳}}$ کو بطور انتہا پہنچتا ہے۔



شکل ۶۱

سابقہ توضیحی مثال کی طرح ۳ $\text{ب}^{\frac{۲}{۳}}$ کو ہم م ف، متقارب ب اور محور م لا سے گھیرا ہوا رقبہ کہتے ہیں ۔

$$\text{اسی طرح رقبہ ص ق س ش} = \int_{\text{ب+صہ}}^{\text{۳ب}} \frac{\text{۲ لا فر لا}}{\sqrt[۳]{(\text{لا}^{۲} - \text{ب}^{۲})^{۲}}}$$

$$= ۳\sqrt[۳]{\text{۸ب}^{۲}} - ۳\sqrt[۳]{(\text{ب+صہ})^{۲} - \text{ب}^{۲}}$$

اور وہ بطور انتہا ۶ $\text{ب}^{\frac{۲}{۳}}$ کو پہنچتا ہے جیسے ق ص بائیں جانب متقارب

کی طرف پہنچتا ہے یعنے جوں جوں ھ صفر کے قریب پہنچتا ہے۔ اس لیے $۶\,ب^{\frac{۲}{۳}}$ کو ہم ق س، متقارب اور معین لا = ۳ب کہتے ہیں۔ ان نتائج کو جمع کرنے سے $۹\,ب^{\frac{۲}{۳}}$ حاصل ہوتا ہے جو محور م ما کے سیدھے جانب کا رقبہ مابین منحنی معین لا = ۳ب اور محور م لا کہلاتا ہے۔

مثالیں

مندرجۂ ذیل تکملوں کی تصدیق کرو :—

(۱) $$\int_{۱}^{+\infty} \frac{فرلا}{لا\,(۲لا^{۲}-۱)^{\frac{۱}{۲}}} = \frac{\pi}{۴}$$

(۲) $$\int_{۰}^{+\infty} \frac{فرلا}{ب^{۲}+د^{۲}\,لا^{۲}} = \frac{\pi}{۲\,ب\,و}$$

(۳) $$\int_{-\infty}^{۱} و^{ط}\,فرط = و$$

(۴) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{فرلا}{لا^{۲}+۲لا-۲} = \pi$$

(۵) $$\int_{۰}^{ب} \frac{لا^{۳}\,فرلا}{\left(\sqrt{ب^{۲}+لا^{۲}}\right)^{۳}} = \frac{۱}{۲}\left(۳\sqrt{۲}-۴\right)ب$$

تیرہواں باب

تکملہ کا تصور بطور انتہائے مجموعہ

(گردشی جسموں کے حجم منحنیوں کی تخطیط گردشی سطحوں کے رقبے وغیرہ)

۱۔ تکمّلی احصاء کا اساسی مسئلہ۔

فرض کرو کہ تفاعل فہ (لا) وقفہ لا = ا سے لا = ب تک مسلسل ہے۔ اس وقفہ کو ن صغیر یا زیر وقفوں (Sub-intervals) میں تقسیم کرو جن کے طول مف لا۱، مف لا۲ .... مف لان ہیں اور ہر ایک صغیر زیر وقفہ میں ایک ایک نقطہ منتخب کرو۔ ان نقطوں کے فصلوں یا مقطوعوں کو علی الترتیب لا۱، لا۲ .... لان مانو۔ اب حاصل جمع

فہ (لا۱) مف لا۱ + فہ (لا۲) مف لا۲ + ... + فہ (لان) مف لان = $\sum_{و=۱}^{ن}$ فہ (لاو) مف لاو .....(۱)

پر غور کرو - اس مجموعہ کی انتہائی قیمت جبکہ ن نا متناہی بڑا ہوتا ہے اور ہر ایک زیر وقفہ بطور انتہا صفر کو پہنچتا ہے، مساوی ہوتا ہے محدود تکملہ $\int_{ا}^{ب}$ فہ (لا) فرلا کے

مختصراً $$\int_{ا}^{ب} \text{فہ (لا) فرلا} = \lim_{ن \to \infty} \sum_{و=1}^{ن} \text{فہ (لاو) مف لاو}$$

اس مسئلہ کی اہمیت اس امر سے پیدا ہوتی ہے کہ ہم عمل تکمل سے ایک ایسی مقدار کو محسوب کر سکتے ہیں جو (۱) کی صورت کے مجموعہ کی انتہا ہے۔

یہاں یہ یاد رہے کہ مجموعہ (۱) کی ہر رقم ایک تفرقی جملہ ہے، اس لیے کہ طول مف لا۱، مف لا۲ ..... مف لان بطور انتہا صفر کو پہنچتے ہیں۔

اس مسئلہ کا جب عملی سوالات پر اطلاق کیا جاتا ہے تو مندرجہ ذیل قاعدہ بکار آمد ہوتا ہے۔

اساسی مسئلہ کا قاعدہ

پہلا عمل - مطلوبہ مقدار کو متشابہ حصص میں تقسیم کرو، ایسے کہ نتیجہ واضح طور پر ان حصص کے حاصل جمع کی انتہا معلوم کرنے سے دریافت ہو جائے۔

دوسرا عمل - ان حصص کی مقداروں کے لیے ایسے جملے اخذ کرو کہ ان کا حاصل جمع صورت (۱) کا سا ہو۔

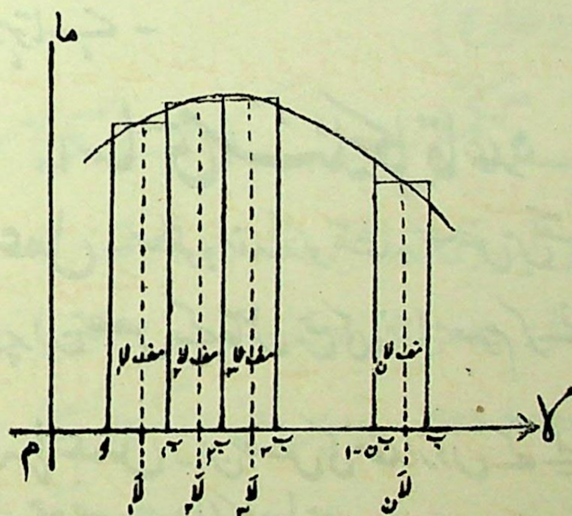
تیسرا عمل - مناسب انتہائیں لا = ا اور لا = ب منتخب کر لینے کے بعد اساسی مسئلہ

$$\lim_{ن \to \infty} \sum_{و=1}^{ن} \text{فہ (لاو) مف لاو} = \int_{ا}^{ب} \text{فہ (لا) فرلا}$$

استعمال کر کے تکمل انجام دو ۔

۲ ۔ اساسی مسئلہ کا تحلیلی ثبوت ۔

سابقہ فصل کی طرح لا = ا سے لا = ب تک کے وقفہ کو کوئی بھی ن تعداد زیر وقفوں میں منقسم کرو جن کا مساوی ہونا لازمی نہیں ۔ ان نقاط تقسیم کے فصلوں کو ب۱ ، ب۲ ، ..... بن-۱ سے تعبیر کرو اور زیر وقفوں کے طولوں کو مف لا۱ ، مف لا۲ ..... مف لان سے تعبیر کرو ۔ اب فرض کرو کہ مسئلہ اوسط قیمت (باب دہم) کے ذریعہ ہر ایک زیر وقفہ میں ایک ایک فصلہ دریافت کیا جاتا ہے جو علی الترتیب لاَ۱ ، لاَ۲ ..... لاَن سے تعبیر کیا جاتا ہے ۔ ہر نقطہ پر ایک ایک معین بناؤ (دیکھو شکل ۶۲) اور ہر معین کے سرے میں سے افقی خط کھینچ کر ایک ایک مستطیل تیار کرو ۔ یہ بات ذہن نشین رہے کہ یہاں اوسط قیمت کے مسئلہ والے فَ (لا) کی جگہ فہ (لا) ہے ۔



شکل ۶۲

پس مساوات (ب) متعلق مسئلہ مذکور کے پہلے وقفہ (ا = ا، ب = ب اور لاَ واقع ہے

ا اور ب_1 کے مابین) پر اطلاق سے،

$$\text{فہ}(\bar{\text{لا}}_1) = \frac{\text{ف}(\text{ب}_1) - \text{ف}(\text{ا})}{\text{ب}_1 - \text{ا}}$$

یا، چونکہ $\text{ب}_1 - \text{ا} = \text{مف}(\text{لا}_1)$، $\text{ف}(\text{ب}_1) - \text{ف}(\text{ا}) = \text{فہ}(\bar{\text{لا}}_1)\ \text{مف لا}_1$

اسی طرح دوسرے وقفہ کے لیے، $\text{ف}(\text{ب}_2) - \text{ف}(\text{ب}_1) = \text{فہ}(\bar{\text{لا}}_2)\ \text{مف لا}_2$

تیسرے وقفہ کے لیے، $\text{ف}(\text{ب}_3) - \text{ف}(\text{ب}_2) = \text{فہ}(\bar{\text{لا}}_3)\ \text{مف لا}_3$

. . . .

ن-ویں وقفہ کے لیے، $\text{ف}(\text{ب}) - \text{ف}(\text{ب}_{\text{ن}-1}) = \text{فہ}(\bar{\text{لا}}_{\text{ن}})\ \text{مف لا}_{\text{ن}}$

ان سبھوں کو جمع کرنے سے $\text{ف}(\text{ب}) - \text{ف}(\text{ا}) = \text{فہ}(\bar{\text{لا}}_1)\ \text{مف لا}_1$

$+ \text{فہ}(\bar{\text{لا}}_2)\ \text{مف لا}_2 + \ldots\ldots + \text{فہ}(\bar{\text{لا}}_{\text{ن}})\ \text{مف لا}_{\text{ن}}$ ..... (۱)

لیکن $\text{فہ}(\bar{\text{لا}}_1)\ \text{مف لا}_1 =$ پہلے مستطیل کا رقبہ، $\text{فہ}(\bar{\text{لا}}_2)\ \text{مف لا}_2 =$ دوسرے مستطیل کا رقبہ، وغیرہ

اس لیے مساوات (۱) کے بائیں جانب کا مجموعہ مستطیلوں کے رقبوں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔

لیکن $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فہ}(\text{لا})\, \text{ڈلا} = \text{ف}(\text{ب}) - \text{ف}(\text{ا})$

اور $\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فہ}(\text{لا})\, \text{ڈلا}$ منحنی $\text{ما} = \text{فہ}(\text{لا})$، محور لا اور $\text{لا} = \text{ا}$،

اور $\text{لا} = \text{ب}$ پر کے معینوں کے درمیانی رقبہ کے مساوی ہے۔

پس مجموعہ $\sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} \text{فہ}(\bar{\text{لا}}_{\text{و}})\ \text{مف لا}_{\text{و}}$ ..... (۲) اس رقبہ کے مساوی ہے۔

اور درانحالیکہ متناظر مجموعہ $\sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} \text{فہ}(\text{لا}_{\text{و}})\ \text{مف لا}_{\text{و}}$ .... (۳)

(جس میں لاو زیر وقفہ مف لاو کا کوئی بھی فصلہ ہے' یہ رقبہ نہیں دیتا ہے' تاہم یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ دونوں مجموعے (۲) اور (۳) مساوات کو پہنچ جاتے ہیں جبکہ ن نا متناہی بڑا ہوتا ہے اور ہر ایک زیر وقفہ بطور انتہا کے صفر کو پہنچتا ہے۔ کیونکہ تفاوت فہ (لاَ) - فہ (لاُو) کی عددی قیمت مف لاو میں اعظم و اقل معینوں کے تفاوت سے زیادہ نہیں ہوتی ہے معہذا یہ ہر وقت ممکن ہے (اگرچہ اس کا ثبوت تالیف ہذا کے نصاب سے باہر ہے) کہ ان تمام تفاوتوں کو بلحاظ عددی قیمت کے کسی مقررہ (assignable) مثبت عدد صہ سے' خواہ وہ کتنا ہی چھوٹا ہو' وقفوں کی تقسیم در تقسیم کافی حد تک عمل میں لا کر (یعنے بالفاظ دیگر ن کو کافی بڑا لے کر) کمتر بنا دیا جائے۔ پس ایسے ن کے لیے مجموعوں (۲) اور (۳) کا تفاوت عددی قیمت میں صہ (ب - ا) سے بقدر کسی مقررہ مثبت مقدار کے خواہ وہ کتنی بھی صغیر ہو کمتر ہے۔ بدیں وجہ ن جیسے جیسے نا متناہی بڑا ہوتا ہے مجموعہ (۲) اور مجموعہ (۳) باہم دیگر قریب تر مساوی ہوتے جاتے ہیں اور چونکہ (۲) ہمیشہ رقبہ کے مساوی ہوتا ہے' اساسی نتیجۂ ذیل بر آمد ہوتا ہے :—

$$\int_{ا}^{ب} \text{فہ (لا) فرلا} = \text{نہا}_{\text{ن} \to \infty} \sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} \text{فہ (لاو) مف لاو}$$

جس میں وقفہ [ا' ب] کی کسی طرح سے بھی تقسیم در تقسیم عمل میں لائی جاتی ہے اور لاو متناظر زیر وقفہ میں کوئی فصلہ ہے۔

۳ - مستوی منحنیوں کے رقبے علی القوائم محدد

شکل ۶۳ پر غور کرنے سے واضح ہوگا کہ رقبہ مابین منحنی ف ق' محور لا اور معین لا = ا و لا = ب = $\int_{ا}^{ب}$ ما فرلا . . . . (۱)

ما کو لا کی رقموں میں تعویض کرنے اور مصرحۂ بالا محدود تکملہ

شکل ۶۳

محسوب کرنے سے مطلوبہ رقبہ دریافت ہو جاتا ہے -

اسی طرح شکل ۶۴ پر غور کرنے سے واضح ہوگا کہ رقبہ مابین منحنی،

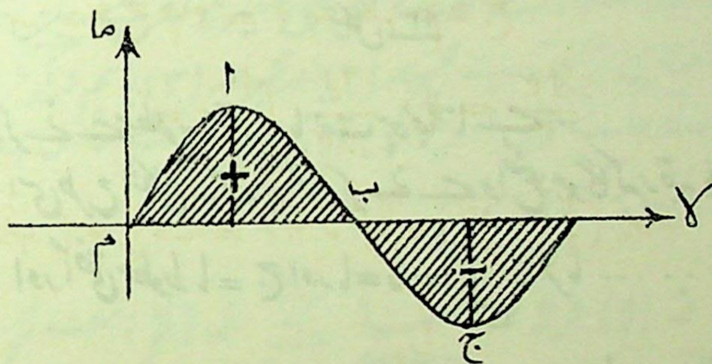
محور ما اور اُفقی خطوط ما = ج اور ما = د = $\int_{ج}^{د}$ لا فرما .... (ب)

شکل ۶۴

لا کو ما کی رقموں میں تعویض کرنے اور مصرحۂ بالا محدود تکملہ محسوب کرنے سے مطلوبہ رقبہ دریافت ہو جاتا ہے۔ رقبہ کے سامنے منفی علامت لکھی جائے تو اس کا کیا مفہوم ہے؟ ضابطہ (۱) میں ا کمتر ہے ب سے۔ چونکہ

ا∫ب ما فرلا سے مراد نہـا ن←∞ و=۱∑ن فہ (لاو) مف لاو ہے اور اس مجموعہ میں

و = ۱، ۲، ۳، .... ن تو اگر فہ (لاو) یا ما منفی ہو اس مجموعہ کی ہر ایک رقم منفی ہوگی اور ضابطہ (۱) ایک ایسا رقبہ دیگا جس کے سامنے منفی علامت ہوگی۔ اس کے یہ معنی ہونگے کہ رقبہ مذکور محور لا کے نیچے ہوگا۔ جیسے جیبی منحنی ما = جب لا سے متعلق م ا ب ج د کی کمان م ا ب کا رقبہ مثبت ہے اور کمان ب ج د کا رقبہ منفی ملاحظہ ہو شکل ۶۵۔



شکل ۶۵

کیونکہ ما = صفر لکھ کر لا کے لیے حل کرنے سے

لا = ۰، ﷼، ۲﷼ وغیرہ

اور ضابطہ (۱) سے رقبہ م ا ب = ۰∫ب ما فرلا = ۰∫﷼ جب لا فرلا = ۲

اور رقبہ ب ج د = ب∫و ما فرلا = ﷼∫۲﷼ جب لا فرلا = −۲

توضیحی مثال۔ خطِ مکانی $لا^۲ = ۴\,ل\,ما$ اور ڈائن $ما = \frac{۸ل^۳}{لا^۲ + ۴ل^۲}$ کا درمیانی رقبہ معلوم کرو۔

حل۔ اس کو دو طرح سے حل کر سکتے ہیں۔ ایک طریقہ یہ ہے کہ تکمل کے حدود معلوم کرنے کے لیے دی ہوئی مساواتوں کو ہمزاد تصور کر کے مشترک لا و ما کی قیمتیں دریافت کر لی جائیں۔ یہ $(-۲ل، ل)$ اور $(+۲ل، ل)$ برآمد ہوتی ہیں۔ شکل ۶۶ میں ان نقطوں کو علی الترتیب ا اور ج سے نامزد کیا گیا ہے۔

جس رقبہ کی تعیین مطلوب ہے وہ ا م ج ب = رقبہ د ھ ج ب ا ۔ رقبہ د ھ ج م ا ہے۔

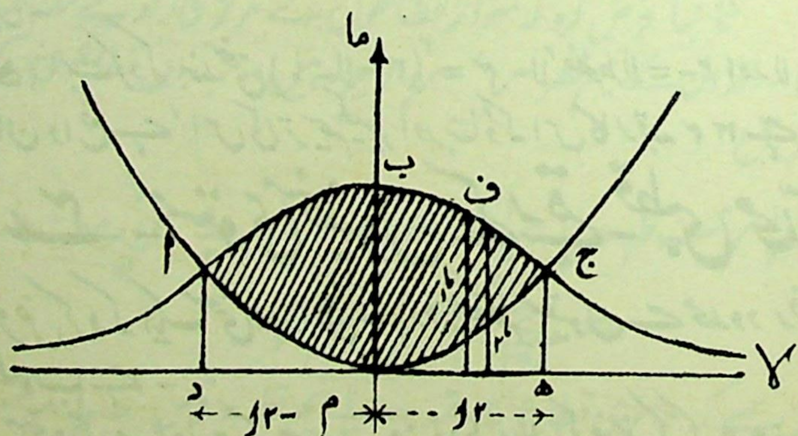
لیکن رقبہ د ھ ج ب ا = ۲ × رقبہ م ھ ج ب

$$= ۲\int_{0}^{۲ل} \frac{۸ل^۳\ \text{فلا}}{لا^۲ + ۴ل^۲} = ۲\pi ل^۲$$

اور رقبہ د ھ ج م ا = ۲ × رقبہ م ھ ج

$$= ۲\int_{0}^{۲ل} \frac{لا^۲}{۴ل}\ \text{فلا} = \frac{۴ل^۲}{۳}$$

پس رقبہ ا م ج ب $= ۲\pi ل^۲ - \frac{۴ل^۲}{۳} = ۲ل^۲\left(\pi - \frac{۲}{۳}\right)$ جواب



شکل ۶۶

دوسرا طریقہ یہ ہے کہ پٹّی ف س کو مطلوب رقبہ کا ایک عنصر تصور کیا جائے۔
اگر ما کو معیّن متعلق ڈائن قرار دیا جائے اور ما۲ کو معیّن متعلق خطِ مکافی، تو پٹّی ف س کے رقبہ کے لیے تفرقی جملہ = (ما۱ - ما۲) فرلا اس میں ما۱ اور ما۲ کی قیمتیں لا کی رقموں میں تعویض کرنے سے رقبہ ا م ج ب

= ۲× رقبہ م ج ب = ۲ ∫ (ما۱ - ما۲) فرلا

= ۲ ∫ (۸ ر۳ / (لا۲ + ۴ ر۲) - لا۲ / ۴ ر) فرلا = ۲ ر۲ (π - ۲/۳)

مثالیں

(۱) ثابت کرو کہ دو خطوط مکافی ما۲ = ر لا اور لا۲ = ب ما کا درمیانی رقبہ = ار ب / ۳

(۲) ثابت کرو کہ منحنی لا^(۲/۳) + ما^(۲/۳) = ر^(۲/۳) کا کامل رقبہ ۳/۸ π ر۲ ہے۔

(۳) بتاؤ کہ متساوی المحورین ہذلولی (قطع زائد) لا۲ - ما۲ = ر۲، محور لا اور مبداء سے منحنی پر کے کسی نقطہ (لا، ما) سے گھیرا ہوا رقبہ = ر۲/۲ لوک ((لا + ما)/ر)

(۴) ثابت کرو کہ محور لا، خطِ مکافی ما۲ = ۴ ر لا اور خطِ مستقیم ما + ۲ لا = ۴ ر سے محدود رقبہ = ۵/۳ ر۲ [اولاً خطِ مکافی اور خطِ مستقیم کی ترسیمیں تیار کر لی جائیں۔

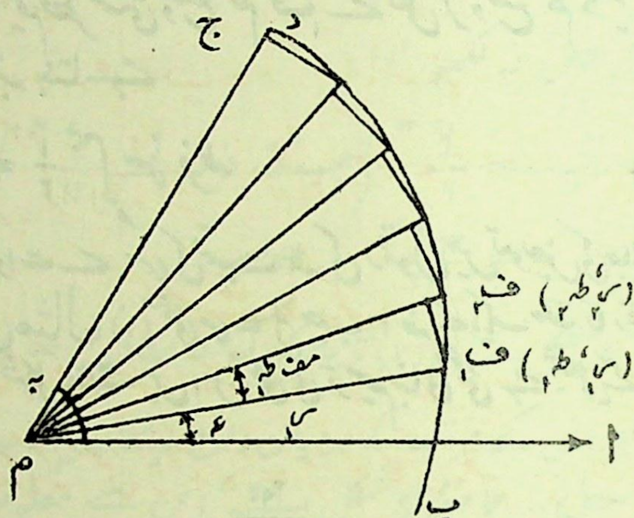
(۵) ثابت کرو کہ بند منحنی (ما - لا - ۳)۲ = ۴ - لا۲ خطوط لا = -۲ اور لا = +۲ کے درمیان واقع ہے، اس کی ترسیم کھینچو اور بتاؤ کہ اس کا رقبہ ۴ π ہے۔

۴۔ مستوی منحنیوں کے رقبے۔ قطبی محدد۔

فرض کرو کہ ایک منحنی اور اس کے دو نیمقطر سمتیوں سے محدود رقبہ کی تعیین مطلوب ہے۔

منحنی کی مساوات کو س = ف (طہ) مان کر فرض کرو کہ م ف اور م د دیے ہوئے سمتی نیمقطر ہیں (دیکھو شکل ۶۷) جو قطبی محور کے ساتھ

علی الترتیب زاویہ ع اور بہ بناتے ہیں۔ اب ۱ کا اساسی مسئلہ استعمال کرو۔



شکل ۶۷

اولاً مطلوبہ رقبہ بلاشبہ شکل میں بنائے ہوئے دائری قطاعوں کا حاصل جمع ہے۔

ثانیاً فرض کرو کہ متواتر قطاعوں کے مرکزی زاویے مف طہ۱، مف طہ۲ وغیرہ ہیں۔ اور ان کے نیم قطر ر۱، ر۲ وغیرہ ہیں۔ تب ان قطاعوں کے رقبوں کا حاصل جمع

$$= \frac{1}{2} ر_1^2 \text{ مف طہ}_1 + \frac{1}{2} ر_2^2 \text{ مف طہ}_2 + \dots\dots + \frac{1}{2} ر_ن^2 \text{ مف طہ}_ن$$

$$= \sum_{و=1}^{ن} \frac{1}{2} ر_و^2 \text{ مف طہ}_و$$

اس لیے کہ دائری قطاع کا رقبہ $= \frac{1}{2}$ نیم قطر × قوس $= \frac{1}{2} ر_1 ر_1 \text{ مف طہ}_1$

$= \frac{1}{2} ر_1^2 \text{ مف طہ}_1$ وغیرہ۔

ثالثاً اساسی مسئلہ استعمال کرنے سے

$$\text{نہا}_{\text{ن}\to\infty} \sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} \frac{1}{2}\, \text{ر}_{\text{و}}^{2}\ \text{مف طہ}_{\text{و}} = \int^{\text{ب}} \frac{1}{2}\, \text{ر}^{2}\ \text{ف طہ}$$

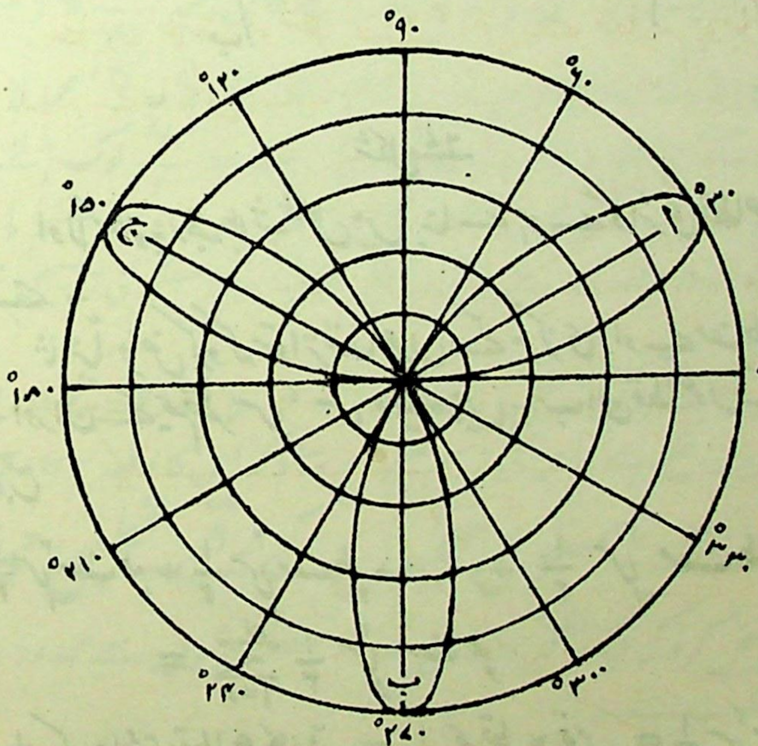
پس جبکہ منحنی کا نیم قطر سمتی وضع م ف$_1$ سے نکل کر وضع م د میں پہنچتا ہے تو اس سے جو رقبہ بنتا ہے

$$= \frac{1}{2} \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{ر}^{2}\ \text{ف طہ} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{د})$$

منحنی کی مساوات سے ر کی قیمت طہ کی رقموں میں تعویض کی جاتی ہے۔

توضیحی مثال (١) منحنی ر = ا جب ٣ طہ کے ایک حلقہ کا رقبہ معلوم کرو۔

حل۔ شکل ٦٨ میں اس منحنی کی ترسیم بنائی گئی ہے۔ شکل کے مطالعہ سے



شکل ٦٨

فوراً معلوم ہو جاتا ہے کہ اس کے بنانے کا کیا طریقہ ہے۔ ہمیں کسی ایک حلقہ کا رقبہ تعیین کرنا ہے۔

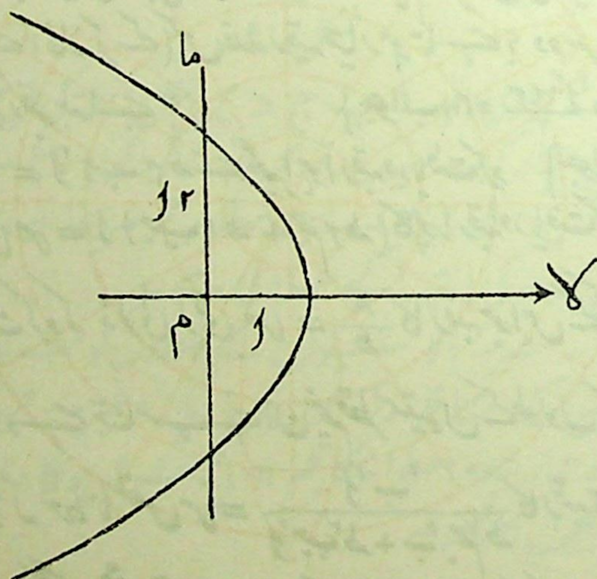
واضح ہے کہ یہ رقبہ $\frac{1}{2}\int_{0}^{\pi/3}$ ا² جب² ۳ طہ فرطہ۔ تکمل کرنے کے لیے ۳ طہ کے عوض فہ لکھو

تب رقبہ = $\frac{ا^2}{6}\int_{0}^{\pi}$ جب² فہ فرفہ = $\frac{ا^2}{12}\int_{0}^{\pi}$ جم ۲ فہ فرفہ

= $\frac{\pi ا^2}{12}$ جواب

توضیحی مثال (۲) ثابت کرو کہ خط مکافی ر = ا قط² $\frac{طہ}{2}$ کا وہ رقبہ جو منحنی اور اس کے مرتب کے درمیان واقع ہے $\frac{8ا^2}{3}$ ہے۔

حل۔ ملاحظہ ہو شکل ع۶۹، اس سے معلوم ہو جائیگا کہ تکمل کے حدود کیا ہونے چاہئیں:—



شکل ع۶۹

رقبہ = ۲ × $\frac{۱}{۲}$ $\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{۲}}$ ر۲ فر طہ = $\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{۲}}$ ا۲ قط۴ $\frac{طہ}{۲}$ فر طہ

= ۲ ا۲ $\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{۲}}$ قط۴ $\frac{طہ}{۲}$ فر $\frac{طہ}{۲}$ = ۲ ا۲ $\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{۲}}$ (۱ + مس۲ $\frac{طہ}{۲}$) قط۲ $\frac{طہ}{۲}$ فر $\frac{طہ}{۲}$

= ۲ ا۲ $\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{۲}}$ قط۲ $\frac{طہ}{۲}$ فر $\frac{طہ}{۲}$ + ۲ ا۲ $\int_{\cdot}^{\frac{\pi}{۲}}$ مس۲ $\frac{طہ}{۲}$ فر (مس $\frac{طہ}{۲}$)

= ۲ ا۲ (۱ + $\frac{۱}{۳}$) = $\frac{۸ ا۲}{۳}$

مثالیں

(۱) چشمہ منحنی ر۲ = ا۲ جم ۲ طہ کا پورا رقبہ دریافت کرو [جواب = ا۲]

(۲) ثابت کرو کہ منحنی ر = ا جم ۲ طہ کا پورا رقبہ $\frac{\pi ا۲}{۲}$ ہے۔

(۳) ارشمیدس کی لولبی ر = ا طہ کے نیم قطر سمتی کی ایک پوری گردش میں (طہ = ۰ سے آغاز کرکے) کس قدر رقبہ تیار ہوتا ہے؟ دوسرے مکمل گردش میں کس قدر مزید رقبہ بنتا ہے؟ [جواب (۱) = $\frac{۴}{۳}$ π۳ ا۲ (۲) = ۸ π۳ ا۲]

(۴) ر۲ = ا۲ جب ۴ طہ سے گھیرا ہوا رقبہ دریافت کرو [جواب = ا۲]

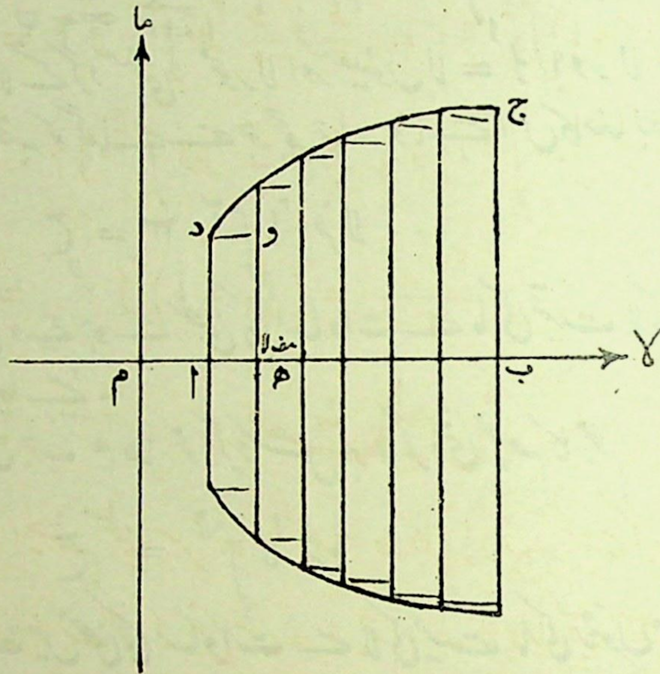
(۵) منحنی ر = ا (جب ۲ طہ + جم ۲ طہ) کا پورا رقبہ دریافت کرو۔ [جواب = π ا۲]

(۶) ثابت کرو کہ ہذلولی لولبی ر = $\frac{ا}{طہ}$ کا رقبہ جو اس کے کسی دو سمتی نیم قطروں سے محدود ہے متناسب ہے ان نیم قطر سمتیوں کے طولوں کے تفاوت کے۔

(۷) بتاؤ کہ خطِ ناقص ر۲ = $\frac{ا۲ ب۲}{ا۲ جب۲ طہ + ب۲ جم۲ طہ}$ کا رقبہ π اب ہے۔

۵۔ گردشی مجسموں کے حجم ۔ فرض کرو کہ شکل ۷ میں

محور لا کے گرد مستوی سطح ا ب ج د کے گھومنے سے جو مجسم شکل پیدا ہوتی ہے اس کا جحم ح ہے اور مستوی منحنی د ج کی مساوات ما = ف (لا) ہے



شکل ۸۷

اولاً ۔ مستوی رقبہ ا ب ج د میں شکل ۸۷ کی طرح مستطیل شکلیں ا ھ و د وغیرہ تیار کرو ۔ جب یہ رقبہ محور لا کے گرد گھمایا جاتا ہے تو ہر ایک مستطیل ایک گردشی اسطوانہ بناتا ہے ۔ مطلوبہ جحم صریحاً ان اسطوانوں کے جحموں کے حاصل مجموعہ کی انتہا کے مساوی ہے ۔

ثانیاً ۔ مصرحۂ بالا مستطیلوں کے قاعدوں کو مف لا۱، مف لا۲ وغیرہ قرار دو اور ان کے متناظر ارتفاعوں کو ما۱، ما۲ وغیرہ ۔ تب مستطیل ا ھ و د سے تیار شدہ اسطوانہ کا جحم π ما۱^2 مف لا۱ ہوگا ۔ اور ایسے تمام اسطوانوں کے جحموں کا مجموعہ

$$= \pi\,\text{ما}_1^2\,\text{مف لا}_1 + \pi\,\text{ما}_2^2\,\text{مف لا}_2 + \dots + \pi\,\text{ما}_{\text{ن}}^2\,\text{مف لا}_{\text{ن}} = \sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} \pi\,\text{ما}_{\text{و}}^2\,\text{مف لا}_{\text{و}}$$

ثالثاً - اساسی مسئلہ کی رُو سے (حدود م ا = و اور م ب = ب استعمال کیے)

$$\text{نہا}_{ن \to \infty} \sum_{ر=۱}^{ن} \pi\, \text{ما}^۲\, \text{مف لا} = \int_{و}^{ب} \pi\, \text{ما}^۲\, \text{فرلا}$$

پس محور لا کے گرد منحنی، محور لا اور معینوں لا = و اور لا = ب سے محدود رقبہ کو گھمانے سے جو حجم تیار ہوتا ہے اس کا ضابطہ یہ ہے :-

$$\text{ح}_{\text{لا}} = \pi \int_{و}^{ب} \text{ما}^۲\, \text{فرلا} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (ہ)$$

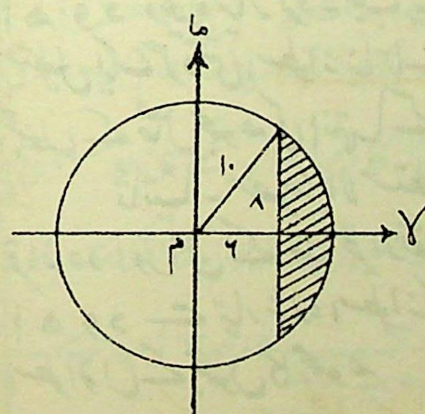
جس میں دیے ہوئے منحنی کی مساوات سے ما کی قیمت لا کی رقموں میں تعویض کی جانی چاہیئے۔

اسی طرح جب م ما محور گردش ہو تو گردشی مجسم کا حجم

$$\text{ح}_{\text{ما}} = \int^{ج} \text{لا}^۲\, \text{فرما} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (و)$$

اس ضابطہ میں منحنی کی مساوات سے لا کی قیمت ما کی رقموں میں تعویض کی جانی چاہیے۔

توضیحی مثال (۱) دس انچ نصف قطر والے ٹھوس کُرہ سے ایک کروی قطاع تراشا جاتا ہے جس کی مستوی سطح ۸ انچ نصف قطر کا دائرہ ہے۔ کروی قطاع کا حجم دریافت کرو۔



شکل ۷۱

حل - شکل ۷۱ سے ظاہر ہے کہ کروی قطاع کے مستوی دائرہ کا مرکز مبداء سے ۶ انچ فاصلہ پر واقع ہے اس لیے کہ $۱۰^۲ = ۸^۲ + ۶^۲$

پس مطلوبہ حجم $= \pi \int_{۶}^{۱۰} \text{ما}^۲\, \text{فرلا}$

اور $\text{لا}^۲ + \text{ما}^۲ = ۱۰۰$

$\therefore \text{ما}^۲ = ۱۰۰ - \text{لا}^۲$

∴ ح = π $\int_{۲}^{۱۰}$ (۱۰۰ − لا^۲) فرلا

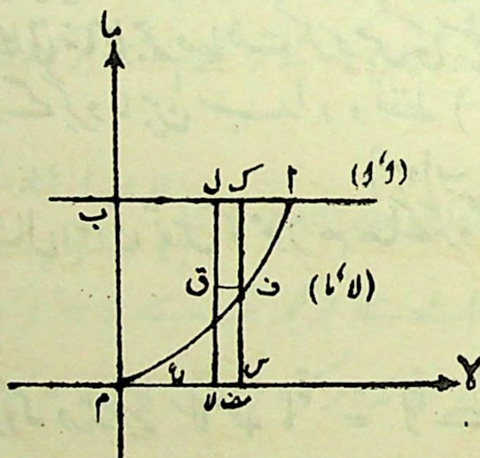
= ۱۰۰π [لا]$_{۲}^{۱۰}$ + π [لا^۳/۳]$_{۲}^{۱۰}$ = ۸۰۰π − π/۳ (۱۰^۳ − ۲^۳)

= ۱۴۱۶π/۳ مکعب انچ جواب

توضیحی مثال (۲) نیم کعبی مکافی لا ما^۲ = لا^۳، محور ما اور خط اب (ما = ۱)

(شکل ۶۲ب) سے محدود رقبہ خط اب کے گرد گھمایا جاتا ہے۔ گردشی مجسم کا حجم معلوم کرو۔

حل۔ شکل میں گردشی رقبہ م ف اب بتایا گیا ہے۔ اگر خط اب کو ن مساوی حصّوں میں (ہر ایک = مف لا) تقسیم کیا جائے تو ک ل



شکل ۶۲ب

ان میں سے ایک حصّہ ہوگا۔ مستطیل ل ک ف ق کو جب اب کے گرد گھمایا جاتا ہے تو ایک گردشی اسطوانہ بنتا ہے جس کا حجم مطلوبہ حجم کا

ایک جزو ہے۔ پس

جزو یا عنصر حجم = π (ف ک)^۲ مف لا

(ف ک) = ا - ما ∴ اساسی مسئلہ کی رو سے

مجسم حجم = ح = π ∫^ا (ا - ما)^۲ فرلا = π ∫^ا (ا^۲ - ۲ ا ما + ما^۲) فرلا

کعبی مکافی کی مساوات سے ما = لا^۲/ا یہ قیمت تکمل میں تعویض کرنے سے ح کی قیمت ۸/۱۵ π ا^۳ برآمد ہوتی ہے۔

مثالیں

(۱) قطع ناقص لا^۲/ا^۲ + ما^۲/ب^۲ = ۱ کو محور لا کے گرد گھمانے سے جو حجم بنتا ہے اس کی قیمت دریافت کرو۔ [جواب = ۴/۳ π ا ب^۲]

(۲) گردشی مکافی نما کا حجم دریافت کرو جس کی سطح ما^۲ = ۲ ف لا کی قوس کو اس کے محور کے گرد مابین مبدا، و نقطہ (لا، ما) گھمانے سے پیدا ہوتی ہے۔ [جواب = π/۲ ما^۲ لا]

(۳) اگر مثال (۲) کی قوس کو محور م ما کے گرد گھمایا جائے تو بتاؤ کہ

حجم = π/۵ لا^۲ ما

(۴) ثابت کرو کہ در تدویر لا^{۲/۳} + ما^{۲/۳} = ا^{۲/۳} سے محدود رقبہ کو محور م لا کے گرد گھمانے سے حجم ۳۲ π ا^۳/۱۰۵ بنتا ہے۔

(۵) ص نصف قطر کے ٹھوس کرہ سے ایک قاعدہ والا ٹ موٹائی کا قطاع تراشا جاتا ہے۔ عمل تکمل سے ثابت کرو کہ اس کا حجم π ٹ^۲ (۳ ص - ٹ)/۳

(۶) زنجیرہ (catenary) ما = ر/۲ (ہو^{لا/ر} + ہو^{-لا/ر}) کو محور لا کے گرد

(مابین حدود لا = ۰ اور لا = ب) گھمانے سے جو جسم بنتا ہے اس کی تعیین کرو۔ [جواب = $\frac{\pi ا^3}{8}$ ($\frac{ب^2}{و^2}$ - $\frac{و^{-2ب}}{و^2}$) + $\frac{\pi ا^2 ب}{2}$

(۷) بتاؤ کہ لبلابی خط (cissoid) ما^2 = $\frac{لا^3}{۲ا - لا}$ کو اس کے متقارب لا = ۲ ا کے گرد گھمانے سے جو جسم حاصل ہوتا ہے ۲π^2ا^3 ہے۔

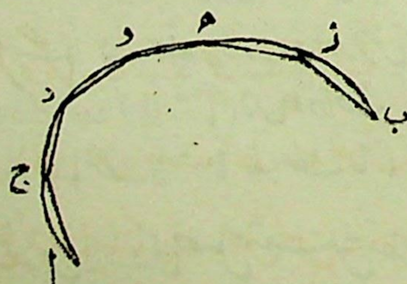
نوٹ:۔ شکل ۸۱ کے منحنی ج د کی مساوات اگر مبدّلی صورت لا = ف (و) اور ما = فہ (و) میں دی جائے تو

ضابطہ (ھ) یعنے جسم ح = π $\int$ ما^2 فرلا میں ما = فہ (و) اور فرلا = فَ (و) فرو تعویض کرو اور حدود تکمل کو و$_1$ اور و$_2$ میں تبدیل کرو اگر و = و$_1$ جبکہ لا = ا اور و = و$_2$ جبکہ لا = ب

مثال (۱) درتدویر (hypocycloid) کی مبدّلی مساوات { لا = ا جم^3 طہ ، ما = ا جب^3 طہ } استعمال کر کے منحنی مذکور کو محور م لا کے گرد گھمانے سے جو مجسم حاصل ہوتا ہے اس کا جسم دریافت کرو۔

مثال (۲) ثابت کرو کہ خطِ تدویر (cycloid) { لا = ا (طہ - جب طہ) ، ما = ا (۱ - جم طہ) } کو محور م لا کے گرد گھمانے سے جو جسم بنتا ہے ۵π^2ا^3 ہے۔

مثال (۳) اگر خطِ تدویر کو اس کے قاعدہ م لا کے گرد گھمایا جائے تو بتاؤ کہ جسم ۶π^3ا^3 ہے



شکل ۸۳

۹۔ منحنی کا طول۔

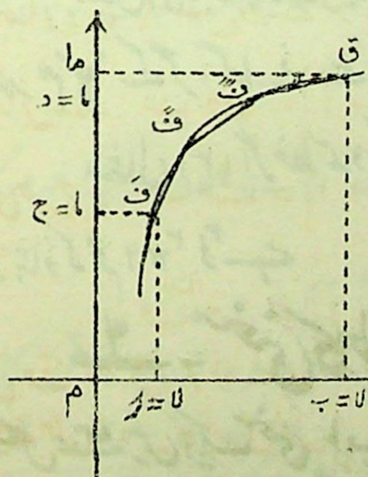
شکل ۸۳ میں ایک منحنی اب دیا گیا ہے۔ اس کا طول ناپنے کے لیے اس کو متعدد حصوں میں جیسے ج، د، ھ، ز پر

نشان لگاکر تقسیم کرو اور تقسیم کے متصل نقطوں کو خطوطِ مستقیم کھینچ کر ملاؤ۔ اس طرح وتر اج، ج د، د و، و ہ، ہ ز، ز ب تیار ہونگے۔ واضح ہے کہ نقاطِ تقسیم جتنے بھی زیادہ ہونگے ان کے متعلقہ وتروں کا حاصل مجموعہ منحنی کے طول کے قریب تر مساوی ہوگا۔ پس منحنی کے طول کی یوں تعریف کی جاتی ہے کہ وہ منحنی کے وتروں کے مجموعہ کی انتہا ہے جیسے جیسے اس کے نقاطِ تقسیم کی تعداد نامتناہی بڑی ہوتی جاتی ہے اور ساتھ ہی ساتھ ہر ایک وتر فرداً فرداً بطور انتہا صفر کو پہنچ جاتا ہے۔ چونکہ یہ انتہا کسی خطِ مستقیم کے طول کی بھی پیمائش ہوگی اس لیے منحنی کے طول کی تعیین کو اس کی تخطیط بھی کہتے ہیں۔

۱۶۷۔ منحنیوں کے طول' علی القوائم محددوں کی رقموں میں۔

فرض کرو کہ منحنی شکل ۱۶۷ کی مساوات ما = ف (لا) ہے اس کی قوس ف ق کا طول معلوم کرنے کے لیے [جس میں ف کے محدد (ا، ج) ہیں اور ق کے محدد (ب، د)]

اولاً۔ دی ہوئی قوس پر مابین ف اور ق کوئی بھی ن عدد نقطے لو اور متصل نقطوں کو ملانے والے وتر کھینچو۔



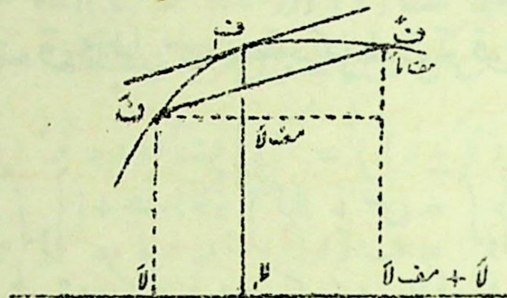
واضح ہے کہ قوس ف ق کا مطلوبہ طول مصرحۂ بالا وتروں کے حاصل جمع کی انتہا ہے۔

ثانیاً۔ ان میں سے کسی ایک وتر مثلاً فَ فً پر غور کرو۔ اور فرض کرو کہ فَ کے محدد (لاَ، ماَ) ہیں اور فً کے محدد (لاَ + δلاَ، ماَ + δماَ)

آٹھویں باب کی فصل متعلق تفرقہ قوس کے بموجب

شکل ۱۶۷

ف فَ = √(معف لاَ)^۲ + (معف اَ)^۲ یعنے ف فَ = [۱ + (معف اَ / معف لاَ)^۲]^{۱/۲} معف لاَ



شکل ۵۔۴

لیکن باب دہم کی فصل متعلق مسائل اوسط قیمت اگر معف اَ کو ف (ب) - ف (ا) سے تعبیر کیا جائے اور معف لاَ کو ب - ا سے تو

معف اَ / معف لاَ = فَ (لا۱) [لاَ > لا۱ > لاَ + معف لاَ]

جس میں لا۱ منحنی پر کے ایک نقطہ ف۱ کا (جو فَ اور فً کے مابین واقع ہے اور جہاں خطِ مماس وتر کے متوازی ہے) فصلہ ہے

لہٰذا اس سے ف فَ = [۱ + فَ (لا۱)^۲]^{۱/۲} معف لاَ = پہلے وتر کا طول

اسی طرح فَ فً = [۱ + فَ (لا۲)^۲]^{۱/۲} معف لاً = دوسرے وتر کا طول

. . . .

ف^{(ن)} ق = [۱ + فَ (لان)^۲]^{۱/۲} معف لا^{(ن)} = ن ویں وتر کا طول

پس ف اور ق کو ملانے والے قوس کے اندر کھینچے ہوئے شکستہ خطوط کا طول (یعنے جملہ وتروں کا مجموعی طول)

= [۱ + فَ (لا۱)^۲]^{۱/۲} معف لاَ + [۱ + فَ (لا۲)^۲]^{۱/۲} معف لاً + ۔۔۔۔ + [۱ + فَ (لان)^۲]^{۱/۲} معف لا^{(ن)}

= مجـ_{و=۱}^{ن} [۱ + فَ (لاو)^۲]^{۱/۲} معف لا^{(و)}

ثالثاً۔ اساسی مسئلہ کی رُو سے

$$\underset{\text{ن}\to\infty}{\text{نہا}}\ \sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}}\left[1+\text{فَ}(\text{لا}_{\text{و}})^2\right]^{\frac{1}{2}}\Delta\,\text{لا}^{(\text{و})} = \int_{\text{ا}}^{\text{ب}}\left[1+\text{فَ}(\text{لا})^2\right]^{\frac{1}{2}}\text{فرلا}$$

اس لیے اگر قوس فَ ق کا طول س سے تعبیر کیا جائے تو قوس کے طول کا ضابطہ ہے۔

$$\text{س} = \int_{\text{ا}}^{\text{ب}}\left[1+\text{فَ}(\text{لا})^2\right]^{\frac{1}{2}}\text{فرلا}\quad \text{یا}\quad \text{س} = \int_{\text{ا}}^{\text{ب}}\left\{1+\text{مَا}\right\}^{\frac{1}{2}}\text{فرلا}\ \ldots\ldots(\text{ز})$$

جس میں $\text{مَا} = \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ قوس کی مساوات کے ذریعہ لا کی رقموں میں معلوم کرلیا جانا چاہیے۔

بعض اوقات ما کو متبوع متغیر ماننے میں زیادہ سہولت پائی جاتی ہے ایسی صورت کے لیے چونکہ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{1}{\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}}}$، فرلا = لاَ فرما اور ان قیمتوں کو ضابطہ (ز) میں تعویض کرنے اور متناظر حدود تکمل ج اور د قرار دینے سے قوس کے طول کا ضابطہ

$$\text{س} = \int_{\text{ج}}^{\text{د}}\left[\text{لاَ}^2+1\right]^{\frac{1}{2}}\text{فرما}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(\text{ح})$$

جس میں $\text{لاَ} = \frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}}$ قوس کی مساوات کے ذریعہ ما کی رقموں میں معلوم کرلیا جانا چاہیے۔

ضابطہ (ز) ایک دوسرے طریقہ سے بھی اخذ کیا جاسکتا ہے۔ آٹھویں باب کی فصل (۷) میں ضابطہ (د)

$$\text{فرس} = \left\{1+(\text{مَا})^2\right\}^{\frac{1}{2}}\text{فرلا}\ \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

منحنی کی قوس کا تفرقہ معلوم کراتا ہے۔ اگر ہم بارھویں باب کی فصل متعلق بہ محدود تکملہ عمل کریں تو ضابطہ (ز) مصرحۂ بالا حاصل ہوتا ہے۔ اسی طرح آٹھویں باب کی فصل محولہ بالا کے ضابطہ (ھ) سے ہمارا ضابطہ (ح) مترتب

ہوتا ہے۔

اگر منحنی کی تعریف مبدّلی مساواتوں

$$\text{لا} = \text{ف}(\text{و}) \quad \text{اور} \quad \text{ما} = \text{فہ}(\text{و})$$

کے ذریعہ کی گئی ہو تو س کی تعیین کا سہل طریقہ یہ ہے کہ

$$\text{س} = \int (\text{فرلا}^2 + \text{فرما}^2)^{\frac{1}{2}} = \int_{\text{و}_1}^{\text{و}_2} \left[\text{فَ}^2(\text{و}) + \text{فَہ}^2(\text{و})\right]^{\frac{1}{2}} \text{فرو} \quad \ldots (۳)$$

اس لیے کہ (۲) سے $\text{فرلا} = \text{فَ}(\text{و})\,\text{فرو}$ اور $\text{فرما} = \text{فَہ}(\text{و})\,\text{فرو}$

توضیحی مثالیں۔

(۱) درتدویر (hypocycloid) $\left\{ \begin{array}{l} \text{لا} = \text{ا جم}^3 \text{طہ} \\ \text{ما} = \text{ا جب}^3 \text{طہ} \end{array} \right.$ کا طول دریافت کرو۔

حل۔ عمل تفرق سے $\text{فرلا} = -۳\ \text{ا جم}^2 \text{طہ جب طہ فرطہ}$،

$$\text{فرما} = ۳\ \text{ا جب}^2 \text{طہ جم طہ فرطہ}$$

جبکہ $\text{لا} = ۰$، $\text{طہ} = \frac{\pi}{2}$ اور جبکہ $\text{لا} = \text{ا}$، $\text{طہ} = ۰$

ضابطہ میں یہ قیمتیں تعویض کرنے سے، منحنی کا طول

$$\text{س} = ۴ \int_{0}^{\text{ا}} \sqrt{1 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2}\ \text{فرلا} = ۴ \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \text{قاطہ} \left(-۳\ \text{ا جم}^2 \text{طہ جب طہ فرطہ}\right)$$

$$= ۴ \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \left(-۳\ \text{ا جم طہ جب طہ}\right) \text{فرطہ} = ۴ \left[\frac{۳\ \text{ا جم}^2 \text{طہ}}{۲}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{0} = ۶\ \text{ا}$$

(۲) خطِ مکافی $\text{لا}^2 = ۴\ \text{ا ما}$ کی قوس کا طول راس سے لے کر وترِ خاص کے ایک سرے تک دریافت کرو۔

حل۔ چونکہ $\text{ما} = \frac{\text{لا}^2}{۴\text{ا}}$، $\text{مَا} = \frac{\text{لا}}{۲\text{ا}}$ اور تکمل کے حدود ہیں $\text{لا} = ۰$ اور $\text{لا} = ۲\text{ا}$

$$\text{پس س} = \int_{0}^{۲\text{ا}} \sqrt{1 + \frac{\text{لا}^2}{۴\text{ا}^2}}\ \text{فرلا} = \frac{1}{۲\text{ا}} \left[\frac{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^2 + ۴\text{ا}^2}}{۲} + \frac{۴\text{ا}^2}{۲} \text{لوک} \left(\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^2 + ۴\text{ا}^2}\right)\right]_{0}^{۲\text{ا}}$$

$$= \frac{1}{۴\text{ا}} \left[۲\text{ا} \sqrt{۸\text{ا}^2} + ۴\text{ا}^2\ \text{لوک} \left(1 + \sqrt{2}\right)\right]$$

= ل [۲/۱ + لوک (۱ + ۲/۱)]

۸ - مستوی منحنیوں کے طول کی پیمایش ' قطبی محدودوں کے ذریعے

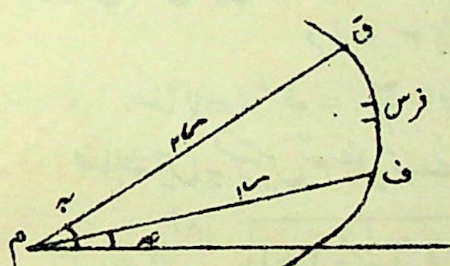
آٹھویں باب کی فصل (۸) کے ضابطہ (ط) پر محدود تکمل کا عمل کرنے سے قوس کے طول کے لیے ضابطہ

$$س = \int [ر^2 + (\frac{فر ر}{فر طہ})^2]^{\frac{1}{2}} فر طہ \quad \ldots\ldots\ldots \quad (ط)$$

حاصل ہوتا ہے - جس میں ر اور $\frac{فر ر}{فر طہ}$ کو طہ کی رقموں میں دیے ہوئے منحنی کی مساوات سے اخذ کرکے تعویض کرنا چاہیے -

جن صورتوں میں بجائے طہ کے ر کو بطور متبوع متغیر استعمال کرنا زیادہ آسان معلوم ہوتا ہے اور مساوات بشکل

طہ = فہ (ر) ہے تو



شکل ۷۶

فر طہ = فہ (ر) فر ر = $\frac{فر طہ}{فر ر}$ فر ر

اس کو $[ر^2 فر طہ^2 + فر ر^2]^{\frac{1}{2}}$ میں تعویض کرنے سے

$[ر^2 (\frac{فر طہ}{فر ر})^2 + ۱]^{\frac{1}{2}}$ فر ر حاصل ہوتا ہے

پس اگر $ر_1$ اور $ر_2$ متبوع متغیر ر کے متناظر حدود تکمل ہیں تو قوس کے طول کے لیے

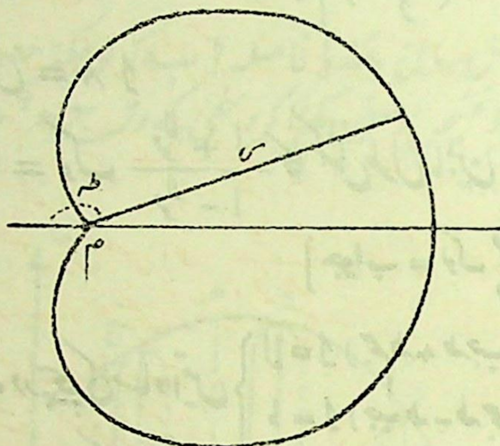
ضابطہ $س = \int_{ر_1}^{ر_2} [ر^2 (\frac{فر طہ}{فر ر})^2 + ۱]^{\frac{1}{2}} فر ر \quad \ldots \quad (ی)$ برآمد ہوتا ہے -

جس میں $\frac{فر طہ}{فر ر}$ کو دیے ہوئے منحنی کی مساوات سے ر کی رقموں میں

تعریف کرنا چاہیے۔

توضیحی مثال۔ خطِ صنوبری ر = ا (۱ - جم طہ) کا محیط دریافت کرو۔

حل۔ منحنی کی ترسیم شکل ۷۷ میں بتائی گئی ہے وہ ابتدائی خط کے متشاکل ہے۔



شکل ۷۷

اور طہ کی قیمت اوپر والی نصف ترسیم کے لیے صفر سے لے کر π تک بدلتی ہے۔

$$\frac{\text{فر ر}}{\text{فر طہ}} = \text{ا جب طہ}$$

پس قوس س = ۲ $\int_0^{\pi} \sqrt{\text{ا}^2 (1 - \text{جم طہ})^2 + \text{ا}^2 \text{جب}^2 \text{طہ}}$ فر طہ

= ۲ ا $\int_0^{\pi}$ ۲ جب $\frac{\text{طہ}}{2}$ فر طہ = $\left[-\text{۸ ا جم} \frac{\text{طہ}}{2} \right]_0^{\pi}$ = ۸ ا

مثالیں

بتاؤ کہ :—

(۱) نیم کعبی مکافی ا م^2 = لا^3 کا طول مبداء سے لے کر سعین لا = ۵ ا تک $\frac{۱۳۳۵}{۲۷}$ ا ہے۔

(۲) در تدویر (hypocycloid) $\text{لا}^{\frac{2}{3}} + \text{م}^{\frac{2}{3}} = \text{ا}^{\frac{2}{3}}$ کا مکمل طول ۶ ا ہے۔

(۳) زنجیرہ $\text{ما} = \frac{\text{ا}}{۲}\left(\text{و}^{\frac{\text{لا}}{\text{ا}}} + \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{\text{ا}}}\right)$ کا طول لا = ۰ سے نقطہ (لا، ما) تک

$\frac{\text{ا}}{۲}\left(\text{و}^{\frac{\text{لا}}{\text{ا}}} - \text{و}^{-\frac{\text{لا}}{\text{ا}}}\right)$ ہے

(۴) خط تدویر (cycloid) $\text{لا} = \text{جم}^{-۱}\left(\frac{\text{ا} - \text{ما}}{\text{ا}}\right) - \sqrt{۲\,\text{ا}\,\text{ما} - \text{ما}^۲}$ کی

ایک مکمل کمان کا طول = ۸ ا

(۵) منحنی $\text{ما} = \text{لوک}\,\frac{\text{و}^{\text{لا}} + ۱}{\text{و}^{\text{لا}} - ۱}$ کا مکمل طول مابین لا = ا اور لا = ب

دریافت کرو۔

[جواب = $\text{لوک}\,\frac{\text{و}^{۲\text{ب}} - ۱}{\text{و}^{۲\text{ا}} - ۱} + \text{ا} - \text{ب}$]

(۶) دائرہ کے درپیچہ کی مساواتیں $\left\{\begin{array}{l}\text{لا} = \text{ا}\,(\text{جم طہ} + \text{طہ جب طہ})\\ \text{ما} = \text{ا}\,(\text{جب طہ} - \text{طہ جم طہ})\end{array}\right.$ ہیں- اس کی

قوس کا طول طہ = ۰ سے طہ = $\text{طہ}_۱$ تک معلوم کرو [جواب = $\frac{۱}{۲}\,\text{ا}\,\text{طہ}_۱^۲$]

ثابت کرو کہ :-

(۷) ارشمیدس کی لولبی سر = ا طہ کا طول مبداء سے لے کر پہلی گردش کے

ختم تک $\text{ا}\left[\pi\sqrt{۱ + ۴\pi^۲} + \frac{۱}{۲}\,\text{لوک}\left(۲\pi + \sqrt{۱ + ۴\pi^۲}\right)\right]$ ہے

(۸) لولبی $\text{سر} = \text{و}^{\text{ا طہ}}$ کا طول مبداء سے نقطہ (سر، طہ) تک $\frac{\text{سر}}{\text{ا}}\sqrt{\text{ا}^۲ + ۱}$ ہے-

[اشارہ- ضابطہ (ی) استعمال کیا جائے-]

(۹) خط مکافی $\text{سر} = \frac{۲}{۱ + \text{جم طہ}}$ کی قوس کا طول طہ = ۰ سے طہ = $\frac{\pi}{۲}$ تک

$\sqrt{۲} + \text{لوک}\left(\sqrt{۲} + ۱\right)$ ہے-

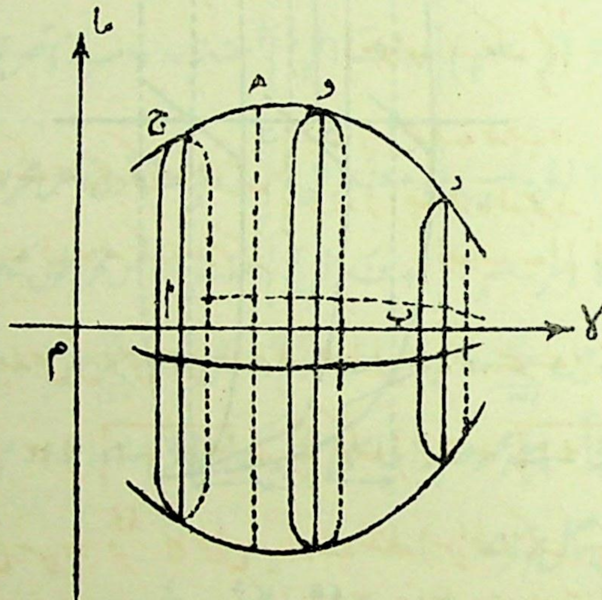
(۱۰) لبلابی خط (cissoid) سر = ۲ ا مس طہ جب طہ کا طول طہ = $\text{طہ}_۱$ سے

طہ = $\text{طہ}_۲$ تک

$۲\,\text{ا}\left[\frac{\sqrt{۱ + ۳\,\text{جم}^۲\,\text{طہ}}}{\text{جم طہ}} - \frac{\sqrt{۳}}{۲}\,\text{لوک}\,\frac{\sqrt{۱ + ۳\,\text{جم}^۲\,\text{طہ}} + \sqrt{۳}\,\text{جم طہ}}{\sqrt{۱ + ۳\,\text{جم}^۲\,\text{طہ}} - \sqrt{۳}\,\text{جم طہ}}\right]_{\text{طہ}_۱}^{\text{طہ}_۲}$ ہے

۹٫۷ - گردشی سطحوں کے رقبے ۔ گردشی سطح محور لا کے گرد کسی منحنی ما = ف (لا) کی قوس ج د کے گھومنے سے پیدا ہوتی ہے ۔ اب ہم اساسی مسئلہ کی مدد سے ایسی سطح کے رقبہ کی پیمائش کا طریقہ بیان کرنا چاہتے ہیں ۔

اولاً ۔ مثل سابق وقفہ یا فاصلہ ا ب کو کو چکتر حصوں مف لا، مف لا، وغیرہ میں تقسیم کرو اور نقاطِ تقسیم پر معین کھڑا کرو ۔ منحنی کے وتر ج ھ، ھ و، وغیرہ کھینچو ۔



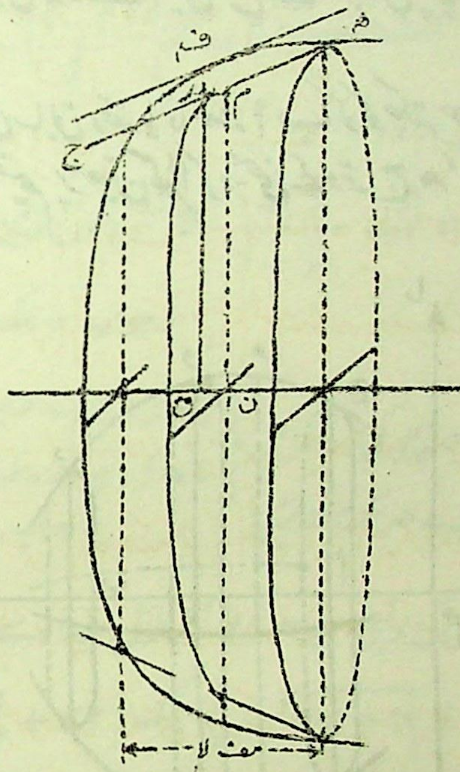
شکل ۷٫۸

جب منحنی ج ھ و د کو گھمایا جاتا ہے تو ہر ایک وتر ایک ناقصی یا نامکمل (مقطوع) گردشی مخروط کی جانبی سطح پیدا کرتا ہے ۔ منحنی کی گردشی سطح کے رقبہ کی تعریف اس طرح کی جاتی ہے کہ وہ ان ناقصی گردشی مخروطوں کے جانبی رقبوں کی انتہا ہے ۔

ثانیاً ۔ وضاحت کی خاطر ہم نے شکل ۹٫۷ میں پہلے ناقص گردشی مخروط کو زیادہ بڑے پیمانہ پر بنایا ہے ۔ اس شکل میں وتر ج ھ کا وسطی نقطہ م ہے ۔

تب چونکہ ناقصی گردشی مخروط کا جانبی رقبہ = وسطی تراش × ترچھی بلندی

جانبی رقبہ = ۲ ﷲ (ن م) (ج ھ) .... (۱)



شکل ۹۶

اساسی مسئلہ کے اطلاق کے لیے اس حاصل ضرب کو وقفہ مف لا میں کسی نقطہ کے مقطوعہ یا فصلہ کا تفاعل ظاہر کرنا چاہیے۔ ۔۔ کی طرح اوسط قیمت کا مسئلہ استعمال کرتے ہے

وتر ج ھ کا طول = $\{ ۱ + فَ (لا_۱)^۲ \}^{\frac{۱}{۲}}$ مف لا ...... (۲)

جس میں لا₁ قوس ج ھ پر کے نقطہ ف₁ (لا₁، ما₁) کا مقطوعہ ہے، جہاں خطِ مماس وتر ج ھ کا متوازی ہے ۔ ھ میں سے جو افقی خط کھینچا گیا ہے

اس کو ف$_1$ پ$_1$ کے معیّن ق ف$_1$ کو نقطہ ر پر متقاطع ہونے دو۔ اور ر ف$_1$ کو صہ$_1$ سے تعبیر کرو۔

[طالب علم کو معلوم ہوگا کہ جیسے جیسے مف لا$_1$ صفر کو بطور انتہا پہنچتا ہے صہ$_1$ بھی بطور انتہا صفر کو پہنچتا ہے]

تب ن م = ما$_1$ − صہ$_1$ . . . . (۴)

(۲) اور (۴) کو (۱) میں تعویض کرنے سے

۲π (ما$_1$ − صہ$_1$) $\{$۱ + فَ (لا$_1$)$^2\}^{\frac{1}{2}}$ مف لا$_1$ = پہلے ناقص مخروط کا جانبی رقبہ ہے۔

اسی طرح ۲π (ما$_2$ − صہ$_2$) $\{$۱ + فَ (لا$_2$)$^2\}^{\frac{1}{2}}$ مف لا$_2$ = دوسرے ناقص مخروط کا جانبی رقبہ ہے۔

. . . .

اور ۲π (ما$_ن$ − صہ$_ن$) $\{$۱ + فَ (لا$_ن$)$^2\}^{\frac{1}{2}}$ مف لا$_ن$ = آخری ناقص مخروط کا جانبی رقبہ ہے۔

پس $\sum_{و=1}^{ن}$ ۲π (ما$_و$ − صہ$_و$) $\{$۱ + فَ (لا$_و$)$^2\}^{\frac{1}{2}}$ مف لا$_و$ = ناقص مخروطوں کے جانبی رقبوں کا حاصل جمع ہے۔

اس کو ہم لکھ سکتے ہیں $\sum_{و=1}^{ن}$ ۲π ما$_و$ $\{$۱ + فَ (لا$_و$)$^2\}^{\frac{1}{2}}$ مف لا$_و$ − ۲π $\sum_{و=1}^{ن}$ صہ$_و$ $\{$۱ + فَ (لا$_و$)$^2\}^{\frac{1}{2}}$ مف لا$_و$ ...(۳)

ثالثاً۔ پہلے مجموعہ پر اساسی مسئلہ کے اطلاق سے (حدود م ا = ا اور م ب = ب) استعمال کرکے ہمیں حاصل ہوتا ہے

نہا$_{ن \to \infty}$ $\sum_{و=1}^{ن}$ ۲π ما$_و$ $\{$۱ + فَ (لا$_و$)$^2\}^{\frac{1}{2}}$ مف لا$_و$ = $\int_{ا}^{ب}$ ۲π ا $\{$۱ + فَ (لا)$^2\}^{\frac{1}{2}}$ فرلا

(۴) کے دوسرے مجموعہ کی انتہا جبکہ ن ← ∞ صفر ہے* پس قوس ج د کو م لا کے گرد گھمانے سے جو گردشی سطح کا رقبہ (س لا) پیدا ہوتا ہے

* اس لیے کہ اگر اس دوسرے مجموعہ کو ج$_ن$ سے تعبیر کیا جائے اور مثبت اعداد صہ$_1$، صہ$_2$ . . . صہ$_ن$ میں صہ کو سب سے بڑے عدد کے مساوی فرض کیا جائے تو ج$_ن$ ≦ صہ $\sum_{و=1}^{ن}$ $\{$۱ + فَ (لا$_و$)$^2\}^{\frac{1}{2}}$ مف لا$_و$ بائیں جانب کا حاصل جمع ٹ کی رُو سے ج ھ، ھ و، وغیرہ وتروں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔ فرض کرو کہ یہ مجموعہ ل$_ن$ ہے تب ج$_ن$ ≦ صہ ل$_ن$۔ چونکہ نہا$_{ن \to \infty}$ = ۰۔ ج$_ن$ ایک صغاریہ ہے اور اس لیے نہا$_{ن \to \infty}$ ج$_ن$ = ۰۔

اس کا ضابطہ حسب ذیل ہے :—

$$\text{س}_{\text{ا}} = 2\pi \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{ما} \left\{ 1 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \text{فرلا} \quad \ldots\ldots (\text{ک})$$

جس میں ما اور $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ گھومے ہوئے منحنی کی مساوات سے لا کی رقموں میں تعویض کیے جانے چاہئیں۔

یا ہم اس ضابطہ کو بصورت $\text{س} = 2\pi \int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{ما}\ \text{فرس} \quad \ldots\ldots (\text{ل})$

لکھ سکتے ہیں، جس میں $\text{فرس} = \left(\text{فرلا}^2 + \text{فرما}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left\{ 1 + \left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \text{فرلا}$

ازروئے ضابطہ (د) — باب (۸)۔

اسی طرح اگر گردشی محور م ہا ہو تو ضابطۂ ذیل استعمال کرنا ہوگا :

$$\text{س}_{\text{ما}} = 2\pi \int_{\text{ج}}^{\text{د}} \text{لا} \left\{ 1 + \left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \text{فرما}$$

جس میں منحنی کی مساوات سے لا اور $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}}$ کی قیمتیں ما کی رقموں میں درج کرنی ہونگی۔

توضیحی مثالیں (۱) خطِ ناقص ($\text{لا} = \text{ا}\ \text{جم فہ}$ ، $\text{ما} = \text{ب}\ \text{جب فہ}$) کے محور لا کے گرد گھومنے سے جو گردشی ناقص نما مجسم پیدا ہوتا ہے اس کی سطح کا رقبہ دریافت کرو۔

حل — $\text{فرلا} = -\text{ا}\ \text{جب فہ}\ \text{فرفہ}$ ، $\text{فرما} = \text{ب}\ \text{جم فہ}\ \text{فرفہ}$

اور $\text{فرس} = \left(\text{فرلا}^2 + \text{فرما}^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\text{ا}^2 \text{جب}^2 \text{فہ} + \text{ب}^2 \text{جم}^2 \text{فہ} \right)^{\frac{1}{2}} \text{فرفہ}$

پس جزو رقبہ $= 2\pi\ \text{ما}\ \text{فرس} = 2\pi\ \text{ب} \left(\text{ا}^2 \text{جب}^2 \text{فہ} + \text{ب}^2 \text{جم}^2 \text{فہ} \right)^{\frac{1}{2}} \text{جب فہ}\ \text{جم فہ}\ \text{فرفہ}$

$$\frac{1}{2} \text{س}_{\text{لا}} = 2\pi\ \text{ب} \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(\text{ا}^2 \text{جب}^2 \text{فہ} + \text{ب}^2 \text{جم}^2 \text{فہ} \right)^{\frac{1}{2}} \text{جب فہ}\ \text{فرفہ}$$

اس کو تکمل کرنے کے لیے فرض کرو $\text{د} = \text{جم فہ}$ تب $\text{فرد} = -\text{جب فہ}\ \text{فرفہ}$ متعددا

ا^{۲} جب^{۲} فہ + ب^{۲} جم^{۲} فہ = ا^{۲} (۱ - جم^{۲} فہ) + ب^{۲} جم^{۲} فہ = ا^{۲} - (ا^{۲} - ب^{۲}) ی^{۲}

پس نئے حدود استعمال کرکے اور ی کے حدود میں باہمی تبادلہ کرنے سے

$\frac{1}{2}$ س$_{ل}$ = ۲π ب $\int_{0}^{1}$ { ا^{۲} - (ا^{۲} - ب^{۲}) ی^{۲} }$^{\frac{1}{2}}$ فری (ا > ب)

= ۲π ب ا $\int_{0}^{1}$ (۱ - $\frac{ا^{۲} - ب^{۲}}{ا^{۲}}$ ی^{۲})$^{\frac{1}{2}}$ فری = ۲π اب $\int_{0}^{1}$ (۱ - خہ^{۲} ی^{۲})$^{\frac{1}{2}}$ فری

جس میں خہ = خروج المرکز = $\frac{\sqrt{ا^{۲} - ب^{۲}}}{ا}$

اس تکمل کو معیاری صورت (۱۹) باب (۱۱) کے طریقہ پر حل کرنے سے

س$_{ل}$ کی قیمت = ۲π ب^{۲} + $\frac{۲π اب}{خہ}$ جب$^{-1}$ خہ

مثال (۲) منحنی ر = ا (۱ + جم طہ) ابتدائی خط کے گرد گھومنے سے جو گردشی سطح پیدا ہوتی ہے اس کا رقبہ معلوم کرو۔

حل۔ س = ۲π $\int$ ا فرس = ۲π $\int_{0}^{π}$ ر جب طہ $\frac{فرس}{فرطہ}$ فرطہ

= ۲π $\int_{0}^{π}$ ا(۱ + جم طہ) جب طہ $\sqrt{ا^{۲}(۱ + جم طہ)^{۲} + ا^{۲} جب^{۲} طہ}$ فرطہ

= ۲π ا^{۲} $\int_{0}^{π}$ (۱ + جم طہ) جب طہ (۲ جم $\frac{طہ}{۲}$) فرطہ = ۱۶π ا^{۲} $\int_{0}^{π}$ جم^{۴} $\frac{طہ}{۲}$ جب $\frac{طہ}{۲}$ فرطہ

= ۳۲π ا^{۲} $\left[- \frac{جم^{۵} \frac{طہ}{۲}}{۵} \right]_{0}^{π}$ = $\frac{۳۲}{۵}$ π ا^{۲}

مثالیں

(۱) درندویر (hypocycloid) لا$^{\frac{۲}{۳}}$ + ما$^{\frac{۲}{۳}}$ = ا$^{\frac{۲}{۳}}$ محور لا کے گرد گھومنے سے جو گردشی سطح پیدا ہوتی ہے اس کا رقبہ دریافت کرو۔ [جواب = $\frac{۱۲π}{۵}$ ا^{۲}]

(۲) کعبی مکافی ا^{۲} ما = لا^{۳} کی قوس محور م لا کے گرد ما بین لا = ۰ اور لا = ا

گھمائی جاتی ہے۔ اس سے جو گردشی سطح پیدا ہوتی ہے بتاؤ کہ اس کا رقبہ

$$\frac{\pi}{27}\left(10\sqrt{10}-1\right) ر^{2}$$ ہے۔

(۳) مکافی $ما^{2} = ۴ ف لا$ کی قوس کے محور م لا کے گرد گھومنے سے جو سطح بنتی ہے اس کا رقبہ مابین حدود لا = ۰ اور لا = ۳ ف دریافت کرو۔

[جواب = $\frac{۵۶\pi ف^{2}}{۳}$]

(۴) خطِ ناقص $\frac{لا^{2}}{ر^{2}} + \frac{ما^{2}}{ب^{2}} = ۱$ کے محور م ما کے گرد گھومنے سے جو گردشی سطح بنتی ہے اس کا رقبہ معلوم کرو۔ خروج المرکز = خہ = $\frac{\sqrt{ر^{2} - ب^{2}}}{ر}$

[جواب = $۲\pi ر^{2} + \frac{\pi ب^{2}}{خہ}$ لوک $\frac{۱ + خہ}{۱ - خہ}$]

(۵) ثابت کرو کہ زنجیرہ $ما = \frac{ر}{۲}\left(قو^{\frac{لا}{ر}} + قو^{-\frac{لا}{ر}}\right)$ محور م لا کے گرد گھومنے سے پیدا ہونے والی سطح کا رقبہ لا = ۰ سے لا = ر تک $\frac{\pi ر^{2}}{۴}\left(قو^{2} + ۴ - قو^{-2}\right)$ ہے۔ اور اگر یہ منحنی محور م ما کے گرد گھومے تو انہی حدود کے اندر رقبہ $۲\pi ر^{2}(۱ - قو^{-1})$ ہے۔

۵۸ - معلوم متوازی عمودی تراشوں والے اجسام کے حجم

قبل ازیں مش۔ میں ہم نے گردشی جسم کے حجم کی تعیین سے متعلق بحث کی ہے۔ اور بتایا ہے کہ محور لا کے گرد دیے ہوئے منحنی سے محدود رقبۂ محور لا، محدد لا = ر اور لا = ب کی گردش سے جو حجم پیدا ہوتا ہے اس کا ضابطہ

$$ح_{لا} = \pi \int_{ر}^{ب} ما^{2}\, فرلا$$ ہے جس میں ما کی قیمت لا کی رقموں میں دیے ہوئے منحنی کی مساوات سے درج کی جانی چاہیے۔

اب ہم ایسے مجسمات کے حجموں کی تعیین سے بحث کرنا چاہتے ہیں جو گردشی نہیں ہیں لیکن جن کی مستوی تراش کسی ثابت خط مثلاً محور لا سے علی القوائم کسی ثابت نقطہ مثلاً م سے اس کے فاصلہ لا کا تفاعل

لکھی جا سکتی ہے۔

ذرا سا غور کرنے سے معلوم ہوگا کہ یہ حجم

ح = ر فـ (لا) فرلا ہے .... (ن)

ذیل کی توضیحی مثالوں سے یہ بات باسانی ذہن نشین ہو جائیگی۔

توضیحی مثال (۱) ر محور والے ایک دائرہ کے قطر پر سے ایک

مربع کا مرکز حرکت کرتا ہے۔ مربع کا مستوی اس قطر کے علی القوائم رہتا ہے اور اس کی مقدار اس طرح بدلتی ہے کہ اس کے یعنے مربع کے متقابل کے راس دیے ہوئے دائرہ کے محیط پر حرکت کرتے ہیں تو بتاؤ کہ اس حرکت سے پیدا ہونے والے مجسم کا حجم = $\frac{8}{3}$ ر^3

حل۔ شکل ۸۰ کی ترسیم ملاحظہ ہو۔ ف ک ق ل مربع کی ایک وضع ہے۔ سرے ک ل دائرہ کے محیط پر حرکت کرتے ہیں۔ مربع کا مرکز قطر ا م پر جہاں کہیں ہوگا مربع کے ہندسی خواص سے ظاہر ہے کہ ن ک = ن ل = ن ف = ن ق سب ما کے مساوی ہونگے۔ اس لیے کہ اس کے متقاطع قطر مساوی ہوتے ہیں۔

دائرہ کی مساوات چونکہ لا^2 + ما^2 = ر^2 ہے جبکہ مبداء مرکز سے منطبق ہوتا ہے، شکل ۸۰ میں م کو مبداء قرار دینے پر مساوات

ما^2 = ۲ لا ر - لا^2 ہو گی۔

مربع کا رقبہ = ۲ ما^2

یعنے = ۲ (۲ لا ر - لا^2)

اور فرلا موٹائی کے ایک مجسم جزو کا

شکل ۸۰

حجم = ۲ (۲ لا ر ـ لا^۲) فر لا

∴ مکمل جسم کا حجم = ۲ ∫^۲ر (۲ لا ر ـ لا^۲) فر لا

۲ [۲ر لا^۲/۲]^۲ر ـ ۲ [لا^۳/۳]^۲ر = ۸ ر^۳/۳

توضیحی مثال (۲) ایک قائم ہرم جس کا قاعدہ مستطیل ہے حسب ذیل ابعاد رکھتا ہے۔ طول = ط عرض = ع اور ارتفاع = ا اس کا حجم دریافت کیا جائے۔

حل ۔ ارتفاع م ن کے علی القوائم اور اس لیے قاعدہ ف س ق ص کے متوازی ایک تراش فَ سَ قَ صَ کھینچو۔

اگر فَ قَ = لا اور سَ صَ = ما تو تراش کا رقبہ = لا ما اور اگر تراش کا عمودی فاصلہ م سے ی مانا جائے تو ہرم کا حجم

ح = ∫^ا. لا ما فر ی [دیکھو شکل ۸۱]

شکل ۸۱

ہرم کے ہندسہ سے واضح ہے کہ مثلث م ف ق اور مثلث م فَ قَ

متشابہ ہیں، پس $\frac{\text{لا}}{\text{ی}} = \frac{\text{ط}}{\text{و}}$، اسی طرح مثلث م س ص اور مثلث م سَ صَ متشابہ ہیں، اس لیے $\frac{\text{ما}}{\text{ی}} = \frac{\text{ع}}{\text{و}}$

$$\therefore\ \text{لا ما} = \frac{\text{ط ع ی}^2}{\text{و}^2} \quad \text{اور} \quad \text{ح} = \int_0^{\text{و}} \text{لا ما فری} = \int_0^{\text{و}} \frac{\text{ط ع}}{\text{و}^2}\,\text{ی}^2\ \text{فری}$$

$$\text{پس ح} = \frac{\text{ط ع}}{\text{و}^2}\left[\frac{\text{ی}^3}{3}\right]_0^{\text{و}} = \frac{\text{ط ع و}^3}{3\,\text{و}^2} = \frac{\text{ط ع و}}{3}$$

مثالیں

(۱) نصف قطر و والے کرہ کا حجم دریافت کرو۔

(۲) ایک ہی تکمل کے ذریعہ گردشی ناقص نما $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{ی}^2}{\text{ج}^2} = 1$ کا حجم دریافت کرو۔ [جواب $= \frac{4\pi}{3}\,\text{ا ب ج}$]

(۳) دو اسطوانوں کے نصف قطر مساوی ہیں اور ان کے محور باہم دیگر علی القوائم واقع ہیں اگر نصف قطر ر ہے تو بتاؤ کہ مشترک جسم کا حجم $\frac{16}{3}\,\text{ر}^3$ ہے۔

(۴) خط زائد $4\,\text{لا}^2 - 9\,\text{ما}^2 = 1$، محور ما اور خطوط ما $= \pm 4$ سے پہلے اور چوتھے ربعوں (quadrants) میں محصور رقبہ کو محور ما کے گرد گھما کر ایک مجسم تیار کیا جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا حجم $= 98\pi$

(۵) خط ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{و}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کے دُہرے معینوں پر ۹۰° راسی زاویوں کے متساوی الساقین مثلث، ناقص کے مستوی کے علی القوائم مستویوں میں کھینچے جاتے ہیں۔ اس طرح جو مجسم تیار ہوتا ہے اس کا حجم دریافت کرو یہ فرض کرکے کہ اس مجسم کا تغیر پذیر مثلث ناقص کے محورِ اعظم کے ایک سرے سے دوسرے سرے تک حرکت کرتا چلا جاتا ہے۔ [جواب $= \frac{4\,\text{و ب}^2}{3}$]

چودھواں باب

مختلف طریقوں سے باضابطہ تکمل

۱ ۔ باضابطہ تکمل ہر صورت میں بالآخر تکملوں کی جدول کے استعمال ہی پر منحصر ہے ۔ اگر کبھی ایسے تکملہ سے سابقہ پڑتا ہے جو جدول کے کسی ضابطہ کے مشابہ نہیں نظر آتا تو اکثر اوقات یہ ہو سکتا ہے کہ اس تکملہ کو ایسی شکل میں تبدیل کیا جائے کہ وہ جدول کے کسی ضابطہ کے اطلاق کے قابل ہو جائے ۔ اس عمل کے حسب ذیل طریقے ہیں :-

(ا) تکمل بالحصص جس کا گذشتہ باب میں ذکر آچکا ہے ۔

(ب) منطق کسروں کے نظریہ کا اطلاق ۔

(ج) مناسب ابدالوں کا استعمال ۔

پہلے ہم منطق کسروں کے طریقہ پر بحث کرینگے ۔

۲ ۔ منطق کسر سے مراد ایسی کسر ہے جس کا شمار کنندہ اور نسب نما دونوں صحیح منطق تفاعل ہیں ۔ یعنے متغیر کے قوت نما منفی یا کسری نہیں ہیں ۔ اگر کسر کے شمار کنندہ کا درجہ نسب نما کے درجہ کے برابر یا اس سے زیادہ ہو تو شمار کنندہ کو نسب نما پر تقسیم کر کے کسر کو ایک مخلوط (mixed) مقدار میں ظاہر کیا جا سکتا ہے ۔ مثلاً

$$\frac{4\text{لا}^4 - \text{لا}^3 + 1}{\text{لا}^2 - 2\text{لا} + 3} = 4\text{لا}^2 + 7\text{لا} + 2 - \frac{17\text{لا} + 5}{\text{لا}^2 - 2\text{لا} + 3}$$

آخری رقم ایک خالص کسر ہے جس کے شمارکنندہ کا درجہ نسب نما کے درجہ سے کمتر ہے۔ اس کا تکملہ معلوم کرنے کے لیے اس کو اس کے جزوی کسور میں تحویل کرنا پڑتا ہے۔ جن کے متعلق اس کتاب کے حصہ اول باب دوم میں لکھا جا چکا ہے۔ یہاں ہم جزوی کسور کی مدد سے چند معمولی کسروں کے تکمل کے طریقے بیان کرینگے۔

صورت اول۔ جبکہ نسب نما کے تمام اجزاءِ ضربی پہلے درجہ کے ہوں اور ان میں سے کوئی دُہرایا نہیں گیا ہے۔

ہر خطی جزوِ ضربی کے لیے جو دُہرایا نہیں جاتا ہے (مثلاً ا لا + ب) ایک جزوی کسر ہوتی ہے جس کی عام صورت $\frac{\text{ا}}{\text{ا}\,\text{لا} + \text{ب}}$ ہے۔ اس میں ا، ا اور ب مستقل ہیں۔

توضیحی مثال۔ $\int \frac{\text{لا}^{۲} + ۳\,\text{لا} + ۱}{۳\,\text{لا}^{۳} - ۵\,\text{لا}^{۲} - ۴\,\text{لا} + ۴}\, \text{فلا}$ کی قیمت معلوم کرو۔

حل۔ نسب نما کے اجزاءِ ضربی (لا − ۱)، (لا + ۲) اور (۳ لا − ۲) ہیں۔

فرض کرو کہ

$$\frac{\text{لا}^{۲} + ۳\,\text{لا} + ۱}{(\text{لا} - ۱)(\text{لا} + ۲)(۳\,\text{لا} - ۲)} = \frac{\text{ا}}{\text{لا} - ۱} + \frac{\text{ب}}{\text{لا} + ۲} + \frac{\text{ج}}{۳\,\text{لا} - ۲}$$

ہمیں مستقل مقادیر ا ب اور ج کی دریافت مقصود ہے۔

مساوات کو کسروں سے پاک کرنے سے

$$\text{لا}^{۲} + ۳\,\text{لا} + ۱ = \text{ا}(\text{لا} + ۲)(۳\,\text{لا} - ۲) + \text{ب}(\text{لا} - ۱)(۳\,\text{لا} - ۲) + \text{ج}(\text{لا} - ۱)(\text{لا} + ۲)$$

$$= (۳\text{ا} + ۳\text{ب} + \text{ج})\,\text{لا}^{۲} + ۴\text{ا} - ۵\text{ب} + \text{ج}) + (-۴\text{ا} + ۲\text{ب} - ۲\text{ج}) \;....(۱)$$

غیر معین سروں کے طریقہ پر مساوات کی دونوں جانبوں کے لا کی مماثل قوتوں کے سروں کو مساوی لکھنے سے

$۱ = ۳\text{ا} + ۳\text{ب} + \text{ج}$، $۳ = ۴\text{ا} - ۵\text{ب} + \text{ج}$ اور $۱ = -۴\text{ا} + ۲\text{ب} - ۲\text{ج}$

ان ہمزاد مساواتوں کو حل کرنے سے ا = $\frac{۵}{۳}$، ب = $-\frac{۱}{۲۴}$ اور ج = $-\frac{۳۱}{۸}$ حاصل ہوتے ہیں۔

[**نوٹ**: بجائے ہمزاد مساواتوں کے حل کرنے کے اس صورت میں ہم ایک آسان تر طریقہ استعمال کر سکتے ہیں۔ چونکہ مساوات (۱) لا کی تمام قیمتوں کے لیے صحیح ہے، لا = ۱ لکھو تب ب اور ج کٹ کر ا کی قیمت $\frac{۵}{۳}$ برآمد ہوگی۔ اس کے بعد لا = ۲ لکھو تو ب کی قیمت $-\frac{۱}{۲۴}$ برآمد ہوگی اور پھر لا = $\frac{۲}{۳}$ لکھو تو ج کی قیمت $-\frac{۳۱}{۸}$ حاصل ہوگی]

پس
$$\int \frac{(\text{لا}^۲ + ۳\text{لا} + ۱)\,\text{فرلا}}{(\text{لا}-۱)(\text{لا}+۲)(۳\text{لا}-۲)} = \int \frac{\frac{۵}{۳}}{\text{لا}-۱}\,\text{فرلا} + \int \frac{-\frac{۱}{۲۴}}{\text{لا}+۲}\,\text{فرلا} + \int \frac{-\frac{۳۱}{۸}}{۳\text{لا}-۲}\,\text{فرلا}$$

$$= \frac{۵}{۳}\,\text{لوک}(\text{لا}-۱) - \frac{۱}{۲۴}\,\text{لوک}(\text{لا}+۲) - \frac{۳۱}{۲۴}\,\text{لوک}(۳\text{لا}-۲) + \text{ج}$$

صورت دوم۔ جبکہ نسب نما کے تمام اجزاء ضربی پہلے درجہ کے ہیں اور بعض ان میں سے دہرائے گئے ہیں۔ ہر ن گنے خطی جزو ضربی مثلاً $(\text{الا} + \text{ب})^{\text{ن}}$ کے لیے ن جزوی کسور کا مجموعہ لینا ہوتا ہے۔

$$\frac{\text{ا}}{(\text{الا}+\text{ب})^{\text{ن}}} + \frac{\text{ب}}{(\text{الا}+\text{ب})^{\text{ن}-۱}} + \ldots\ldots + \frac{\text{ل}}{(\text{الا}+\text{ب})}$$

مثلاً
$$\int \frac{\text{ا}\,\text{فرلا}}{(\text{الا}+\text{ب})^{\text{ن}}} = \frac{\text{ا}}{\text{ا}(۱-\text{ن})(\text{الا}+\text{ب})^{\text{ن}-۱}} + \text{ج}$$

توضیحی مثال۔ $\int \frac{\text{لا}^۳+۱}{\text{لا}(\text{لا}-۱)^۳}$ فرلا کی قیمت دریافت کرو۔

حل۔ چونکہ نسب نما میں جزو ضربی (لا-۱) تین مرتبہ آیا ہے اس لیے ہم
$$\frac{\text{لا}^۳+۱}{\text{لا}(\text{لا}-۱)^۳} = \frac{\text{ا}}{\text{لا}} + \frac{\text{ب}}{(\text{لا}-۱)^۳} + \frac{\text{ج}}{(\text{لا}-۱)^۲} + \frac{\text{د}}{(\text{لا}-۱)}$$
فرض کرتے ہیں۔

مساوات کو کسروں سے پاک کرنے پر
$$\text{لا}^۳+۱ = \text{ا}(\text{لا}-۱)^۳ + \text{ب}\,\text{لا} + \text{ج}\,\text{لا}(\text{لا}-۱) + \text{د}\,\text{لا}(\text{لا}-۱)^۲$$

= (ا + د) لا³ + (-۳ا + ج - ۲د) لا² + (۳ا + ب - ج + د) لا - ا

جن میں لا کی مماثل قوتوں کے سروں کو مساوی لکھنے سے

ا + د = ۱، -۳ا + ج - ۲د = ۰، ۳ا + ب - ج + د = ۰ اور -ا = ۱

ان کو حل کرنے سے ا = -۱، ب = ۲، ج = ۱، د = ۲

اور (لا³ + ۱) / (لا (لا - ۱)³) = -۱/لا + ۲/(لا - ۱)³ + ۱/(لا - ۱)² + ۲/(لا - ۱)

∴ ∫ (لا³ + ۱) / (لا (لا - ۱)³) فرلا = لوک لا - ۱/(لا - ۱)² - ۱/(لا - ۱) + ۲ لوک (لا - ۱) + ج

= - لا/(لا - ۱)² + لوک (لا - ۱)²/لا + ج

صورت سوم - جبکہ نسب نما میں دوسرے درجہ کے اجزاءِ ضربی شامل ہیں لیکن ان میں سے کوئی دُہرائے نہیں گئے ہیں۔ ہر دوم درجہ کے جزوِ ضربی کے لیے جو دُہرایا نہ گیا ہو، مثلاً

ا لا² + ب لا + ج ایک جزوی کسر بصورت (م لا + ن) / (ا لا² + ب لا + ج) لاحق ہوتی ہے،

جس میں م اور ن مستقل مقادیر ہیں

ایسی رقم کو تکمل کرنے کے لیے، اگر ب صفر نہ ہو تو ہم نسب نما میں مربع کی تکمیل کرتے ہیں

چنانچہ ا{(لا + ب/۲ا)² + (ج/ا - ب²/۴ا²)} = ا{(لا + ب/۲ا)² + (۱/۴ا²) (۴اج - ب²)}

[۴اج > ب²]

اب فرض کرو کہ لا + ب/۲ا = ی تب لا = ی - ب/۲ا اور فرلا = فری
ان قیمتوں کو تعویض کرنے سے نیا تکملہ متغیری کی رقموں میں فوراً تکمیل پاسکتا ہے۔

توضیحی مثال - ∫ فرلا / ((لا + ۲) (لا² - ۲ لا + ۴)) کی تعیین کرو۔

حل - $$\frac{۱}{(\text{لا}+۲)(\text{لا}^{۲}-۲\text{لا}+۴)} = \frac{\text{ا}}{\text{لا}+۲} + \frac{\text{ب لا}+\text{ج}}{\text{لا}^{۲}-۲\text{لا}+۴}$$

$$\therefore\ ۱ = \text{ا}(\text{لا}^{۲}-۲\text{لا}+۴) + (\text{ب لا}+\text{ج})(\text{لا}+۲)$$

$$= \text{ا لا}^{۲} - ۲\text{ا لا} + ۴\text{ا} + \text{ب لا}^{۲} + ۲\text{ب لا} + \text{ج لا} + ۲\text{ج}$$

$$۱ = \text{لا}^{۲}(\text{ا}+\text{ب}) + \text{لا}(-۲\text{ا}+۲\text{ب}+\text{ج}) + (۴\text{ا}+۲\text{ج})$$

پس $\text{ا} = \frac{۱}{۱۲}$ ، $\text{ب} = -\frac{۱}{۱۲}$ اور $\text{ج} = \frac{۱}{۳}$

$$\therefore\ \text{تکملہ} = \frac{۱}{۱۲}\int\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}+۲} + \frac{۱}{۱۲}\int\frac{۴-\text{لا}}{\text{لا}^{۲}-۲\text{لا}+۴}\,\text{فرلا}$$

$$= \frac{۱}{۱۲}\,\text{لوک}\,(\text{لا}+۲) + \frac{۱}{۱۲}\int\frac{(۴-\text{لا})\,\text{فرلا}}{\text{لا}^{۲}-۲\text{لا}+۴}$$

چونکہ $\text{لا}^{۲}-۲\text{لا}+۴ = (\text{لا}-۱)^{۲}+۳ = \text{د}^{۲}+۳$ اگر $\text{د} = (\text{لا}-۱)$

$\therefore\ \text{لا} = \text{د}+۱$ اور $\text{فرلا} = \text{فرد}$ اور $\frac{۱}{۱۲}\int\frac{۴-\text{لا}}{\text{لا}^{۲}-۲\text{لا}+۴}\,\text{فرلا} = \frac{۱}{۱۲}\int\frac{۳-\text{د}}{\text{د}^{۲}+۳}\,\text{فرد}$

$$= \frac{۱}{۱۲}\left[\sqrt{۳}\,\text{مس}^{-۱}\frac{\text{د}}{\sqrt{۳}} - \frac{۱}{۲}\,\text{لوک}\,(\text{د}^{۲}+۳)\right]$$

$$= \frac{۱}{۱۲}\left[\sqrt{۳}\,\text{مس}^{-۱}\frac{\text{لا}-۱}{\sqrt{۳}} - \frac{۱}{۲}\,\text{لوک}\,(\text{لا}^{۲}-۲\text{لا}+۴)\right]$$

$$\text{اور پورا تکملہ} = \frac{۱}{۱۲}\left\{\text{لوک}(\text{لا}+۲) - \frac{۱}{۲}\,\text{لوک}(\text{لا}^{۲}-۲\text{لا}+۴) + \sqrt{۳}\,\text{مس}^{-۱}\frac{\text{لا}-۱}{\sqrt{۳}}\right\} + \text{ج}$$

$$= \frac{۱}{۲۴}\,\text{لوک}\,\frac{(\text{لا}+۲)^{۲}}{\text{لا}^{۲}-۲\text{لا}+۴} + \frac{\sqrt{۳}}{۱۲}\,\text{مس}^{-۱}\frac{\text{لا}-۱}{\sqrt{۳}} + \text{ج}$$

صورت چہارم - جبکہ نسب نما میں دوسرے درجہ کے اجزاءِ ضربی شامل ہیں اور ان میں سے چند دُہرائے گئے ہیں۔ ہر ن گنے دوسرے درجہ کے جزوِ ضربی مثلاً $(\text{ا لا}^{۲}+\text{ب لا}+\text{ج})^{\text{ن}}$ کے لیے مندرجۂ ذیل ن جزوی کسور کا مجموعہ لینا ہوگا۔

$$\frac{\text{ا}\,\text{لا}+\text{ب}}{(\text{ا}\,\text{لا}^2+\text{ب}\,\text{لا}+\text{ج})^{\text{ن}}}+\frac{\text{ج}\,\text{لا}+\text{د}}{(\text{ا}\,\text{لا}^2+\text{ب}\,\text{لا}+\text{ج})^{\text{ن}-1}}+\cdots\cdots+\frac{\text{م}\,\text{لا}+\text{ن}}{\text{ا}\,\text{لا}^2+\text{ب}\,\text{لا}+\text{ج}}$$

اس تکمل کے لیے ذیل کے تحویلی ضابطہ (Reduction formula) کی ضرورت داعی ہوتی ہے جو باب (۱۵) میں ثابت کیا گیا ہے،

$$\int\frac{\text{فر}\,\text{ی}}{(\text{ی}^2+\text{ا}^2)^{\text{ن}}}=\frac{1}{2(\text{ن}-1)\,\text{ا}^2}\left[\frac{\text{ی}}{(\text{ی}^2+\text{ا}^2)^{\text{ن}-1}}+(2\text{ن}-3)\int\frac{\text{فر}\,\text{ی}}{(\text{ی}^2+\text{ا}^2)^{\text{ن}-1}}\right]$$

اگر ن > ۲ مندرجہ بالا ضابطہ کو بار بار دُہرانا پڑتا ہے اور اگر ب صفر نہ ہو تو جیسا کہ صورت سوم میں بتایا گیا ہے مربع کو مکمل کر کے $(\text{ی}^2+\text{ا}^2)$ کی شکل میں لانا پڑتا ہے۔

(نوٹ: سہولت کی خاطر ہم یہاں تحویلی ضابطہ کو اس کی عام صورت میں ظاہر کیے دیتے ہیں جبکہ لا^2 کا سر ا ہے اور ب صفر نہیں ہے۔ وہ یہ ہے:

$$\int\frac{\text{فر}\,\text{لا}}{(\text{ا}\,\text{لا}^2+\text{ب}\,\text{لا}+\text{ج})^{\text{ن}}}=\frac{1}{(\text{ن}-1)(4\,\text{ا}\,\text{ج}-\text{ب}^2)}$$

$$\left\{\frac{2\,\text{ا}\,\text{لا}+\text{ب}}{(\text{ا}\,\text{لا}^2+\text{ب}\,\text{لا}+\text{ج})^{\text{ن}-1}}+2(2\text{ن}-3)\int\frac{\text{فر}\,\text{لا}}{(\text{ا}\,\text{لا}^2+\text{ب}\,\text{لا}+\text{ج})^{\text{ن}-1}}\right\}$$

توضیحی مثال۔ $\int\frac{\text{لا}^2+4\,\text{لا}+1}{(\text{لا}^2+\text{لا}+2)^2}$ فرلا کی قیمت دریافت کی جائے۔

حل۔ فرض کرو $\frac{\text{لا}^2+4\,\text{لا}+1}{(\text{لا}^2+\text{لا}+2)^2}=\frac{\text{ا}\,\text{لا}+\text{ب}}{(\text{لا}^2+\text{لا}+2)^2}+\frac{\text{ج}\,\text{لا}+\text{د}}{\text{لا}^2+\text{لا}+2}$

مساوات کو کسور سے پاک کر کے لا اور اس کی قوتوں کے متناظر سروں کو بالترتیب مساوی لکھنے سے

ا = ۳ ب = -۱، ج = ۰ اور د = ۱ حاصل ہوتے ہیں۔

پس دیا ہوا تکملہ $=\int\frac{(3\,\text{لا}-1)\,\text{فر}\,\text{لا}}{(\text{لا}^2+\text{لا}+2)^2}+\int\frac{\text{فر}\,\text{لا}}{\text{لا}^2+\text{لا}+2}$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{\text{فر}(\text{لا}^2+\text{لا}+2)}{(\text{لا}^2+\text{لا}+2)^2}-\frac{5}{2}\int\frac{\text{فر}\,\text{لا}}{(\text{لا}^2+\text{لا}+2)^2}+\int\frac{\text{فر}\,\text{لا}}{\text{لا}^2+\text{لا}+2}\quad\ldots\ldots(1)$$

دوسری رقم کی تعیین کے لیے مصرحۂ بالا تحویلی ضابطہ راست استعمال کیا جا سکتا ہے۔ لیکن تکمل بالحصص کے طریقہ سے اس کی تعیین نہ صرف آسان ہے بلکہ سود مند بھی، اس لیے ہم

فرض کرتے ہیں کہ $\text{ی} = \frac{\text{۱}}{\text{لا}^{\text{۲}} + \text{لا} + \text{۲}}$ اور $\text{فرو} = \text{فرلا} \quad \therefore \text{فری} = \frac{-(\text{۲لا} + \text{۱})\,\text{فرلا}}{(\text{لا}^{\text{۲}} + \text{لا} + \text{۲})^{\text{۲}}}$

اور $\text{و} = \text{لا} + \text{ج}$

پس چونکہ $\int \text{ی فرو} = \text{ی و} - \int \text{و فری}$

$$\therefore \int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{\text{۲}} + \text{لا} + \text{۲}} = \frac{\text{لا} + \text{۲}}{\text{لا}^{\text{۲}} + \text{لا} + \text{۲}} + \text{۲} \int \frac{\text{لا}^{\text{۲}} + (\text{ج} + \frac{\text{۱}}{\text{۲}})\,\text{لا} + \frac{\text{ج}}{\text{۲}}}{(\text{لا}^{\text{۲}} + \text{لا} + \text{۲})^{\text{۲}}}\,\text{فرلا}$$

اب اگر $\text{ج} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}}$، لکھیں اور آخرالذکر تکملہ کے شمار کنندہ میں $\frac{\text{۷}}{\text{۴}}$ اضافہ کریں اور گھٹائیں تو

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{\text{۲}} + \text{لا} + \text{۲}} = \frac{\text{لا} + \frac{\text{۱}}{\text{۲}}}{\text{لا}^{\text{۲}} + \text{لا} + \text{۲}} + \text{۲} \int \frac{\text{لا}^{\text{۲}} + \text{لا} + \text{۲}}{(\text{لا}^{\text{۲}} + \text{لا} + \text{۲})^{\text{۲}}}\,\text{فرلا} - \text{۲} \int \frac{\frac{\text{۷}}{\text{۴}}\,\text{فرلا}}{(\text{لا}^{\text{۲}} + \text{لا} + \text{۲})^{\text{۲}}}$$

پس $\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا}^{\text{۲}} + \text{لا} + \text{۲})^{\text{۲}}} = \frac{\text{۲}}{\text{۷}} \cdot \frac{\text{لا} + \frac{\text{۱}}{\text{۲}}}{\text{لا}^{\text{۲}} + \text{لا} + \text{۲}} + \frac{\text{۲}}{\text{۷}} \int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{\text{۲}} + \text{لا} + \text{۲}}$

اس تکملہ کو مساوات (۱) میں تعویض کرنے سے

دیا ہوا تکملہ یعنی $\int \frac{\text{لا}^{\text{۲}} + \text{۴لا} + \text{۱}}{(\text{لا}^{\text{۲}} + \text{لا} + \text{۲})^{\text{۲}}}\,\text{فرلا} = \frac{\text{۳}}{\text{۲}} \int \frac{\text{فر}(\text{لا}^{\text{۲}} + \text{لا} + \text{۲})}{(\text{لا}^{\text{۲}} + \text{لا} + \text{۲})^{\text{۲}}} - \frac{\text{۵}(\text{لا} + \frac{\text{۱}}{\text{۲}})}{\text{۷}(\text{لا}^{\text{۲}} + \text{لا} + \text{۲})}$

$+ \frac{\text{۲}}{\text{۷}} \int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{\text{۲}} + \text{لا} + \text{۲}}$

$$= -\frac{\text{۳}}{\text{۲}(\text{لا}^{\text{۲}} + \text{لا} + \text{۲})} - \frac{\text{۵}(\text{لا} + \frac{\text{۱}}{\text{۲}})}{\text{۷}(\text{لا}^{\text{۲}} + \text{لا} + \text{۲})} + \frac{\text{۴}}{\text{۷}\sqrt{\text{۷}}}\,\text{مس}^{-\text{۱}} \frac{(\text{۲لا} + \text{۱})}{\sqrt{\text{۷}}} + \text{ج}$$

مثالیں

ذیل کے تکملوں کی تصدیق کرو :—

(۱) $$\int \frac{(\text{۳} - \text{لا})\ \text{فرلا}}{\text{لا}^{\text{۲}}(\text{لا} + \text{۱})} = -\frac{\text{۳}}{\text{لا}} + \text{۴ لوک}\ \frac{\text{لا}+\text{۱}}{\text{لا}} + \text{ج}$$

(۲) $$\int \frac{\text{۳لا}^{\text{۲}} + \text{۴لا} + \text{۱}}{\text{لا}(\text{لا}^{\text{۲}} + \text{۲لا} + \text{۱})}\ \text{فرلا} = \text{لوک}\ (\text{لا}^{\text{۲}} + \text{لا}) - \frac{\text{۱}}{\text{لا}+\text{۱}} + \text{ج}$$

(۳) $$\int \frac{\text{۲ا}^{\text{۳}} - \text{۲ا}^{\text{۲}} - \text{۲ا} + \text{۱}}{\text{ا}^{\text{۲}}(\text{ا}^{\text{۲}} - \text{۲ا} + \text{۱})}\ \text{فرلا} = \text{لوک}\ (\text{ا} - \text{۱})^{\text{۲}} + \frac{\text{۱}}{\text{ا}(\text{ا}-\text{۱})} + \text{ج}$$

(۴) $$\int_{\text{۳}}^{\text{۴}} \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا}-\text{۱})^{\text{۲}}(\text{لا}-\text{۲})} = \text{لوک}\ \frac{\text{۴}}{\text{۳}} - \frac{\text{۱}}{\text{۶}}$$

(۵) $$\int \frac{\text{۲لا}^{\text{۲}} + \text{لا} + \text{۳}}{(\text{لا}^{\text{۲}} + \text{۱})^{\text{۲}}}\ \text{فرلا} = \text{لوک}\ (\text{لا}^{\text{۲}}+\text{۱}) + \frac{\text{۳لا} + \text{۱}}{\text{۲}(\text{لا}^{\text{۲}}+\text{۱})} + \frac{\text{۳}}{\text{۲}}\ \text{مس}^{-\text{۱}}\ \text{لا} + \text{ج}$$

۳ ۔ مندرجۂ بالا بحث اور مثالوں سے ظاہر ہے کہ ہر منطق تفاعل کا (جو کہ ہمیشہ ایک منطق کسر کی شکل میں تحویل کیا جاسکتا ہے) اور جس کا نسب نما حقیقی دو درجی اور خطی اجزاءِ ضربی میں جدا کرلیا جاسکتا ہے تکملہ دریافت ہوسکتا ہے۔ اور وہ سادہ ابتدائی تفاعلوں مثلاً جبری، لوکارثمی اور مقلوب مثلثی تفاعلوں کی رقموں میں ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

ذیل میں چند مزید مثالیں مشق کی خاطر دی جاتی ہیں۔ طالب علم کو چاہیے کہ ان کو حل کرے۔

مزید مثالیں

ثابت کرو کہ:-

(۱) $$\int \frac{\text{لا}^{\text{۶}} - \text{۳لا} + \text{۲}}{(\text{لا}+\text{۲})^{\text{۲}}(\text{لا}+\text{۱})^{\text{۲}}}\ \text{فرلا} = \text{لا} - \frac{\text{۲۴}}{\text{لا}+\text{۲}} - \frac{\text{۶}}{\text{لا}+\text{۱}}$$
$$+\ \text{۱۳ لوک}\ (\text{لا}+\text{۲}) - \text{۱۹ لوک}\ (\text{لا}+\text{۱}) + \text{ج}$$

(۲) $$\int \frac{\text{لا فرلا}}{(\text{۶لا} + \text{۱})(\text{لا}^{\text{۲}} + \text{۱})} = \frac{\text{۱}}{\text{۱۰}}\ \text{لوک}\ \frac{\text{لا}^{\text{۲}} + \text{۱}}{(\text{۲لا} + \text{۱})^{\text{۲}}} + \frac{\text{۲}}{\text{۵}}\ \text{مس}^{-\text{۱}}\ \text{لا} + \text{ج}$$

(۳) $\int \left(\frac{\text{لا}^{۲}-\text{ا}^{۲}}{\text{لا}^{۲}+\text{ا}^{۲}}\right)^{۲}\text{فرلا} = \text{لا} + \frac{۲\,\text{ا}^{۲}\,\text{لا}}{\text{لا}^{۲}+\text{ا}^{۲}} - ۲\,\text{ا}\,\text{مس}^{-۱}\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \text{ج}$

(۴) $\int \frac{\text{م}^{۶}+\text{م}^{۵}+\text{م}^{۳}+\text{م}}{(\text{م}^{۲}+۲)^{۲}(\text{م}^{۲}+۳)^{۲}}\,\text{فرم} = \frac{۵}{۲(\text{م}^{۲}+۲)} + \frac{۱۰}{\text{م}^{۲}+۳}$

$+ \frac{۱۹}{۲}\,\text{لوک}\,(\text{م}^{۲}+۲) - ۹\,\text{لوک}\,(\text{م}^{۲}+۳) + \text{ج}$

(۵) $\int \frac{(۲\,\text{لا}^{۲}+۱)\,\text{فرلا}}{(\text{لا}^{۲}+۴)(\text{لا}-۳)} = \frac{۱۹}{۱۳}\,\text{لوک}\,(\text{لا}-۳) + \frac{۷}{۲۶}\,\text{لوک}\,(\text{لا}^{۲}+۴)$

$+ \frac{۲۱}{۲۶}\,\text{مس}^{-۱}\frac{\text{لا}}{۲} + \text{ج}$

(۶) $\int \frac{(۳\,\text{م}+۲)\,\text{فرم}}{(\text{م}^{۲}-۳\,\text{م}+۳)^{۲}} = \frac{۱۳\,\text{م}-۲۴}{۳(\text{م}^{۲}-۳\,\text{م}+۳)} + \frac{۲۶}{۳\sqrt{۳}}\,\text{مس}^{-۱}\frac{۲\,\text{م}-۳}{\sqrt{۳}} + \text{ج}$

(۷) $\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{ا}^{۲}+\text{لا}^{۲})(\text{ب}+\text{لا})} = \frac{۱}{\text{ا}^{۲}+\text{ب}^{۲}}\left[\text{لوک}\,\frac{\text{ب}+\text{لا}}{\sqrt{\text{ا}^{۲}+\text{لا}^{۲}}} + \frac{\text{ب}}{\text{ا}}\,\text{مس}^{-۱}\frac{\text{لا}}{\text{ا}}\right] + \text{ج}$

۴ - نئے متغیر کی تعویض کے ذریعے تکمل -

منطق بنانا - گذشتہ فصل میں بیان کیا گیا تھا کہ تمام ایسے منطق تفاعلوں کے تکملے دریافت ہو سکتے ہیں جن کے نسب نما حقیقی دو درجی اور خطی اجزاء ضربی میں ڈھالے جا سکتے ہیں - جو جبری تفاعل غیر منطق ہیں ان میں سے صرف چند کو ابتدائی اور سادہ تفاعلوں کی رقموں میں تکمل کیا جا سکتا ہے - ایک نئے متغیر کی تعویض سے بعض صورتوں میں ان تفاعلوں کو ایسے معادل (equivalent) تفاعلوں میں بدل دیا جا سکتا ہے جو معیاری صورتوں کی فہرست میں داخل ہیں یا ان کو منطق بنا دیا جاتا ہے - غیر منطق تفاعل کو نئے تغیر کے ذریعے منطق بنا کر تکمل کرنے کے عمل کو منطق بنا کر تکمل کرنا کہتے ہیں - یہاں اس کی چند اہم مثالیں پیش کی جاتی ہیں -

(ا) تفرقے جن میں صرف لا کی کسری قوتیں شامل ہیں -

ایسے جملے کو بذریعہ تعویض $لا = ی^{ن}$ منطق بنایا جا سکتا ہے جس میں ن لا کے کسری قوت نماؤں کا اقل مشترک نسب نما ہے۔ اس لیے کہ اب لا، فرلا اور جملہ اصلیہ ی کی رقموں میں منطق شکل میں ظاہر کیے جا سکتے ہیں۔

توضیحی مثال۔ $\int \frac{فرلا}{لا^{\frac{۵}{۸}} - لا^{\frac{۱}{۸}}}$ کی قیمت دریافت کرو۔

حل۔ چونکہ یہاں لا کے کسری قوت نماؤں کا اقل مشترک نسب نما ۸ ہے اس لیے

$لا = ی^{۸}$ لکھو تب $فرلا = ۸ی^{۷}\, فری$، $لا^{\frac{۵}{۸}} = ی^{۵}$ اور $لا^{\frac{۱}{۸}} = ی$

اور دیا ہوا تکملہ $= ۸\int \frac{ی^{۷}\, فری}{ی^{۵} - ی} = ۸\int \left(ی^{۲} + \frac{ی^{۳}}{ی^{۵} - ی}\right) فری$

$= ۸\int ی^{۲}\, فری + ۸\int \frac{ی^{۲}\, فری}{ی^{۴} - ۱}$

$= \frac{۸}{۳} ی^{۳} + ۸\int \frac{ی^{۲}\, فری}{(ی^{۲}+۱)(ی-۱)(ی+۱)}$

فرض کرو $\frac{ی^{۲}}{(ی^{۲}+۱)(ی-۱)(ی+۱)} = \frac{اى + ب}{ی^{۲} + ۱} + \frac{ج}{ی - ۱} + \frac{د}{ی + ۱}$

مساوات کو کسروں سے پاک کر کے ترتیب دینے کے بعد ی کی مشابہ قوتوں کے سروں کو مساوی لکھنے سے

$ا + ج + د = ۰$، $ب + ج - د = ۱$، $-ا + ج + د = ۰$ اور $-ب + ج - د = ۰$

ان کو حل کرنے سے $ا = ۰$، $ب = \frac{۱}{۲}$، $ج = \frac{۱}{۴}$ اور $د = -\frac{۱}{۴}$

پس $\int \frac{ی^{۲}\, فری}{(ی^{۲}+۱)(ی-۱)(ی+۱)} = ۴\int \frac{فری}{ی^{۲}+۱} + ۲\int \frac{فری}{ی-۱} + ۲\, \frac{فری}{ی+۱}$

$= ۴\, مس^{-۱} ی + ۲\, لوک\,(ی-۱) - ۲\, لوک\,(ی+۱) + ج$

$= ۴\, مس^{-۱} لا^{\frac{۱}{۸}} + ۲\, لوک \frac{لا^{\frac{۱}{۸}} - ۱}{لا^{\frac{۱}{۸}} + ۱} + ج$

اور جواب = $\frac{۸}{۳}$ لا$^{\frac{۳}{۸}}$ + ۴ مس$^{-۱}$ لا$^{\frac{۱}{۸}}$ + ۲ لوک $\frac{\text{لا}^{\frac{۱}{۸}} - ۱}{\text{لا}^{\frac{۱}{۸}} + ۱}$ + ج

واضح ہو کہ اوپر جو بحث کی گئی ہے ایسے غیر منطق جملوں سے کی گئی ہے جن کی عام شکل ∫ ر (لا$^{\frac{۱}{ن}}$) فرلا ہے۔ یہاں ر سے مراد لا$^{\frac{۱}{ن}}$ کا منطق تفاعل ہے۔

(ب) تفرقے جن میں صرف ا + ب لا کی کسری قوتیں

شامل ہیں ۔ ایسے جملہ کو بذریعہ تعویض ا + ب لا = ی^{ن} منطق شکل میں تبدیل کیا جا سکتا ہے جہاں ن جملہ ا + ب لا کے کسری قوت نماؤں کا اقل مشترک نسب نما ہے ۔ اس لیے کہ اب لا، فرلا اور جملہ اصلیہ ی کی رقموں میں منطق شکل میں ظاہر کیے جا سکتے ہیں ۔

توضیحی مثال — $\int \frac{\text{فرلا}}{(\text{ا} + \text{ب لا})^{\frac{۳}{۲}} + (\text{ا} + \text{ب لا})^{\frac{۱}{۲}}}$

حل ۔ چونکہ یہاں (ا + ب لا) کے کسری قوت نماؤں کا اقل مشترک نسب نما ۲ ہے اس لیے (ا + ب لا) = ی^{۲} لکھو

تب (ا + ب لا)$^{\frac{۳}{۲}}$ = ی^{۳} اور (ا + ب لا)$^{\frac{۱}{۲}}$ = ی

اور ب فرلا = ۲ ی فری ∴ فرلا = $\frac{\text{۲ ی فری}}{\text{ب}}$

پس دیا ہوا تکملہ = $\frac{۲}{\text{ب}} \int \frac{\text{ی فری}}{\text{ی} (\text{ی}^{۲} + ۱)} = \frac{۲}{\text{ب}} \int \frac{\text{فری}}{\text{ی}^{۲} + ۱} = \frac{۲}{\text{ب}}$ مس$^{-۱}$ ی + ج

= $\frac{۲}{\text{ب}}$ مس$^{-۱}$ (ا + ب لا)$^{\frac{۱}{۲}}$ + ج

جس تکملہ سے یہاں بحث کی گئی ہے اس کی عام صورت ∫ ر [لا، (ا + ب لا)$^{\frac{۱}{ن}}$] فرلا ہے جس میں ر سے مراد منطق تفاعل ہے ۔

مثالیں

ثابت کرو کہ :—

(۱) $\int \frac{\text{فرا}}{\text{ا} + ۲\sqrt{\text{ا}} + ۵} = \text{لوک}\,(\text{ا} + ۲\sqrt{\text{ا}} + ۵) - \text{مس}^{-1}\,\frac{\sqrt{\text{ا}}+۱}{۲} + \text{ج}$

(۲) $\int \frac{۲\,\text{فرلا}}{(\text{لا}+۲)\sqrt{\text{لا}+۱}} = \frac{۱}{۲}\,\text{لوک}\,\frac{\sqrt{\text{لا}+۱}-۱}{\sqrt{\text{لا}+۱}+۱} - \frac{۱}{\sqrt{۳}}\,\text{مس}^{-1}\sqrt{\frac{\text{لا}+۱}{۳}} + \text{ج}$

(۳) $\int \frac{\text{فرلا}}{۱+\sqrt[۳]{\text{لا}+۱}} = \frac{۳}{۲}(\text{لا}+۱)^{\frac{۲}{۳}} - ۳(\text{لا}+۱)^{\frac{۱}{۳}} + ۳\,\text{لوک}\left(۱+\sqrt[۳]{\text{لا}+۱}\right) + \text{ج}$

(۴) $\int_{۰}^{۱} \frac{\text{فرلا}}{(۹+۳\text{لا})\sqrt{\text{لا}}} = ۶\left(۱ - ۳\,\text{مس}^{-1}\frac{۱}{\sqrt{۳}}\right)$

(۵) $\int_{۰}^{۲} \frac{\text{فرلا}}{(\text{لا}+۲)(\text{لا}+۱)^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{۲(\sqrt{۳}-۱)}{\sqrt{۳}} - \frac{\pi}{۶}$

۵ - دو رقمی یا ثنائی تفرقے

(ا) $\text{لا}^{\text{م}}(\text{ا} + \text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}}$ فرلا کی شکل کا تفرقہ جس میں ا اور ب کوئی مستقل ہیں اور قوت نما م، ن، ف منطق اعداد ہیں، دو رقمی تفرقہ کہلاتا ہے۔

فرض کرو کہ لا $=$ ی$^{\text{ع}}$ تب فرلا $=$ ع ی$^{\text{ع}-1}$ فری

اور $\text{لا}^{\text{م}}(\text{ا} + \text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}}$ فرلا $=$ ع ی$^{\text{م ع} + \text{ع} - 1}(\text{ا} + \text{ب ی}^{\text{ن ع}})^{\text{ف}}$ فری

اگر ع نسبب نماؤں م اور ن کا ذو اضعاف اقل لیا جائے تو م ع اور ن ع صحیح اعداد ہونگے۔

پس واضح ہے کہ دیا ہوا تفرقہ ایک دوسرے اسی شکل کے تفرقے کے مساوی ہے جس میں م اور ن کے بجائے صحیح اعداد درج ہیں۔ معہذا

(ب) $\text{لا}^{\text{م}}(\text{ا} + \text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}}$ فرلا $=$ $\text{لا}^{\text{م}+\text{ن ف}}(\text{ا لا}^{-\text{ن}} + \text{ب})^{\text{ف}}$ فرلا

دیے ہوئے تفرقہ کو اسی شکل کے ایک دوسرے تفرقہ میں تبدیل

کردیتا ہے جس میں لا کے قوت نما ن کے عوض ـ ن درج ہے۔ پس ن کی جبری علامت خواہ کچھ ہی ہو ان دو تفرقوں میں سے ایک میں قوسوں کے اندر لا کا قوت نما یقیناً مثبت ہوگا۔

ف جبکہ ایک مثبت صحیح عدد ہوتا ہے دو رقمی جملہ کو پھیلا کر اس کی ایک رقم کا تکملہ حاصل کر لیا جا سکتا ہے ذیل میں ف کو کسر مان کر اس کی بجائے $\frac{ر}{س}$ لکھا جاتا ہے جہاں ر اور س دونوں صحیح اعداد ہیں۔

پس ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ ہر دو رقمی یا ثنائی تفرقہ $لا^{م}(ا + ب\,لا^{ن})^{\frac{ر}{س}}$ فرلا کی شکل میں تحویل کیا جا سکتا ہے جس میں م، ن، ر اور س صحیح عدد ہیں اور ن مثبت ہے۔

پہلے ہم دو رقمی تفرقہ $لا^{م}(ا + ب\,لا^{ن})^{\frac{ر}{س}}$ فرلا ..... (۲)
کو منطق بنانے کے شرائط دریافت کرینگے۔

صورت (۱) فرض کرو $ا + ب\,لا^{ن} = ی^{س}$

تب $(ا + ب\,لا^{ن})^{\frac{1}{س}} = ی$ اور $(ا + ب\,لا^{ن})^{\frac{ر}{س}} = ی^{ر}$

لہذا $لا = \left(\frac{ی^{س} - ا}{ب}\right)^{\frac{1}{ن}}$ اور $لا^{م} = \left(\frac{ی^{س} - ا}{ب}\right)^{\frac{م}{ن}}$

پس $فرلا = \frac{س}{ب\,ن}\, ی^{س-1}\left(\frac{ی^{س} - ا}{ب}\right)^{\frac{1}{ن}-1}$ فری

(۲) میں ان قیمتوں کو تعویض کرنے سے ہمیں حاصل ہوتا ہے:-

$$لا^{م}(ا + ب\,لا^{ن})^{\frac{ر}{س}}\,فرلا = \frac{س}{ب\,ن}\, ی^{ر+س-1}\left(\frac{ی^{س} - ا}{ب}\right)^{\frac{م+1}{ن}-1} فری$$

واضح ہے کہ اس جملہ کا دوسرا رکن منطق ہے جبکہ $\frac{م+1}{ن}$ ایک صحیح عدد ہے یا صفر

صورت (۲) فرض کرو $\text{ا} + \text{ب}\,\text{لا}^{\text{ن}} = \text{ی}^{\text{س}}\,\text{لا}^{\text{ن}}$

تب $\text{لا}^{\text{ن}} = \dfrac{\text{ا}}{\text{ی}^{\text{س}} - \text{ب}}$ اور $\text{ا} + \text{ب}\,\text{لا}^{\text{ن}} = \text{ی}^{\text{س}}\,\text{لا}^{\text{ن}} = \dfrac{\text{ا}\,\text{ی}^{\text{س}}}{\text{ی}^{\text{س}} - \text{ب}}$

پس $(\text{ا} + \text{ب}\,\text{لا}^{\text{ن}})^{\frac{\text{ر}}{\text{س}}} = \text{ا}^{\frac{\text{ر}}{\text{س}}}(\text{ی}^{\text{س}} - \text{ب})^{-\frac{\text{ر}}{\text{س}}}\,\text{ی}^{\text{ر}}$

ہٰذا $\text{لا} = \text{ا}^{\frac{1}{\text{ن}}}(\text{ی}^{\text{س}} - \text{ب})^{-\frac{1}{\text{ن}}}$ اور $\text{لا}^{\text{م}} = \text{ا}^{\frac{\text{م}}{\text{ن}}}(\text{ی}^{\text{س}} - \text{ب})^{-\frac{\text{م}}{\text{ن}}}$

$\therefore\ \text{فرلا} = -\dfrac{\text{س}}{\text{ن}}\,\text{ا}^{\frac{1}{\text{ن}}}\,\text{ی}^{\text{س}-1}(\text{ی}^{\text{س}} - \text{ب})^{-\frac{1}{\text{ن}}-1}\,\text{فری}$

(۱) میں ان کو تعویض کرنے سے

$$\text{لا}^{\text{م}}(\text{ا} + \text{ب}\,\text{لا}^{\text{ن}})^{\frac{\text{ر}}{\text{س}}}\,\text{فرلا} = -\frac{\text{س}}{\text{ن}}\,\text{ا}^{\frac{\text{م}+1}{\text{ن}} + \frac{\text{ر}}{\text{س}}}$$

$$(\text{ی}^{\text{س}} - \text{ب})^{-\left(\frac{\text{م}+1}{\text{ن}} + \frac{\text{ر}}{\text{س}} + 1\right)}\,\text{ی}^{\text{ر}+\text{س}-1}\,\text{فری}$$

واضح ہے کہ اس جملہ کا دوسرا رکن منطق ہے جبکہ $\frac{\text{م}+1}{\text{ن}} + \frac{\text{ر}}{\text{س}}$ ایک صحیح عدد ہے یا صفر

پس دو رقمی تفرقہ $\text{لا}^{\text{م}}(\text{ا} + \text{ب}\,\text{لا}^{\text{ن}})^{\frac{\text{ر}}{\text{س}}}\,\text{فرلا}$ کو ان شرائط کے تحت منطق بنایا جا سکتا ہے۔

توضیحی مثال (۶) $\displaystyle\int \frac{\text{لا}^{3}\,\text{فرلا}}{(2 + 5\,\text{لا}^{2})^{\frac{3}{2}}}$ کی قیمت دریافت کرو۔

حل۔ تکملہ $= \int \text{لا}^{3}(2 + 5\,\text{لا}^{2})^{-\frac{3}{2}}\,\text{فرلا}$ اور $\text{م} = 3،\ \text{ن} = 2،\ \text{ر} = -3،\ \text{س} = 2$

پس اس مثال میں $\frac{\text{م}+1}{\text{ن}} = 2$ جو ایک صحیح عدد ہے اس لیے یہ صورت (۱) کی مثال ہے۔

$\therefore$ ہم فرض کرتے ہیں کہ $(2 + 5\,\text{لا}^{2}) = \text{ی}^{2}$

اس لیے $\text{لا} = \left(\frac{\text{ی}^{۲} - ۲}{۵}\right)^{\frac{۱}{۲}}$، $\text{فرلا} = \frac{\text{ی فری}}{(۵)^{\frac{۱}{۲}}(\text{ی}^{۲} - ۲)^{\frac{۱}{۲}}}$ اور $(۲ + ۵\text{لا}^{۲})^{\frac{۳}{۲}} = \text{ی}^{۳}$

$$\therefore \int \text{لا}^{۳}(۲ + ۵\text{لا}^{۲})^{-\frac{۳}{۲}}\,\text{فرلا} = \int \left(\frac{\text{ی}^{۲} - ۲}{۵}\right)^{\frac{۳}{۲}} \frac{\text{ی فری}}{(۵)^{\frac{۱}{۲}}(\text{ی}^{۲} - ۲)^{\frac{۱}{۲}}} \cdot \frac{۱}{\text{ی}^{۳}}$$

$$= \frac{۱}{(۵)^{۲}} \int (۱ - ۲\,\text{ی}^{-۲})\,\text{فری} = \frac{۱}{(۵)^{۲}}\left[\text{ی} + ۲\,\text{ی}^{-۱}\right] + \text{ج}$$

$$= \frac{۱}{۲۵}\,\frac{۴ + ۵\text{لا}^{۲}}{\sqrt{۲ + ۵\text{لا}^{۲}}} + \text{ج}$$

توضیحی مثال (۲) $\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^{۴}\sqrt{\text{ا} + \text{لا}^{۲}}}$ کی قیمت دریافت کرو۔

حل۔ $\text{تکملہ} = \int \text{لا}^{-۴}(\text{ا} + \text{لا}^{۲})^{-\frac{۱}{۲}}\,\text{فرلا}$

جس میں $\text{م} = -۴$، $\text{ن} = ۲$، $\frac{\text{ر}}{\text{س}} = -\frac{۱}{۲}$

پس $\frac{\text{م} + ۱}{\text{ن}} + \frac{\text{ر}}{\text{س}} = -\frac{۳}{۲} - \frac{۱}{۲} = -۲$ جو ایک صحیح عدد ہے، لہذا یہ صورت (۲) کی مثال ہے۔

اس لیے ہم فرض کرتے ہیں کہ $\text{ا} + \text{لا}^{۲} = \text{ی}^{۲}\text{لا}^{۲} \therefore \text{ی} = \frac{(\text{ا} + \text{لا}^{۲})^{\frac{۱}{۲}}}{\text{لا}}$

لہذا $\text{لا}^{۲} = \frac{\text{ا}}{\text{ی}^{۲} - \text{ا}}$، $\text{ا} + \text{لا}^{۲} = \frac{\text{ا ی}^{۲}}{\text{ی}^{۲} - ۱}$، $(\text{ا} + \text{لا}^{۲})^{\frac{۱}{۲}} = \frac{\text{ا}^{\frac{۱}{۲}}\,\text{ی}}{(\text{ی}^{۲} - ۱)^{\frac{۱}{۲}}}$

معہذا $\text{لا} = \frac{\text{ا}^{\frac{۱}{۲}}}{(\text{ی}^{۲} - ۱)^{\frac{۱}{۲}}}$، $\text{لا}^{۴} = \frac{\text{ا}^{۲}}{(\text{ی}^{۲} - ۱)^{۲}}$

اور $\text{فرلا} = \text{ا}^{\frac{۱}{۲}}(\text{ی}^{۲} - ۱)^{-\frac{۳}{۲}}\,\text{ی فری}$

$$\therefore \int \text{لا}^{-۴}(\text{ا} + \text{لا}^{۲})^{-\frac{۱}{۲}}\,\text{فرلا} = -\int \frac{(\text{ی}^{۲} - ۱)}{\text{ا}^{۲}}\,\text{فری}$$

$$= -\frac{1}{ا^2}\left(\frac{ی^3}{3} - ی\right) + ج = \frac{3ی - ی^3}{3ا^2}$$

$$= \frac{(ا^2 + لا^2)^{\frac{1}{2}}(2لا^2 - ا^2)}{3ا^2لا^3} + ج$$

مثالیں

مندرجۂ ذیل تکملوں کی تصدیق کرو:۔

(۱) $\int ا^5 (8 + ا^2)^{\frac{1}{2}}$ فرا $= \frac{2(5ا^4 - 16)(8 + ا^2)^{\frac{3}{2}}}{105} + ج$

(۲) $\int لا^5 (ا + ب لا^3)^{\frac{1}{2}}$ فرلا $= \frac{2}{45}(3ب لا^3 - 2ا)ب^{-2}(ا + ب لا^3)^{\frac{3}{2}} + ج$

(۳) $\int لا^{-2}(1 + لا^2)^{-\frac{1}{2}}$ فرلا $= -\frac{(1 + لا^2)^{\frac{1}{2}}}{لا} + ج$

(۴) $\int لا^{-ن}(1 + لا^ن)^{-\frac{1}{ن}}$ فرلا $= -\frac{(1 + لا^ن)^{\frac{ن-1}{ن}}}{(ن - 1)لا^{ن-1}} + ج$

(۵) $\int لا^{-3}\sqrt{1 + لا^2}$ فرلا $=$ لوک $\left(لا^{-1} + \sqrt{1 + لا^{-2}}\right) - \frac{\sqrt{1 + لا^2}}{لا^2} + ج$

۶۔ مثلثی تفرقوں کا استحالہ

مسئلہ۔ مثلثی تفرقہ جس میں جب ی اور جم ی صرف منطق صورت میں شامل ہیں۔ بذریعہ تعویض۔

(۱) مس $\frac{ی}{2} = ی$

یا بالفاظ دیگر بذریعہ تعویض۔

(۲) جب د = $\frac{۲\ ی}{۱ + ی^۲}$ ، جم د = $\frac{۱ - ی^۲}{۱ + ی^۲}$ ، فر د = $\frac{۲\ فر ی}{۱ + ی^۲}$

ایک دوسرے تفرقی جملہ میں جو ی میں منطق ہے تحویل کیا جاسکتا ہے۔

ثبوت - چونکہ مس^۲ $\frac{د}{۲}$ = $\frac{۱ - جم د}{۱ + جب د}$

مس $\frac{د}{۲}$ = ی تعویض کرکے جم ی کے لیے حل کرنے سے

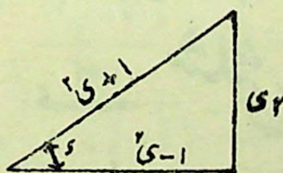
(۳) جم د = $\frac{۱ - ی^۲}{۱ + ی^۲}$ جو ضابطوں (۲) میں سے ایک ضابطہ ہے۔

شکل ۸۲ کے مثلث قائم الزاویہ سے اس کی توضیح ہوتی ہے اور نیز

ضابطہ جب د = $\frac{۲\ ی}{۱ + ی^۲}$ کی جو (۲) میں شامل ہے۔ مھذا ضابطہ (۱) سے

د = ۲ مس$^{-۱}$ ی ∴ فر د = $\frac{۲\ فر ی}{۱ + ی^۲}$ جو (۲) کا تیسرا

ضابطہ ہے۔



شکل ۸۲

واضح ہے کہ اگر کسی مثلثی تفرقہ میں مس د، جم د، قط د، قم د صرف منطق صورتوں میں شامل ہوں تو مصرحۂ بالا مسئلہ اس پر بھی حاوی ہوسکتا ہے اس لیے کہ یہ چار تفاعل منطق طریقہ پر جب د یا جم د یا ان دونوں کی رقموں میں ظاہر کیے جاسکتے ہیں۔

پس کوئی منطق مثلثی تفرقہ تکمل کیا جاسکتا ہے بشرطیکہ ی کی رقموں میں مستحیل تفرقہ جزوی کسور میں جدا کیا جاسکتا ہے۔ (ملاحظہ ہو فصل ۱۰)

توضیحی مثال - ثابت کرو کہ

$$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{ا} + \text{ب جب ۲لا}} = \frac{1}{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}}\ \text{مس}^{-1}\left(\frac{\text{ا مس لا} + \text{ب}}{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}}\right) + \text{ج}$$

[نوٹ ا > ب]

حل - فرض کرو ۲لا = د تب لا = $\frac{1}{2}$ د اور فرلا = $\frac{1}{2}$ فرد

اب ی = مس $\frac{\text{د}}{2}$ لکھو تب جب د = $\frac{\text{۲ فری}}{\text{۱} + \text{ی}^2}$

اور دیا ہوا تکملہ $= \frac{1}{2}\int \dfrac{\frac{\text{۲ فری}}{\text{۱} + \text{ی}^2}}{\text{ا} + \frac{\text{۲ ب ی}}{\text{۱} + \text{ی}^2}} = \int \frac{\text{فری}}{\text{ا ی}^2 + \text{۲ ب ی} + \text{ا}}$

$$= \frac{1}{\text{ا}}\int \frac{\text{فری}}{\left(\text{ی} + \frac{\text{ب}}{\text{ا}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}}{\text{ا}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}}\ \text{مس}^{-1}\frac{\text{ا ی} + \text{ب}}{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}} + \text{ج}$$

ی کو لا کی رقموں میں واپس لانے سے جواب $= \frac{1}{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}}\ \text{مس}^{-1}\left(\frac{\text{ا مس لا} + \text{ب}}{\sqrt{\text{ا}^2 - \text{ب}^2}}\right) + \text{ج}$

مثالیں

ثابت کرو :-

(۱) $\int \frac{\text{فرط}}{\text{جب ط} + \text{مس ط}} = \frac{1}{2}\ \text{لوک مس}\ \frac{\text{ط}}{2} - \frac{1}{4}\ \text{مس}^2\ \frac{\text{ط}}{2} + \text{ج}$

(۲) $\int \frac{\text{مس لا فرلا}}{\text{۱} + \text{جب لا}} = \frac{1}{2}\ \text{لوک}\ \frac{\text{۱} + \text{مس}\frac{\text{لا}}{2}}{\text{۱} - \text{مس}\frac{\text{لا}}{2}} + \frac{1}{\left(\text{۱} + \text{مس}\frac{\text{لا}}{2}\right)^2}$

$- \frac{1}{\text{۱} + \text{مس}\frac{\text{لا}}{2}} + \text{ج}$

$$(\text{۳})\ \int \frac{\text{فرطہ}}{\text{۳} + \text{جم طہ}} = \frac{\text{۱}}{\text{۲}\sqrt{\text{۲}}}\,\text{مس}^{-1}\left(\frac{\text{۱}}{\sqrt{\text{۲}}}\,\text{مس}\,\frac{\text{طہ}}{\text{۲}}\right) + \text{ج}$$

$$(\text{۴})\ \int \frac{\text{تم لا} + \text{۱}}{\text{جم لا} + \text{۱}}\,\text{فرلا} = \frac{\text{۱}}{\text{۴}}\,\text{مس}^{2}\frac{\text{لا}}{\text{۲}} + \text{مس}\,\frac{\text{لا}}{\text{۲}} + \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{لوک مس}\,\frac{\text{لا}}{\text{۲}} + \text{ج}$$

$$(\text{۵})\ \int^{\frac{\text{ط}}{\text{۲}}} \frac{\text{فرطہ}}{\text{۱۲} + \text{۱۳ جم طہ}} = \frac{\text{۱}}{\text{۵}}\,\text{لوک}\,\frac{\text{۳}}{\text{۲}}$$

۷۔ متفرق تعویضیں۔ جو تعویضیں اب تک پیش ہوئی تھیں ان سے دیے ہوئے تفرقی جملوں کو منطق بنا کر تکمل کیا گیا تھا۔ بہتیری صورتوں میں دیے ہوئے تفرقہ کو منطق بنائے بغیر بھی بعض تعویضوں کے ذریعے تکمل کیا جا سکتا ہے۔ لیکن اس کا کوئی عام قاعدہ نہیں بتایا جا سکتا۔ متفرق قسم کے سوالات بکثرت حل کرنے کے بعد طالب علم کو تجربہ بتا دیگا کہ کن صورتوں میں کیا کرنا چاہیے۔

ایک مفید عام تعویض جو متکافی تعویض کہلاتی ہے

$$\text{لا} = \frac{\text{۱}}{\text{ی}}\ \text{ہے جس سے}\ \text{فرلا} = -\frac{\text{فری}}{\text{ی}^{2}}$$

توضیحی مثال۔ $\int \frac{\text{فرفہ}}{\text{فہ}^{2}\sqrt{\text{۱} + \text{۲ فہ} + \text{۳ فہ}^{2}}}$ کا تکملہ معلوم کرو۔

حل۔ $\text{فہ} = \frac{\text{۱}}{\text{ی}}$ لکھو تب دیا ہوا تکملہ

$$= \int \frac{-\text{ی}^{2}\,\text{فری}}{\frac{\text{۱}}{\text{ی}^{2}}\sqrt{\text{۱} + \frac{\text{۲}}{\text{ی}} + \frac{\text{۳}}{\text{ی}^{2}}}} = -\int \frac{\text{ی فری}}{(\text{ی}^{2} + \text{۲ ی} + \text{۳})^{\frac{1}{2}}}$$

$$= -\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\int \frac{\text{فر}(\text{ی}^{2} + \text{۲ ی} + \text{۳})}{(\text{ی}^{2} + \text{۲ ی} + \text{۳})^{\frac{1}{2}}} + \int \frac{\text{فری}}{(\text{ی}^{2} + \text{۲ ی} + \text{۳})^{\frac{1}{2}}}$$

$$= -(\text{ی}^{2} + \text{۲ ی} + \text{۳})^{\frac{1}{2}} + \int \frac{\text{فری}}{\{(\text{ی} + \text{۱})^{2} + (\sqrt{\text{۲}})^{2}\}^{\frac{1}{2}}} + \text{ج}$$

= − (ی² + ۲ی + ۳)^½ + لوک {(ی + ۱) + √(ی² + ۲ی + ۳)} + ج

دوبارہ فہ کی رقموں میں تبدیل کرنے سے

= − √(۱ + ۲فہ + ۳فہ²) / ۳ + لوک [(۱ + فہ) + √(۱ + ۲فہ + ۳فہ²)] / فہ + ج

مثالیں

مندرجۂ ذیل تکملوں کی تصدیق کرو :—

(۱) ∫ فرطہ / [طہ √(۲ + طہ − طہ²)] = (۱/√۲) لوک ([√(۲ + ۲طہ) − √(۲ − طہ)] / [√(۲ + ۲طہ) + √(۲ − طہ)]) + ج

[اشارہ: فرض کرو کہ √(۲ + طہ − طہ²) = طہ (طہ + ۱)]

(۲) ∫ فرلا / [لا² (۲۷لا² + ۶لا − ۱)] = − √(۲۷لا² + ۶لا − ۱) / لا − ۳ جب⁻¹ ((۱ − ۳لا) / ۶لا) + ج

[اشارہ: فرض کرو کہ لا = ۱/ی]

(۳) ∫₀¹ فرلا / (ولا + و⁻لا) = مس⁻¹ و − π/۴ [اشارہ: فرض کرو ولا = ی]

(۴) ∫ فرلا / [لا √(لا² + ۲لا + ۳)] = − (۱/√۳) لوک (۱/۲لا) {لا + ۳ + √(۳لا² + ۶لا + ۹)} + ج

[اشارہ: لا = ۱/ی لکھو]

(۵) ∫₀¹ √(۲و + و²) فرو = √۳ − ½ لوک (۲ + √۳)

[اشارہ: و + ۱ = ی]

پندرھواں باب

تحویلی ضابطے (Reduction Formulae)

تکمّلوں کی جدول کا استعمال

۱۵۱ - دو درجی تفرقوں کے لیے تحویلی ضابطے -

اب تک جو طریقے بتائے گئے ہیں ان سے اگر دو درجی تفرقوں کے تکمّلے جلد دریافت نہیں ہو سکتے تو تکمل بالحصص کے طریقے استعمال کر کے عام طور پر تحویلی ضابطوں سے کام لیا جاتا ہے - ان تحویلی ضابطوں سے دیا ہوا تفرقہ دو رقموں کے حاصل جمع کی شکل میں پیش کیا جاتا ہے جن میں سے ایک رقم تکمل کی علامت سے معرّا رہتی ہے اور دوسری رقم ابتدائی دیے ہوئے جملہ کی ہم صورت ہوتی ہے لیکن اس کا تکمّل آسان تر ہوتا ہے - اہم تحویلی ضابطے چار ہیں اور ذیل میں درج کیے جاتے ہیں :—

(ا) $$\int \text{لا}^{\text{م}} (\text{ا} + \text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}} \text{فرلا} = \frac{\text{لا}^{\text{م}-\text{ن}+1} (\text{ا} + \text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}+1}}{(\text{ن ف} + \text{م} + 1)\,\text{ب}} - \frac{(\text{م} - \text{ن} + 1)\,\text{ا}}{(\text{ن ف} + \text{م} + 1)\,\text{ب}} \int \text{لا}^{\text{م}-\text{ن}} (\text{ا} + \text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}} \text{فرلا}$$

(ب) $$\int \text{لا}^{\text{م}} (\text{ا} + \text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}} \text{فرلا} = \frac{\text{لا}^{\text{م}+1} (\text{ا} + \text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}}}{\text{ن ف} + \text{م} + 1} + \frac{\text{ا ن ف}}{\text{ن ف} + \text{م} + 1} \int \text{لا}^{\text{م}} (\text{ا} + \text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}-1} \text{فرلا}$$

(ج) $\int \text{لا}^{\text{م}} (\text{ا} + \text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}} \text{ فرلا} = \dfrac{\text{لا}^{\text{م}+1} (\text{ا} + \text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}+1}}{\text{ا} (\text{م} + 1)} - \dfrac{\text{ب} (\text{ن ف} + \text{ن} + \text{م} + 1)}{\text{ا} (\text{م} + 1)} \int \text{لا}^{\text{م}+\text{ن}} (\text{ا} + \text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}} \text{ فرلا}$

(د) $\int \text{لا}^{\text{م}} (\text{ا} + \text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}} \text{ فرلا} = - \dfrac{\text{لا}^{\text{م}+1} (\text{ا} + \text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}+1}}{\text{ن} (\text{ف} + 1) \text{ ا}} + \dfrac{\text{ن ف} + \text{ن} + \text{م} + 1}{\text{ن} (\text{ف} + 1) \text{ ا}} \int \text{لا}^{\text{م}} (\text{ا} + \text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}+1} \text{ فرلا}$

ان ضابطوں کو حفظ کرنے کی ضرورت نہیں لیکن یہ معلوم ہونا چاہیے کہ ہر ضابطہ میں کیا کیا جاتا ہے اور وہ کب ناقابلِ عمل ہوتا ہے۔

ضابطہ (ا) م کو بقدر ن گھٹاتا ہے ۔ یہ ضابطہ ناقابلِ عمل ہوتا ہے جبکہ ن ف + م + ۱ = ۰
ضابطہ (ب) ف کو بقدر ا گھٹاتا ہے ۔ یہ 〃 〃 〃 جبکہ ن ف + م + ۱ = ۰
ضابطہ (ج) م کو بقدر ن بڑھاتا ہے ۔ یہ 〃 〃 〃 جبکہ م + ۱ = ۰
ضابطہ (د) ف کو بقدر ا بڑھاتا ہے ۔ یہ 〃 〃 〃 جبکہ ف + ۱ = ۰

[ا] ضابطہ (ا) اخذ کرنے کے لیے ہم تکمل بالحصص کے ضابطہ $\int \text{د فرو} = \text{د و} - \int \text{و فرد}$ کو اس طرح استعمال کرتے ہیں ۔

$\int \text{لا}^{\text{م}} (\text{ا} + \text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}} \text{ فرلا}$ کو بشکل $\int \text{د فرو}$ ڈھالنے اور فرو کو گیارھویں باب کی معیاری صورت (ا) یعنے قوت کے ضابطہ سے تکمل کرنے کے لیے ظاہر ہے کہ قوسین کے باہر کے لا کا قوت نما ن - ۱ ہونا چاہیے پس د میں لا کے قوت نما کے لیے م میں سے ن - ۱ تفریق کرنے پر م - ن + ۱ رہجاتا ہے ۔

∴ $\text{د} = \text{لا}^{\text{م}-\text{ن}+1}$ لکھو اور $\text{فرو} = (\text{ا} + \text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}} \text{ لا}^{\text{ن}-1} \text{ فرلا}$

$$\text{لہذا}\quad \text{فر}\,\text{ر} = (\text{م} - \text{ن} + 1)\,\text{لا}^{\text{م}-\text{ن}} \quad \text{اور}\quad \text{و} = \frac{(\text{ا} + \text{ب}\,\text{لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}+1}}{\text{ن}\,\text{ب}\,(\text{ف}+1)}$$

تکمل بالحصص کے ضابطہ میں ان کو تعویض کرنے سے

$$\int \text{لا}^{\text{م}} (\text{ا} + \text{ب}\,\text{لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}}\, \text{فرلا} = \frac{\text{لا}^{\text{م}-\text{ن}+1} (\text{ا} + \text{ب}\,\text{لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}+1}}{\text{ن}\,\text{ب}\,(\text{ف}+1)}$$

$$- \frac{\text{م} - \text{ن} + 1}{\text{ن}\,\text{ب}\,(\text{ف}+1)} \int \text{لا}^{\text{م}-\text{ن}} (\text{ا} + \text{ب}\,\text{لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}+1}\, \text{فرلا} \quad \ldots\ldots (1)$$

$$\text{لیکن}\quad \int \text{لا}^{\text{م}-\text{ن}} (\text{ا} + \text{ب}\,\text{لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}+1}\, \text{فرلا} = \int \text{لا}^{\text{م}-\text{ن}} (\text{ا} + \text{ب}\,\text{لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}} (\text{ا} + \text{ب}\,\text{لا}^{\text{ن}})\, \text{فرلا}$$

$$= \text{ا}\int \text{لا}^{\text{م}-\text{ن}} (\text{ا} + \text{ب}\,\text{لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}} + \text{ب}\int \text{لا}^{\text{م}} (\text{ا} + \text{ب}\,\text{لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}}\, \text{فرلا}$$

اس کو (۱) میں تعویض کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\int \text{لا}^{\text{م}} (\text{ا} + \text{ب}\,\text{لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}}\, \text{فرلا} = \frac{\text{لا}^{\text{م}-\text{ن}+1} (\text{ا} + \text{ب}\,\text{لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}+1}}{\text{ن}\,\text{ب}\,(\text{ف}+1)}$$

$$- \frac{(\text{م} - \text{ن} + 1)\,\text{ا}}{\text{ن}\,\text{ب}\,(\text{ف}+1)} \int \text{لا}^{\text{م}-\text{ن}} (\text{ا} + \text{ب}\,\text{لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}}\, \text{فرلا}$$

$$- \frac{\text{م} - \text{ن} + 1}{\text{ن}\,(\text{ف}+1)} \int \text{لا}^{\text{م}} (\text{ا} + \text{ب}\,\text{لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}}\, \text{فرلا}$$

سب سے آخری رقم کو مساوات کے سیدھے جانب منتقل کرنے اور $\int \text{لا}^{\text{م}} (\text{ا} + \text{ب}\,\text{لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}}\, \text{فرلا}$ کے لیے مساوات کو حل کرنے سے ضابطہ (۲) حاصل ہوتا ہے۔

اس کے مطالعہ سے واضح ہوگا کہ ضابطہ (۲) دیے ہوئے تفرقی جملہ $\text{لا}^{\text{م}} (\text{ا} + \text{ب}\,\text{لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}}\, \text{فرلا}$ کے تکمل کو اسی وضع کے ایک دوسرے تفرقی جملہ کے تکمل کے تابع بنا دیتا ہے جس میں م کے بجائے م - ن درج ہے۔ پس ضابطہ (۲) کے باربار استعمال سے م کو بقدر ن کی کسی بھی ضعف کے گھٹایا جا سکتا ہے۔

جبکہ ن ف + م + ۱ = ۰ ضابطہ (۲) ناقابلِ عمل ہوتا ہے اس لیے کہ

بسبب نما معدوم ہو جاتا ہے۔ لیکن اس صورت میں

$$\frac{\text{م}+1}{\text{ن}}+\text{ف}=0$$

اس لیے چودھویں باب کی فصل ۱ کے طریقے سے تکملہ بآسانی دریافت ہو سکتا ہے - (۱) کی ضرورت نہیں ہوتی۔

[۲] ضابطہ (ب) اخذ کرنے کے لیے ہم تفرقی جملہ کے اجزاء ضربی کو علیحدہ کر کے لکھ سکتے ہیں۔

$$\int \text{لا}^{\text{م}}(\text{ا}+\text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}}\,\text{فرلا} = \int \text{لا}^{\text{م}}(\text{ا}+\text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}-1}(\text{ا}+\text{ب لا}^{\text{ن}})\,\text{فرلا}$$

$$= \text{ا}\int \text{لا}^{\text{م}}(\text{ا}+\text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}-1}\,\text{فرلا}$$

$$+\,\text{ب}\int \text{لا}^{\text{م}+\text{ن}}(\text{ا}+\text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}-1}\,\text{فرلا} \;\ldots\ldots\; (۲)$$

اب اگر (۲) کی آخری رقم پر ضابطہ (۱) عائد کریں (یعنے اس ضابطہ میں بجائے م کے م + ن لکھیں اور بجائے ف کے ف - ۱ لکھیں تو

$$\text{ب}\int \text{لا}^{\text{م}+\text{ن}}(\text{ا}+\text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}-1}\,\text{فرلا} = \frac{\text{لا}^{\text{م}+1}(\text{ا}+\text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}}}{\text{ن ف}+\text{م}+1} - \frac{\text{ا}(\text{م}+1)}{\text{ن ف}+\text{م}+1}$$

$$\int \text{لا}^{\text{م}}(\text{ا}+\text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}-1}\,\text{فرلا}$$

اس کو (۲) میں تعویض کرنے سے ہمیں ضابطہ (ب) حاصل ہوتا ہے۔
ضابطہ (ب) کے ہر استعمال سے ف بقدر اکائی گھٹ جاتا ہے - یہ ضابطہ بھی اس صورت میں ناقابلِ عمل ہوتا جس میں (۲) ہوتا ہے

یعنے
$$\frac{\text{م}+1}{\text{ن}}+\text{ف}=0$$

[۳] ضابطہ (ج) اخذ کرنے کے لیے ہم ضابطہ (۲) کو $\int \text{لا}^{\text{م}-\text{ن}}(\text{ا}+\text{ب لا}^{\text{ن}})^{\text{ف}}\,\text{فرلا}$ کے لیے حل کرنے سے

$$\int لا^{م-ن} (ا + ب لا^{ن})^{ف} \, فرلا = \frac{لا^{م-ن+۱} (ا + ب لا^{ن})^{ف+۱}}{(م - ن + ۱) ا} - \frac{(ن ف + م + ۱) ب}{(م - ن + ۱) ا} \int لا^{م} (ا + ب لا^{ن})^{ف} \, فرلا$$

اس کے اندر م کی جگہ م + ن تعویض کرنے سے ضابطہ (ج) حاصل ہوتا ہے۔

پس ہر مرتبہ جبکہ ضابطہ (ج) استعمال ہوتا ہے م کے بجائے م + ن لکھا جاتا ہے۔ جب وقت ن + ۱ صفر ہوتا ہے تو ضابطہ (ج) ناقابل عمل ہوتا ہے لیکن اس صورت میں اس کی ضرورت نہیں ہوتی باب (۱۴) کی فصل ـلـ کی مدد سے تفرقی جملہ کو منطق بنایا جا سکتا ہے۔

[۴] ضابطہ (د) اخذ کرنے کے لیے ہم ضابطہ (ب) کو

$$\int لا^{م} (ا + ب لا^{ن})^{ف-۱} \, فرلا$$

کے لیے حل کرکے اس کے اندر ف کی جگہ ف + ۱ تعویض کرتے ہیں۔

ہر مرتبہ جبکہ ضابطہ (د) استعمال ہوتا ہے ف کو بقدر اکائی بڑھا دیتا ہے۔ ظاہر ہے کہ (د) ناقابل عمل ہوتا ہے جبکہ ف + ۱ = ۰ لیکن اس صورت میں چونکہ ف = −۱ دیا ہوا تفرقی جملہ منطق ہے۔

ظاہر ہے کہ چودہویں باب کی فصل ـکـ میں صورت چہارم کا تحویلی ضابطہ (د) کی ایک خاص صورت ہے جس میں م = ۰، ف = −ن، ن = ۲، ا = ا^۲، ب = ۱

توضیحی مثال (۱) $\int لا^{۳} \sqrt{ا^{۲} + لا^{۲}} \, فرلا$ کی قیمت دریافت کرو۔

حل ۔ اس تکملہ کی تعیین کے لیے تحویلی ضابطہ (ا) موزوں ہے کیونکہ اس کے استعمال سے تکملہ $\int لا \sqrt{ا^{۲} + لا^{۲}} \, فرلا$ کی تعیین کرنی ہوگی جو سابقہ باب کی معیاری صورت (۱) متعلق ضابطۂ قوت کے تحت آتا ہے۔

پس

$$\int لا^{۳} \sqrt{ا^{۲} + لا^{۲}} \, فرلا = \frac{۱}{۵} لا^{۲} (ا^{۲} + لا^{۲})^{\frac{۳}{۲}} - \frac{۲}{۵} ا^{۲} \int لا \sqrt{ا^{۲} + لا^{۲}} \, فرلا$$

$$= \frac{1}{5} لا^{2} (ؤ^{2}+لا^{2})^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{15} ؤ^{2} (ؤ^{2}+لا^{2})^{\frac{3}{2}} + ج$$

$$= \frac{1}{15} (3لا^{2} - 2ؤ^{2}) (ؤ^{2}+لا^{2})^{\frac{3}{2}} + ج$$

توضیحی مثال (۲) ثابت کرو کہ

$$\int \sqrt{ؤ^{2}+لا^{2}}\ فرلا = \frac{لا}{2}\sqrt{ؤ^{2}+لا^{2}} + \frac{ؤ^{2}}{2} لوک \left(لا + \sqrt{ؤ^{2}+لا^{2}}\right) + ج$$

حل - اس سوال کے حل کے لیے ضابطہ (ب) موزوں ہے اس لیے کہ $\int \frac{فرلا}{\sqrt{ؤ^{2}+لا^{2}}}$ کی تعیین معیاری صورت (۱۸) کے ضابطہ کے تحت آتی ہے۔ پس

$$\int (ؤ^{2}+لا^{2})^{\frac{1}{2}} فرلا = \frac{لا (ؤ^{2}+لا^{2})^{\frac{1}{2}}}{2} + \frac{ؤ^{2}}{2} \int (ؤ^{2}+لا^{2})^{-\frac{1}{2}} فرلا$$

$$= \frac{لا}{2}\sqrt{ؤ^{2}+لا^{2}} + \frac{ؤ^{2}}{2} لوک \left(لا + \sqrt{لا^{2}+ؤ^{2}}\right) + ج$$

توضیحی مثال (۳) تکمل کرو - $\int \frac{فرطہ}{طہ^{3}\sqrt{طہ^{2}-1}}$

حل - یہاں ضابطہ (ج) استعمال کرنا موزوں ہوگا کیونکہ اس سے تکملہ $\int \frac{فرطہ}{طہ\sqrt{طہ^{2}-1}}$ کی تعیین کرنی ہوگی جو معیاری صورت

$$\int \frac{فرو}{و\sqrt{و^{2}-ؤ^{2}}} = \frac{1}{ؤ} قط^{-1} \frac{و}{ؤ} + ج$$ میں شامل ہے۔

پس $$\int \frac{فرطہ}{طہ^{3}\sqrt{طہ^{2}-1}} = \frac{(طہ^{2}-1)^{\frac{1}{2}}}{2طہ^{2}} + \frac{1}{2} قط^{-1} طہ + ج$$

توضیحی مثال (۴) $\int \frac{فرلا}{(2ؤلا - لا^{2})^{\frac{3}{2}}}$ کی قیمت دریافت کرو۔

حل - چونکہ $۲\,\text{الا} - \text{لا}^2 = \text{ا}^2 - (\text{لا} - \text{ا})^2$ اور $\text{فرلا} = \text{فر}(\text{لا} - \text{ا})$

ہم اس کو $\int \frac{\text{فر}(\text{لا} - \text{ا})}{\{\text{ا}^2 - (\text{لا} - \text{ا})^2\}^{\frac{3}{2}}}$ لکھ سکتے ہیں - اس کے معائنہ سے ظاہر ہے کہ اس کا تکمل بذریعہ ضابطہ (د) سود مند ہوگا -

پس تکملہ $= - \frac{(\text{لا} - \text{ا})\{\text{ا}^2 - (\text{لا} - \text{ا})^2\}^{-\frac{1}{2}}}{-\text{ا}^2} + ۰ \int \{\text{ا}^2 - (\text{لا} - \text{ا})^2\}^{-\frac{1}{2}}\, \text{فر}(\text{لا} - \text{ا})$

چونکہ (ن ف + ن + م + ۱) = صفر اس لیے دوسری رقم کو تکملانے کی ضرورت ہی نہیں پیش آتی -

لہذا جواب $= \frac{\text{لا} - \text{ا}}{\text{ا}^2\{\text{ا}^2 - (\text{لا} - \text{ا})^2\}^{\frac{1}{2}}} + \text{ج} = \frac{\text{لا} - \text{ا}}{\text{ا}^2\sqrt{۲\,\text{الا} - \text{لا}^2}} + \text{ج}$

مثالیں

ذیل کے تکملوں کی تصدیق کرو:-

(۱) $\int \frac{(\text{ا}^2 - \text{لا}^2)^{\frac{3}{2}}}{\text{لا}^2}\,\text{فرلا} = - \frac{(\text{ا}^2 - \text{لا}^2)^{\frac{5}{2}}}{\text{ا}^2\,\text{لا}} - \frac{\text{لا}(\text{ا}^2 - \text{لا}^2)^{\frac{3}{2}}}{\text{ا}^2}$

$- \frac{۳}{۲}\,\text{لا}(\text{ا}^2 - \text{لا}^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{۳}{۲}\,\text{ا}^2\,\text{جب}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ا}} + \text{ج}$

[اشارہ: پہلے ضابطہ (ا) استعمال کیا جائے پھر ضابطہ (ب) دو مرتبہ]

(۲) $\int \frac{\text{لا}\,\text{فرلا}}{\sqrt{۲\,\text{الا} - \text{لا}^2}} = - \sqrt{۲\,\text{الا} - \text{لا}^2} + \text{ا}\,\text{جب}^{-1}\frac{\text{لا} - \text{ا}}{\text{ا}} + \text{ج}$

[اشارہ - متکمل یعنی $\int \text{ف}(\text{لا})\,\text{فرلا}$ میں ف (لا) کے شمار کنندہ اور نسب نما دونوں کو $\text{لا}^{\frac{1}{2}}$ پر تقسیم کرنے سے وہ $\frac{\text{لا}^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{۲\,\text{الا} - \text{لا}}}$ بن جاتا ہے اور یہی شکل میں ضابطہ (۲) کے ذریعہ بآسانی تکمل کیا جا سکتا ہے]

(۳) $\int \frac{\text{لا}^5\,\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}^2 + ۴}} = \frac{\text{لا}^2\sqrt{\text{لا}^2 - ۴}}{۴} - \text{لوگ}\left(\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^2 + ۴}\right) + \text{ج}$

(۴) $$\int \text{ا}^{۳}(\text{۱}+\text{ا}^{۲})^{\frac{۱}{۲}}\,\text{فرا} = \frac{(\text{۵ا}^{۴}+\text{۲ا}^{۲})\sqrt{\text{۱}+\text{ا}^{۲}}}{\text{۳۲}}$$

$$+\frac{۳}{۳۲}\,\text{لوک}\left(\text{ا}^{۲}+\sqrt{\text{۱}+\text{ا}^{۲}}\right)+\text{ج}$$

(۵) $$\int \text{ط}^{۵}\sqrt{\text{۱}-\text{ط}^{۴}}\,\text{فرط} = \frac{۱}{۱۶}\left\{\text{جب}^{-۱}\text{ط}^{۲}+(\text{۲ط}^{۶}-\text{ط}^{۲})\sqrt{\text{۱}-\text{ط}^{۴}}\right\}+\text{ج}$$

(٦) $$\int \frac{\text{لا}^{۲}\,\text{فرلا}}{\sqrt{\text{۲ولا}-\text{لا}^{۲}}} = -\frac{(\text{لا}+\text{۳و})\sqrt{\text{۲ولا}-\text{لا}^{۲}}}{۲}$$

$$+\frac{\text{۳و}^{۲}}{۲}\,\text{جم}^{-۱}\left(\text{۱}-\frac{\text{لا}}{\text{و}}\right)+\text{ج}$$

[اشارہ ضابطہ (۲) دو مرتبہ استعمال کیا جائے]

(۷) $$\int \frac{\text{لا}+\sqrt{\text{۱}+\text{لا}}}{\text{لا}-\sqrt{\text{۱}+\text{لا}}}\,\text{فرلا} = \text{۱}+\text{لا}+\text{۴}\sqrt{\text{۱}+\text{لا}}+$$

$$\text{۲لوک}\left(\text{لا}-\sqrt{\text{۱}+\text{لا}}\right)+\frac{٦}{\sqrt{۵}}\,\text{لوک}\,\frac{\text{۲}\sqrt{\text{۱}+\text{لا}}-\text{۱}-\sqrt{۵}}{\text{۲}\sqrt{\text{۱}+\text{لا}}-\text{۱}+\sqrt{۵}}+\text{ج}$$

(۸) $$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}(\text{۳لا}^{۳}+\text{۲})^{\frac{۳}{۲}}} = \frac{۱}{۳}\left[\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}\,\text{لوک}\,\frac{\sqrt{\text{۳لا}^{۳}+\text{۲}}-\sqrt{۲}}{\sqrt{\text{۳لا}^{۳}+\text{۲}}+\sqrt{۲}}\right.$$

$$\left.+\frac{۱}{\sqrt{\text{۳لا}^{۳}+\text{۲}}}\right]+\text{ج}$$

(۹) $$\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^{۲}+\text{۳لا}-\text{۲}}} = \sqrt{۲}\,\text{مس}^{-۱}\,\frac{\text{لا}+\sqrt{\text{لا}^{۲}+\text{۳لا}-\text{۲}}}{\sqrt{۲}}+\text{ج}$$

(۱۰) $$\int \frac{\text{ط}^{۲}\,\text{فرط}}{\sqrt{(\text{۲}-\text{۳ط}-\text{۲ط}^{۲})^{۳}}} = \frac{\text{۱۷ط}-٦}{\text{۲۵}\sqrt{\text{۲}-\text{۳ط}-\text{۲ط}^{۲}}}$$

$$-\frac{۱}{۲\sqrt{۲}}\,\text{مس}^{-۱}\sqrt{\frac{\text{۴}+\text{۲ط}}{\text{۱}-\text{۲ط}}}+\text{ج}$$

۳ - مثلثی تفرقوں کے لیے تحویلی ضابطے۔

سابقہ فصل کا طریقہ جس سے دیے ہوئے تکملہ کا حل ایک دوسرے

اس کے مشابہ صورت کے تکملہ کی تعیین کے تابع گردانا جاتا ہے متواتر تحویل کہلاتا ہے۔ یہی طریقہ اب مندرجۂ ذیل مثلثی تحویلی ضابطوں کو اخذ کر کے اور ان کا استعمال بنا کر مثلثی تفرقوں پر عائد کیا جاتا ہے۔

$$\text{(ھ)}\quad \int \text{جب}^{\text{م}}\text{لا}\;\text{جم}^{\text{ن}}\text{لا}\;\text{فرلا} = \frac{\text{جب}^{\text{م}+\text{۱}}\text{لا}\;\text{جم}^{\text{ن}-\text{۱}}\text{لا}}{\text{م}+\text{ن}} + \frac{\text{ن}-\text{۱}}{\text{م}+\text{ن}}\int \text{جب}^{\text{م}}\text{لا}\;\text{جم}^{\text{ن}-\text{۲}}\text{لا}\;\text{فرلا}$$

$$\text{(و)}\quad \int \text{جب}^{\text{م}}\text{لا}\;\text{جم}^{\text{ن}}\text{لا}\;\text{فرلا} = -\frac{\text{جب}^{\text{م}-\text{۱}}\text{لا}\;\text{جم}^{\text{ن}+\text{۱}}\text{لا}}{\text{م}+\text{ن}} + \frac{\text{م}-\text{۱}}{\text{م}+\text{ن}}\int \text{جب}^{\text{م}-\text{۲}}\text{لا}\;\text{جم}^{\text{ن}}\text{لا}\;\text{فرلا}$$

$$\text{(ز)}\quad \int \text{جب}^{\text{م}}\text{لا}\;\text{جم}^{\text{ن}}\text{لا}\;\text{فرلا} = -\frac{\text{جب}^{\text{م}+\text{۱}}\text{لا}\;\text{جم}^{\text{ن}+\text{۱}}\text{لا}}{\text{ن}+\text{۱}} + \frac{\text{م}+\text{ن}+\text{۲}}{\text{ن}+\text{۱}}\int \text{جب}^{\text{م}}\text{لا}\;\text{جم}^{\text{ن}+\text{۲}}\text{لا}\;\text{فرلا}$$

$$\text{(ح)}\quad \int \text{جب}^{\text{م}}\text{لا}\;\text{جم}^{\text{ن}}\text{لا}\;\text{فرلا} = \frac{\text{جب}^{\text{م}+\text{۱}}\text{لا}\;\text{جم}^{\text{ن}+\text{۱}}\text{لا}}{\text{م}+\text{۱}} + \frac{\text{م}+\text{ن}+\text{۲}}{\text{م}+\text{۱}}\int \text{جب}^{\text{م}+\text{۲}}\text{لا}\;\text{جم}^{\text{ن}}\text{لا}\;\text{فرلا}$$

طالب علم کو چاہیے کہ ان ضابطوں سے متعلق یاد رکھے کہ:

ضابطہ (ھ) میں ن کو بقدر ۲ گھٹا دیا جاتا ہے۔ (ھ) ناقابلِ عمل ہوتا ہے جبکہ م + ن = ۰۔

ضابطہ (و) میں م کو بقدر ۲ گھٹا دیا جاتا ہے۔ (و) ناقابلِ عمل ہوتا ہے جبکہ م + ن = ۰۔

ضابطہ (ز) میں ن کو بقدر ۲ بڑھا دیا جاتا ہے۔ (ز) ناقابلِ عمل ہوتا ہے جبکہ ن + ۱ = ۰۔

ضابطہ (ح) میں م کو بقدر ۲ بڑھا دیا جاتا ہے۔ (ح) ناقابلِ عمل ہوتا ہے جبکہ ن + ۱ = ۰۔

ان ضابطوں کو اخذ کرنے کے لیے مثل سابق تکمل بالحصص کا

ضابطہ عائد کرتے ہیں یعنے

∫ ی فرو = ی و − ∫ و فری

فرض کرو ی = جم$^{ن-۱}$ لا اور فرو = جب^{م} لا جم لا فرلا

تب فری = − (ن − ۱) جم$^{ن-۲}$ لا جب لا فرلا اور و = جب$^{م+۱}$ لا / (م + ۱)

تکمّل بالحصص کے ضابطہ میں تعویض کرنے سے حاصل ہوتا ہے :—

∫ جب^{م} لا جم^{ن} لا فرلا = جب$^{م+۱}$ جم$^{ن-۱}$ لا / (م + ۱)

+ (ن − ۱)/(م + ۱) ∫ جب$^{م+۲}$ لا جم$^{ن-۲}$ لا فرلا ....(۱)

اس طرح اگر فرض کیا جائے کہ ی = جب$^{م-۱}$ لا اور فرو = جم^{ن} لا جب لا فرلا

تو حاصل ہوتا ہے ∫ جب^{م} لا جم^{ن} لا فرلا = − جب$^{م-۱}$ لا جم$^{ن+۱}$ لا / (ن + ۱)

+ (م − ۱)/(ن + ۱) ∫ جب$^{م-۲}$ لا جم$^{ن+۲}$ لا فرلا .... (۲)

لیکن ∫ جب$^{م+۲}$ لا جم$^{ن-۲}$ لا فرلا = ∫ جب^{م} لا (۱ − جم^{۲} لا) جم$^{ن-۲}$ لا فرلا

= ∫ جب^{م} لا جم$^{ن-۲}$ لا فرلا − ∫ جب^{م} لا جم^{ن} لا فرلا

اس کو مساوات (۱) میں تعویض کرکے مشابہ رقموں کو ترکیب دینے کے بعد

∫ جب^{م} لا جم^{ن} لا فرلا کے لیے حل کیا جائے تو ضابطہ (ھ) حاصل ہوتا ہے۔

مساوات (۲) میں اس کے مشابہ تعویض کرنے سے ضابطہ (و) حاصل ہوتا ہے

ضابطہ (ھ) کو علامتِ مساوات کے بائیں جانب کے تکمّلہ کے لیے

حل کرنے اور ن کو بقدر ۲ اضافہ کرنے سے ضابطہ (ز) حاصل ہوتا ہے۔

اس طرح ضابطہ (و) سے ضابطہ (ح) حاصل ہوتا ہے ۔
جیسا کہ قبل ازیں کہا جا چکا ہے (ھ) اور (و) ضابطے نا قابل عمل ہوتے ہیں جبکہ م + ن = ۰ ۔ ضابطہ (ز) نا قابل عمل ہوتا ہے جبکہ ن + ۱ = ۰ اور ضابطہ (ح) نا قابل عمل ہوتا ہے جبکہ م + ۱ = ۰ ۔ لیکن ان صورتوں میں دیے ہوئے تکملوں کی تعیین دوسرے طریقوں سے ہو سکتی ہے جو قبل ازیں بیان کیے جا چکے ہیں ۔
ظاہر ہے کہ م اور ن جب صحیح اعداد ہیں تو تکملہ ∫ جب^{م} لا جم^{ن} لا فرلا کو مصرحۂ بالا تحویلی ضابطوں میں سے کسی ایک کو استعمال کر کے مندرجۂ ذیل ضابطوں میں سے ایک ضابطہ کے تابع گردانا جا سکتا ہے :

∫ قم لا فرلا = ∫ فرلا / جب لا ، ∫ جب لا جم لا فرلا ، ∫ جم لا فرلا ، ∫ جب لا فرلا ، ∫ فرلا

∫ جم لا فرلا ، ∫ مس لا فرلا ، ∫ فرلا / جم لا جب لا ، ∫ قط لا فرلا = ∫ فرلا / جم لا

جن کے تکمل کے طریقے قبل ازیں معلوم کر لیے جا چکے ہیں ۔

توضیحی مثال (۱) جب^{۲} طہ جم^{۴} طہ فرطہ کی قیمت دریافت کرو ۔
[یہاں م = ۲ ، ن = ۴]

حل ۔ ضابطہ (و) استعمال کرنے سے

∫ جب^{۲} طہ جم^{۴} طہ فرطہ = − جب طہ جم^{۵} طہ / ۶ + ۱/۶ ∫ جم^{۴} طہ فرطہ ...... (۱)

(۱) کے بائیں جانب کے تکملہ پر ضابطہ (ھ) عائد کرنے سے
[اور یہ یاد رکھ کر کہ م = ۰ ، ن = ۴]

∫ جم^{۴} طہ فرطہ = جب طہ جم^{۳} طہ / ۴ + ۳/۴ ∫ جم^{۲} طہ فرطہ .... (۲)

(۲) کے بائیں جانب کے تکملہ پر ضابطہ (ھ) عائد کرنے سے
[یہاں م = ۰ ، ن = ۲]

∫ جم^{۲} طہ فرطہ = جب طہ فرطہ / ۲ + ۱/۲ لا .... (۳)

اب (۳) کا نتیجہ (۲) میں تعویض کرو اور جو نتیجہ اس طرح حاصل ہوتا ہے اس کو (۴) میں تعویض کرو، تو

∫ جب^۲ طہ جم^۴ طہ فرطہ = − (جب طہ جم^۵ طہ)/۶ + (جب طہ جم^۳ طہ)/۲۴

+ ۱/۱۶ (جب طہ جم طہ + طہ) + ج

توضیحی مثال (۲) ∫ جب^۲ فہ جم^{-۳} فہ فرفہ کی قیمت دریافت کرو۔
[یہاں م = ۲، ن = −۳]

حل ۔ ضابطہ (ز) استعمال کرنے سے

∫ جب^۲ فہ جم^{-۳} فہ فرفہ = − (جب^۳ فہ جم^{-۲} فہ)/(−۲) + −۱/۲ ∫ جب^۲ فہ جم^{-۱} فہ فرفہ

اور ∫ جب^۲ فہ جم^{-۱} فہ فرفہ [جس میں م = ۲ اور ن = −۱] پر ضابطہ (و) عائد کرنے سے اس کی قیمت −جب فہ + ∫ جم^{-۱} فہ فرفہ = −جب فہ + لوک (قط فہ + مس فہ) برآمد ہوتی ہے ان نتائج کو اپنی اپنی جگہ پر تعویض کرنے سے

∫ جب^۲ فہ جم^{-۳} فہ فرفہ = (جب^۳ فہ جم^{-۲} فہ)/۲ − ۱/۲ [−جب فہ + لوک (قط فہ + مس فہ)] + ج

= ۱/۲ [جب فہ ((جب^۲ فہ)/(جم^۲ فہ) + ۱) + لوک (قط فہ + مس فہ)] + ج

= ۱/۲ [مس فہ قط فہ + لوک (قط فہ + مس فہ)] + ج

مثالیں

مندرجہ ذیل تکملوں کی تصدیق کرو :—

(۱) ∫ جب^۴ لا جم^۳ لا فرلا = ۱/۵ جب^۵ لا − ۱/۷ جب^۷ لا + ج

(۲) $\int \text{جم}^{\frac{۲}{۳}}\, ۳\text{ط}\ \text{جب}^{۳}\, ۳\text{ط}\ \text{فرط} = \text{جم}^{\frac{۵}{۳}}\, ۳\text{ط} \left(\frac{۱}{۱۱}\text{جم}^{۳}\, ۳\text{ط} - \frac{۱}{۵}\text{جم}\, ۳\text{ط} \right) + \text{ج}$

(۳) $\int \text{مم}^{۳} \frac{\text{فہ}}{۳}\ \text{قم}^{۴} \frac{\text{فہ}}{۳}\ \text{فرفہ} = -\frac{۱}{۴}\text{مم}^{۴} \frac{\text{فہ}}{۳} \left(۳ + ۲\,\text{مم}^{۲} \frac{\text{فہ}}{۳} \right) + \text{ج}$

(۴) $\int \text{مس}^{\frac{۵}{۲}} \text{لا}\ \text{قط}^{۶} \text{لا}\ \text{فرلا} = \text{مس}^{\frac{۷}{۲}} \text{لا} \left(\frac{۲}{۷} + \frac{۴}{۱۱}\text{مس}^{۲}\text{لا} + \frac{۲}{۱۵}\text{مس}^{۴}\text{لا} \right) + \text{ج}$

(۵) $\int \frac{\text{فرط}}{\text{جب}^{۲}\text{ط}\ \text{جم}^{۳}\text{ط}} = -\frac{۱}{\text{جب ط}\ \text{جم}^{۲}\text{ط}} + \frac{۳\ \text{جب ط}}{۲\ \text{جم}^{۲}\text{ط}}$

$+ \frac{۳}{۲}\ \text{لوک} \left(\text{قط ط} + \text{مس ط} \right) + \text{ج}$

(۶) $\int \frac{\text{مم}^{۲}\, ۲\text{ط}\ \text{فرط}}{\text{جب}\, ۲\text{ط}} = -\frac{۱}{۴}\text{مم}\, ۲\text{ط}\ \text{قم}\, ۲\text{ط} - \frac{۱}{۴}\ \text{لوک} \left(\text{قم}\, ۲\text{ط} - \text{مم}\, ۲\text{ط} \right) + \text{ج}$

(۷) $\int \frac{\text{فرما}}{\text{جب}^{۴}\text{ما}} = -\frac{\text{جم ما}}{۳\ \text{جب}^{۳}\text{ما}} - \frac{۲\ \text{جم ما}}{۳\ \text{جب ما}} + \text{ج}$

(۸) $\int \text{جم}^{۶}\text{فہ}\ \text{فرفہ} = \frac{\text{جم فہ}\ \text{جب فہ}}{۴۸} \left\{ ۸\,\text{جم}^{۴}\text{فہ} + ۱۰\,\text{جم}^{۲}\text{فہ} + ۱۵ \right\} + \frac{۵\text{فہ}}{۱۶} + \text{ج}$

(۹) $\int^{\pi} \text{جب}^{۸}\text{ط}\ \text{فرط} = \frac{۳۵\pi}{۱۲۸}$

(۱۰) $\int_{\frac{\pi}{۴}}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{\text{جم}^{۴}\text{فہ}\ \text{فرفہ}}{\text{جب}^{۲}\text{فہ}} = \frac{۳\pi}{۸} - \frac{۵}{۴}$

۳ - تکملوں کی جدول کا استعمال —

گیارہویں، چودہویں اور موجودہ بابوں میں تکمل کے جو طریقے بیان ہوئے ہیں ان میں دیے ہوئے تکملہ کو معیاری ابتدائی صورتوں میں سے کسی ایک یا ایک سے زیادہ صورت میں تحویل کرنے کی کوشش کی گئی ہے۔ اس غرض کے لیے متعدد ترکیبیں (مثلاً تکمل بالحصص، جزوی کسور، نئے متغیر کی تعویض اور تحویلی ضابطوں

کا استعمال) کام میں لائی گئی ہیں -

جب کبھی ایک نسبتہً وسیع جدول تکملوں کی مہیا ہو تو با ضابطہ تکمل کے کسی سوال کو حل کرنے کے لیے سب سے پہلے اس جدول میں ایک ایسے ضابطہ کی تلاش کی جانی چاہیے جس سے دیا ہوا سوال براہ راست بغیر کسی مصرحۂ بالا ترکیبوں کی مدد کے حل ہو سکتا ہے - اس قسم کی جدول بائرلی کے تکملی احصاء یا گرنول اور اسمتھ کے احصاء کی کتابوں میں موجود ہے - ان سے استفادہ کیا جا سکتا ہے .

اگر کوئی ایسا سوال پیش ہو جس کے لیے جدول میں ضابطہ نہ مل سکے تو جن ترکیبوں کا اوپر ذکر آ چکا ہے ان سے مدد لے کر ایسی صورت پیدا کی جانی چاہیے جس سے سوال پر جدول کے ضابطوں میں سے کسی ایک کا اطلاق ہو سکے - یہ کام زیادہ تر دیرینہ مشق اور ضابطوں کے کثرت استعمال ہی سے ہو سکتا ہے -

---

سولھواں باب

تکملی احصاء کے ذریعے طبیعیات کے بعض مسائل کا حل

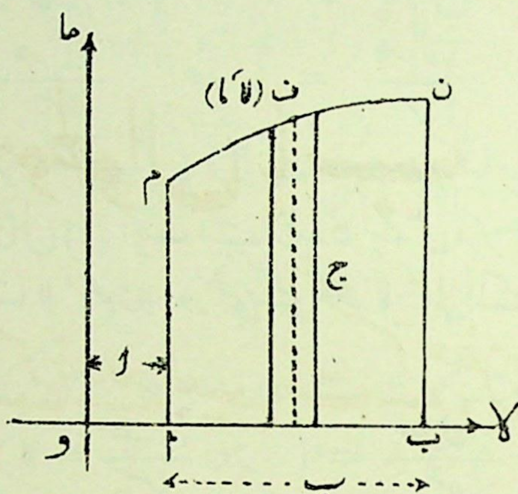
۱ - رقبہ کا معیارِ اثر۔ ہندسی مرکز۔ طبیعیات کے

طالب کو معلوم ہے کہ ہر مادّی جسم کا ایک مرکز ثقل ہوتا ہے۔ یکساں مادّے کے رقبوں کا مرکزِ ثقل ان کا ہندسی مرکز ہوتا ہے۔ اگر کوئی مستوی شکل مرکزِ تشاکل رکھتی ہے تو وہی اس کا ہندسی مرکز بھی ہے۔ اور اگر کسی مستوی شکل کا محور تشاکل ہے تو اس کا ہندسی مرکز اس محور پر واقع ہوگا۔

فرض کرو کہ شکل ۸۳ میں رقبہ ا م ف ن ب ایک بڑی تعداد کون مستطیلوں میں تقسیم کیا جاتا ہے، جن میں سے ہر ایک کا قاعدہ مف لا ہے۔ شکل میں صرف ایک مستطیل بتایا گیا ہے۔ اگر اس کا رقبہ فرر مانا جائے اور ج (جس کے محدد ھ اور ک ہیں) اس کا ہندسی مرکز تو فرر = ما فرلا، ھ = لا، اور ک = $\frac{1}{2}$ ما

اس عنصری مستطیل کے رقبہ کا معیارِ اثر محور و لا (یا و ما) کے گرد، اس کے رقبہ کا اس کے ہندسی مرکز کے محور و لا (یا و ما) سے عمودی فاصلہ کے ساتھ حاصلِ ضرب ہے۔ اگر ایسے معیارہائے اثر کو بالترتیب فرمہ لا اور فرمہ ما سے تعبیر کیا جائے

تو فر $ھ_{لا}$ = ک فر س اور فر $ھ_{ما}$ = ھ فر س ...... (ا)



شکل ۸۳

اور شکل ا م ف ن ب کے رقبہ کا معیارِ اثر تکملی احصاء کے اساسی مسئلہ (دیکھو ۱ باب ۱۳) کو ن عنصری مستطیلوں کے معیار ہائے اثر کے مجموعہ پر عائد کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔ پس

$ھ_{لا}$ = ∫ک فر س اور $ھ_{ما}$ = ∫ھ فر س ...... (ب)

اور اگر (لاَ، ماَ) رقبہ ا م ف ن ب کا ھندسی مرکز ہے اور س اس کا رقبہ تو دی ہوئی شکل کے رقبہ کے معیارِ اثر (متعلقہ مساوات ب) اور لاَ و ماَ میں رابطے ہیں:۔

س لاَ = $ھ_{ما}$ اور س ماَ = $ھ_{لا}$ .... (ج)

لاَ، ماَ کے محسوب کرنے کے لیے رقبہ کے معیارِ اثر $ھ_{لا}$ اور $ھ_{ما}$ معلوم کرو۔ شکل ۸۳ کے لیے

$$ھ_{لا} = \frac{1}{2}\int_{و}^{ب} ما^{2}\ فرلا \quad اور \quad ھ_{ما} = \int_{و}^{ب} لا\ ما\ فرلا$$

ان ضابطوں میں ما کی قیمت لا کی رقموں میں (منحنی م ف ن کی مساوات کی مدد سے) تعویض کی جانی چاہیے - اگر رقبہ ر معلوم ہے تو

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\text{ھ}_{\text{ما}}}{\text{ر}} \quad \text{اور} \quad \bar{\text{ما}} = \frac{\text{ھ}_{\text{لا}}}{\text{ر}}$$

اگر معلوم نہیں ہے تو $\text{ر} = \int \text{ما فرلا}$ کے ذریعہ معلوم کیا جا سکتا ہے۔

توضیحی مثال (۱) ایک ایسے رقبہ کا ہندسی مرکز دریافت کرو جو خطِ مکافی $\text{ما}^2 = 4\text{ف لا}$، محور لا اور منحنی کے نقطہ لا_1، ما_1 کے معیّن سے محدود ہے۔

حل - چونکہ $\bar{\text{لا}} = \frac{\text{ھ}_{\text{ما}}}{\text{ر}}$ اور $\bar{\text{ما}} = \frac{\text{ھ}_{\text{لا}}}{\text{ر}}$

اور $\text{ھ}_{\text{ما}} = \int_0^{\text{لا}_1} \text{لا ما فرلا}$ ، $\text{ھ}_{\text{لا}} = \frac{1}{2}\int_0^{\text{لا}_1} \text{ما}^2\,\text{فرلا}$ اور $\text{ر} = \int_0^{\text{لا}_1} \text{ما فرلا}$

$$\text{پس}\ \bar{\text{لا}} = \frac{2\text{ف}^{\frac{1}{2}}\int_0^{\text{لا}_1}\text{لا}^{\frac{3}{2}}\,\text{فرلا}}{2\text{ف}^{\frac{1}{2}}\int_0^{\text{لا}_1}\text{لا}^{\frac{1}{2}}\,\text{فرلا}} = \frac{\frac{4}{5}\text{ف}^{\frac{1}{2}}\text{لا}_1^{\frac{5}{2}}}{\frac{4}{3}\text{ف}^{\frac{1}{2}}\text{لا}_1^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{5}\text{لا}_1$$

$$\text{اور}\ \bar{\text{ما}} = \frac{2\text{ف}\int_0^{\text{لا}_1}\text{لا فرلا}}{2\text{ف}^{\frac{1}{2}}\int_0^{\text{لا}_1}\text{لا}^{\frac{1}{2}}\,\text{فرلا}} = \frac{\text{ف لا}_1^2}{\frac{4}{3}\text{ف}^{\frac{1}{2}}\text{لا}_1^{\frac{3}{2}}} = \frac{3}{4}\text{ف}^{\frac{1}{2}}\text{لا}_1^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{8}\text{ما}_1$$

توضیحی مثال (۲) خطِ ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{و}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = 1$ کے پہلے ربع کے رقبہ کا ہندسی مرکز دریافت کرو۔

حل - چونکہ $\text{ما}^2 = \frac{\text{ب}^2}{\text{و}^2}(\text{و}^2 - \text{لا}^2)$ لہذا $\text{ما} = \frac{\text{ب}}{\text{و}}\sqrt{\text{و}^2 - \text{لا}^2}$

$$\text{اور}\ \bar{\text{لا}} = \frac{\text{ھ}_{\text{ما}}}{\text{ر}} = \frac{\int_0^{\text{و}}\text{لا ما فرلا}}{\int_0^{\text{و}}\text{ما فرلا}} = \frac{\frac{\text{ب}}{\text{و}}\int_0^{\text{و}}\text{لا}(\text{و}^2 - \text{لا}^2)^{\frac{1}{2}}\,\text{فرلا}}{\frac{\text{ب}}{\text{و}}\int_0^{\text{و}}(\text{و}^2 - \text{لا}^2)^{\frac{1}{2}}\,\text{فرلا}} = \frac{-\frac{\text{ب}}{2\text{و}}\int_0^{\text{و}}(\text{و}^2 - \text{لا}^2)^{\frac{1}{2}}\,\text{فر}(\text{و}^2 - \text{لا}^2)}{\frac{\text{ب}}{\text{و}}\int_0^{\text{و}}(\text{و}^2 - \text{لا}^2)^{\frac{1}{2}}\,\text{فرلا}}$$

$$= \frac{\frac{ب}{2ا}\left[\frac{(ا^2-لا^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right]_0^{ا}}{\frac{ب}{ا}\left\{\frac{لا}{2}(ا^2-لا^2)^{\frac{1}{2}}+\frac{ا^2}{2}\text{جب}^{-1}\frac{لا}{ا}\right\}_0^{ا}} = \frac{\frac{ا^2ب}{3}}{\frac{\pi}{4}\,ا\,ب} = \frac{4ا}{3\pi}$$

اسی طرح $\bar{ما} = \frac{\text{ھ لا}}{م} = \frac{\int_0^{ا}\frac{1}{2}ما^2\,\text{فرلا}}{\int_0^{ا}ما\,\text{فرلا}} = \frac{\frac{ب}{2ا^2}\left(ا^2لا-\frac{لا^3}{3}\right)_0^{ا}}{\frac{\pi}{4}\,ا\,ب} = \frac{\frac{ا\,ب^2}{3}}{\frac{\pi}{4}\,ا\,ب} = \frac{4ب}{3\pi}$

توضیحی مثال (۳) ناقص $\frac{لا^2}{ا^2}+\frac{ما^2}{ب^2}=1$ دائرہ $لا^2+ما^2=ا^2$ اور مثبت سمت میں محور لا سے محدود رقبہ کا ہندسی مرکز معلوم کرو۔

حل ۔ فرض کرو $ما_2$ دائرہ کے کسی نقطہ کا معین ہے اور $ما_1$ اس کے متناظر ناقص پر کے نقطہ کا معین تو عنصری رقبہ = فرم = $(ما_2-ما_1)$ فرلا۔ اس عنصر کا ہندسی مرکز نقطہ $\left(لا، \frac{ما_1+ما_2}{2}\right)$ مانا جا سکتا ہے۔

پس $\bar{لا} = \frac{\int_0^{ا}لا\,(ما_2-ما_1)\,\text{فرلا}}{\int_0^{ا}(ما_2-ما_1)\,\text{فرلا}}$ اور چونکہ $ما_2=\sqrt{ا^2-لا^2}$ اور $ما_1=\frac{ب}{ا}\sqrt{ا^2-لا^2}$

$$\bar{لا} = \frac{\left(1-\frac{ب}{ا}\right)\int_0^{ا}لا\,(ا^2-لا^2)^{\frac{1}{2}}\,\text{فرلا}}{\left(1-\frac{ب}{ا}\right)\int_0^{ا}(ا^2-لا^2)^{\frac{1}{2}}\,\text{فرلا}} = \frac{\frac{ا}{3}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4ا}{3\pi}$$

اور $\bar{ما} = \frac{\int_0^{ا}\frac{1}{2}(ما_2+ما_1)(ما_2-ما_1)\,\text{فرلا}}{\int_0^{ا}(ما_2-ما_1)\,\text{فرلا}} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^{ا}(ما_2^2-ما_1^2)\,\text{فرلا}}{\frac{\pi\,ا\,(ا-ب)}{4}} = \frac{\left[\left(ا^2لا-\frac{لا^3}{3}\right)\frac{ا^2-ب^2}{2ا^2}\right]_0^{ا}}{\frac{\pi\,ا}{4}(ا-ب)}$

$$= \left(\frac{2ا^3}{3}\right)\frac{2(ا+ب)}{\pi\,ا^3} = \frac{4}{3\pi}(ا+ب)$$

مثالیں

(۱) منحنی ما۲ = ۴ (۱ - لا) لا۲ کے حلقہ سے محدود رقبہ کا ہندسی مرکز کہاں ہے؟ [جواب لاَ = ۱۶/۷، ماَ = ۰]

ثابت کرو کہ :-

(۲) خطوط مکافی ما۲ = ا لا اور لا۲ = ب ما سے محدود رقبہ کے ہندسی مرکز کے محدد ہیں -

لاَ = ۹/۲۰ ا^۱/۳ ب^۲/۳ اور ماَ = ۹/۲۰ ا^۲/۳ ب^۱/۳

(۳) ڈائن لا۲ ما = ۴ ا۲ (۲ ا - ما) اور محور لا سے محدود رقبہ کے ہندسی مرکز کے لیے

لاَ = ۰، ماَ = ۱/۲

(۴) ایک دائری قطعہ (Segment) جس کا وتر مرکز دائرہ پر زاویہ ۲ طہ بناتا ہے) کے رقبہ کے ہندسی مرکز کا فاصلہ مرکز دائرہ سے

۲ ص جب۳ طہ / ۳ (طہ - جب طہ جم طہ) ہے -

(۵) منحنی جس کی قطبی مساوات ر = ا جم طہ ہے اس کے ایک حلقہ میں محدود رقبہ کا ہندسی مرکز مبداء سے فاصلہ ۸۱ ا ۳√۳ / ۸۰ π پر واقع ہے -

(۶) خطِ تدویر لا = ا (طہ - جب طہ)، ما = ا (۱ - جم طہ) کی ایک کمان کے رقبہ کا ہندسی مرکز بمقام لاَ = π ا، ماَ = ۵ ا / ۶ واقع ہے -

(۷) ایک مکافی شکل کے پترے کا قاعدہ ۱۲ سنتی میتر اور ارتفاع ۸ سنتی میتر ہے تو اس کا ہندسی مرکز اس کے راس کے ۴ء۸ سنتی میتر نیچے

واقع ہے۔

(۸) لبلابی خط $\text{ما}^{2}(\text{۲ل} - \text{لا}) = \text{لا}^{3}$ اور اس کے متقارب $\text{لا} = \text{۲ل}$ سے محدود رقبہ کا ہندسی مرکز نقطہ $\bar{\text{لا}} = \frac{\text{۵ل}}{\text{۳}}$، $\bar{\text{ما}} = \text{۰}$ ہے۔

(۹) ایک قطاع دائرہ (Sector) کا ہندسی مرکز قطاع کے ناصف پر راس سے فاصلہ $\frac{\text{۲}}{\text{۳}}\,\text{ص}\,\frac{\text{جب}\frac{\text{ط}}{\text{۲}}}{\frac{\text{ط}}{\text{۲}}}$ پر واقع ہے، جس میں ص دائرہ کا نصف قطر اور ط قطاع کا زاویہ ہے۔

(۱۰) ناقص $\frac{\text{لا}^{2}}{\text{ل}^{2}} + \frac{\text{ما}^{2}}{\text{ب}^{2}} = \text{۱}$ سے جو قطعہ، منحنی کے محوروں کے مثبت سروں کو ملانے والا وتر منقطع کرتا ہے، اس کا ہندسی مرکز نقطہ

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\text{۲ل}}{\text{۳}(\pi - \text{۲})} \quad \text{اور} \quad \bar{\text{ما}} = \frac{\text{۲ب}}{\text{۳}(\pi - \text{۲})} \quad \text{ہے}$$

[اشارہ، توضیحی مثال (۳) کو بغور دیکھا جائے]

۳ ۔ گردشی مجسّم کے ہندسی مرکز کی تعیین۔

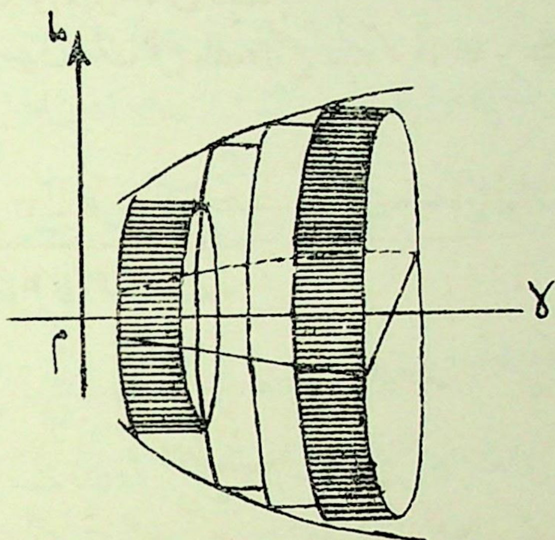
کسی متجانس ٹھوس جسم کا مرکزِ ثقل اس کے ہندسی مرکز کے متماثل ہوتا ہے اور ہندسی مرکز ٹھوس جسم کا جو بھی تشاکل کا مستوی ہو اس میں واقع ہوتا ہے۔

فرض کرو م لا اس مجسم کا ہندسی محور ہے۔ اس کا ہندسی مرکز م لا پر واقع ہوگا۔ اگر اس کے ایک "عنصری" حجم کو یعنے مف لا ارتفاع اور ما نصف قطر والے اسطوانہ کو ف ح سے تعبیر کیا جائے (دیکھو شکل ۸۴) تو $\text{ف ح} = \pi\,\text{ما}^{2}\,\text{مف لا}$ اس اسطوانہ کے حجم کا معیارِ اثر بلحاظ محور م ما کے

$$\text{فر}_{\text{ما}} = \text{لا ف ح} = \pi\,\text{لا}\,\text{ما}^{2}\,\text{مف لا}$$

تب پورے مجسم کے حجم کا معیارِ اثر تکملی احصاء کے اساسی مسئلہ سے دریافت ہو جاتا ہے اور مندرجۂ ذیل ضابطہ سے $\bar{\text{لا}}$ کی قیمت

ح لا = مما = ∫ ۳ لا ما² فرلا برآمد ہوتی ہے ۔



شکل ۸۴

توضیحی مثال (۱) نصف کرہ مجسم کا ہندسی مرکز دریافت کرو ۔

حل ۔ مرکز کرہ کو مبداء م مان کر مجسم کی مستوی سطح کو م ما اور م ہے محوروں کے مستوی میں تصور کرو ۔ تب مجسم محور م لا کے لحاظ سے متشاکل ہوگا ۔

پس لا = $\frac{\int_0^{ص} ۳ \text{ لا ما}^2 \text{ فرلا}}{\int_0^{ص} ۳ \text{ ما}^2 \text{ فرلا}} = \frac{۳ \int_0^{ص} \text{لا} (ص^2 - \text{لا}^2) \text{ فرلا}}{۳ \int_0^{ص} (ص^2 - \text{لا}^2) \text{ فرلا}}$ [اس لیے کہ لا² + ما² = ص²]

$= \frac{۳ \left[ص^2 \frac{\text{لا}^2}{۲} - \frac{\text{لا}^4}{۴} \right]_0^{ص}}{۳ \left[ص^2 \text{لا} - \frac{\text{لا}^3}{۳} \right]_0^{ص}} = \frac{\frac{۱}{۴} ص^4}{\frac{۲}{۳} ص^3} = \frac{۳}{۸} ص$

توضیحی مثال (۲) قطع ناقص $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} = ۱$ اور خطوط

ما = ۰، ما = ب سے محدود سطح کی محور م ما کے گرد گھومنے سے جو گردشی مجسم بنتا ہے اس کا ہندسی مرکز کہاں ہے؟

حل - مجسم کے تشاکل سے واضح ہے کہ لآ = ۰ یعنے ہندسی مرکز محور ما پر ہوگا -

$$\bar{\text{ما}} = \frac{\int_{0}^{\text{ب}} \pi\, \text{ما}\, \text{لا}^2\, \text{فرما}}{\int_{0}^{\text{ب}} \pi\, \text{لا}^2\, \text{فرما}} = \frac{\pi \frac{1}{\text{ب}^2}\int_{0}^{\text{ب}} \text{ما}(\text{ب}^2+\text{ما}^2)\,\text{فرما}}{\pi \frac{1}{\text{ب}^2}\int_{0}^{\text{ب}} (\text{ب}^2+\text{ما}^2)\,\text{فرما}} = \frac{\frac{3}{4}\text{ب}^4}{\frac{4}{3}\text{ب}^3}$$

$$= \frac{9}{16}\,\text{ب}$$

مثالیں

(۱) رقبہ اور گردشی مجسم کے ہندسی مرکز کی تعیین کے لیے جس استدلال کے ساتھ عمل کیا گیا اسی طرح قوس کے ہندسی مرکز کے لیے بھی عمل کرکے ثابت کرو کہ

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{لا}\sqrt{1+\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2}\,\text{فرلا}}{\text{ل}} = \frac{\int_{\text{عہ}}^{\text{بہ}} \text{لا}\sqrt{1+\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}}\right)^2}\,\text{فرما}}{\text{ل}}$$

$$\bar{\text{ما}} = \frac{\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{ما}\sqrt{1+\left(\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}\right)^2}\,\text{فرلا}}{\text{ل}} = \frac{\int_{\text{عہ}}^{\text{بہ}} \text{ما}\sqrt{1+\left(\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}}\right)^2}\,\text{فرما}}{\text{ل}}$$

جہاں (ا، عہ) اور (ب، بہ) قوس کے سروں کے محدد ہیں اور ل = قوس کا طول

ثابت کرو کہ

(۲) قائم دائری مجسم مخروط کا ہندسی مرکز اس کے محور پر راس سے بلندی کے تین چوتھائی فاصلہ پر واقع ہے۔

(۳) محور ما، خطِ مکانی ما۲ = ۴ ا لا اور خط مستقیم ما = ب سے محدود رقبہ محور ما کے گرد گھومتا ہے۔ اس سے جو گردشی مجسم بنتا ہے

اس کا ہندسی مرکز لاَ = ۰، ماَ = ۵/۸ ب ہے۔

(۴) محور لا کے گرد، ناقص لا²/و² + ما²/ب² = ۱ کے پہلے ربع میں واقع رقبہ کے گھومنے سے جو جسم پیدا ہوتا ہے اس کا ہندسی مرکز لاَ = ۳و/۸ ہے۔

(۵) خط لا = ۱ کے گرد، اس خط، محور لا اور خطِ مکافی ما² = ۴ف لا سے محدود سطح کے گھومنے سے جو گردشی مجسم پیدا ہوتا ہے اس کا ہندسی مرکز نقطہ ماَ = ۵/۱۶ ب ہے جس میں ب² = ۴ ف لا

(۶) محور ما اور منحنیات لا² - ما² = ۱، ما = ۰، ما = ۱ سے محدود رقبہ محور ما کے گرد گھومتا ہے جو مجسم اس طرح پیدا ہوتا ہے اس کا ہندسی مرکز ماَ = ۹/۱۶ ہے

۳۔ سیّال کا دباؤ۔ فرض کرو شکل ۸۵ میں سیّال کے اندر ایک انتصابی رقبہ ا ب ج م ہے۔ سیّال کی کثافت

شکل ۸۵

سب جگہ مستقل اور گہرائی کے غیر تابع تصور کی جاتی ہے۔ اگر اکائی و = سیال کے اکائی حجم کا وزن تو چونکہ سیال کی ہر سمت میں دباؤ ایک ہی ہوتا ہے اس لیے اس کی کھلی سطح کے نیچے گہرائی ع پر دباؤ (یعنے اکائی رقبہ کی سطح پر عمل کرنے والی قوت) = و ع۔

اگر رقبہ ا ب ج م پر کا حاصل مجموعی دباؤ معلوم کرنا ہو تو اس پورے رقبہ کو افقی پٹیوں میں تقسیم کیا جاتا ہے اگر گہرائی ع کے پاس کی پٹی کا رقبہ فرس ہے تو اس پر دباؤ

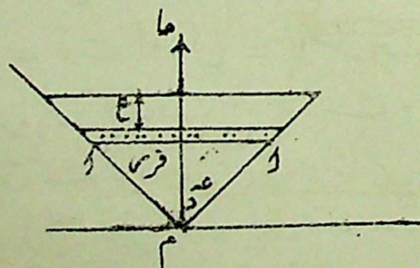
فرد = وع فرس

پس سارے رقبہ ا ب ج م پر کا حاصل مجموعی دباؤ د = ∫ و ع فرس ...... (۲)

فرس کو لا، ما کی رقموں میں اور ع کو ما کی رقموں میں لکھ کر منحنی ب ج کی مساوات کی مدد سے لا کو ما کی رقموں میں تعویض کرنے سے حاصل مجموعی دباؤ د کی تعیین ہو جاتی ہے۔

توضیحی مثال - ایک کھلے منشور نما برتن کی عمودی تراش مساوی الساقین

مثلث کی سی ہے جس کے مساوی ضلعوں کا طول فرداً فرداً ا ہے اور ان کا درمیانی زاویہ ۲ عہ۔ برتن اس طرح کھڑا ہے کہ اس کی عمودی تراش کا راس نیچے اور قاعدہ متوازی الافق ہے۔ اگر اس کو و وزن فی اکائی حجم مایع سے بھر دیا جائے تو اس کے مثلثی پہلو پر کا مجموعی دباؤ دریافت کرو۔



شکل ۸۶

حل۔ فرد = وع فرس

ع = ا جم عہ - ما

(دیکھو شکل ۸۶)۔

اور فرس = ۲ لا فرلا

پس د = ∫ و ع فر ر = و ∫ (ا جم عہ ۔ ما) ۲ مس عہ فر ما (حد: ا جم عہ)

= ۱/۳ ا^۳ و جب عہ جم^۲ عہ اکائیاں

مثالیں

(۱) ایک دائری تراش کا افقی نل (قطر ۲ ص) پانی سے آدھا بھرا ہوا ہے ۔ اس نل کو بند کرنے والے دروازہ پر پانی کا حاصل دباؤ دریافت کرو۔

[جواب = و/۲ ص^۳]

(۲) ایک ناقص کے نصف محور اعظم و اصغر کے طول علی الترتیب ۳ اور ۲ اکائیاں ہیں اس کے نیچے والے نصف حصہ پر کا حاصل مجموعی دباؤ معلوم کرو جبکہ مائع کی سطح میں (ا) اعظم محور واقع ہے (ب) اقل محور واقع ہے ۔

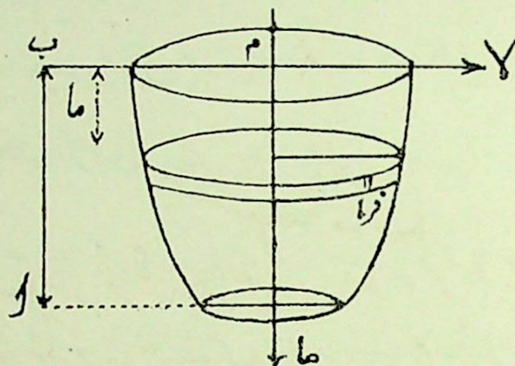
[جواب (ا) ۸ و، (ب) ۱۲ و]

(۳) ثابت کرو کہ مایع میں ڈوبی ہوئی کسی بھی انتصابی سطح کا حاصل مجموعی دباؤ = و ر ما جس میں و = مایع کے اکائی حجم کا وزن ۔ ر = سطح کا رقبہ اور ما = اس رقبہ کے ہندسی مرکز کا سطح مایع سے عمق ۔

۴ ۔ کام ۔ میکانیات میں بتایا گیا ہے کہ قوت اگر مستقل ہے تو اس سے جو کام وقوع میں آتا ہے ق ل کے مساوی ہے جس میں ق = قوت اور ل = فاصلہ جو قوت کے نقطۂ عمل کو قوت کی سمت میں طے کرنا پڑا ۔ قوت جب متغیر ہوتی ہے تو کام کی تعیین کے لیے تکملی احصار استعمال کرنا ہوتا ہے ۔ یہاں اس کی دو مثالیں پیش کی جائینگی ۔

(ا) فرض کرو کہ ایک متغیر چوڑائی کے کھوکھلے برتن کو مایع سے خالی کرنا یا مایع سے بھرنا مقصود ہے شکل ۸۷ ایک گردشی پہلوؤں کا برتن ہے جس کی مختلف گہرائیوں پر عمودی تراش مختلف ہے ۔ اس لیے اس کو مایع سے

بھرنے یا خالی کرنے میں جو کام کیا جاتا ہے اس کی تعیین تکملی احصاء کے اساسی



شکل ۸۷

مسئلہ سے ہو جاتی ہے ۔ چنانچہ اگر عمق ما پر عمودی تراش کا نصف قطر لا مانا جائے تو فرما موٹائی کا، مایع کا ایک اسطوانہ، برتن کی کھلی سطح تک اوپر کو اٹھانے کا عنصری کام فرک = و ما π لا² فرما

اور برتن کو بالکلیہ خالی کرنے کا کام = و π ∫ ما لا² فرما

برتن کے پہلو جس منحنی کی شکل کے ہونگے اس کی مساوات کی مدد سے لا کو ما کی رقموں میں تعویض کرنے سے تکملہ کی قیمت دریافت ہو جاتی ہے ۔
اس استدلال میں جو اصولی کلیہ پیش نظر رکھا گیا ہے ۔
فرک = وع فرح .... (۱) ہے
جس میں فرح = عنصری حجم جو بلندی ع تک اوپر اٹھایا گیا ہے ۔
اس رابطہ کے لحاظ سے جو بھی محدد سوال کے حل کرنے میں موزوں پائے جائیں استعمال کیے جا سکتے ہیں ۔

توضیحی مثال ۔ ایک نصف کروی شکل کا برتن مایع سے بھرا ہے ۔ اگر مایع کا وزن فی مکعب فٹ و پونڈ ہے اور نصف کرہ کا

قطر ۲ ص نو برتن کا سارا مایع اس کے اوپر کی سطح تک پمپ سے اوپر لے جانے کے لیے کتنا کام کرنا ہوگا؟

حل - یہاں حاصل مجموعی کام = $و \int_{0}^{ص} ما\ \pi\ لا^{2}\ فرما$ اور چونکہ برتن کی شکل نصف کروی ہے اس لیے $لا^{2} + ما^{2} = ص^{2}$

پس کام = $و\ \pi \int_{0}^{ص} (ص^{2} - ما^{2})\ ما\ فرما = \frac{و\ \pi\ ص^{4}}{4}$ فٹ پونڈ

(ب) اگر ایک اسطوانہ میں فشارہ کے ذریعہ ایک مقدار گیس بند کردی گئی ہے اور گیس کا حجم ح مکعب فٹ سے بدل کر $ح_{2}$ مکعب فٹ ہو جاتا ہے تو گیس کے پھیلاؤ سے فشارہ پر جو کام کیا گیا اس کو معلوم کرنے کے لیے حسبِ ذیل ضابطہ استعمال کیا جاتا ہے:-

$$کام\ ک = \int_{ح_{1}}^{ح_{2}} د\ فرح \quad \ldots\ldots\ldots \quad (ب)$$

جس میں د = دباؤ پونڈوں میں فی مربع فٹ اس لیے کہ اگر حجم ح سے بڑھ کر ح + فرح ہو جائے اور س = اسطوانہ کی عمودی تراش کا رقبہ - تو گیس کے پھیلنے سے فشارہ فاصلہ $\frac{فرح}{س}$ فٹ آگے بڑھتا ہے اور اس پھیلاؤ کا باعث قوت د س ہے۔

$$پس\ عنصری\ کام = د\ س\ \frac{فرح}{س} = د\ فرح$$

اور اساسی مسئلہ کی رو سے حاصل مجموعی کام = $\int_{ح_{1}}^{ح_{2}} د\ فرح$

د اور ح میں عام رابطہ $د\ ح^{ن}$ = مستقل ہے جس میں ن خود ایک مستقل ہے۔ اگر گیس کا پھیلاؤ ہم تپشی (isothermal) ہے تو مندرجۂ بالا ضابطہ میں ن = ۱ اور اگر حرنا گزار (adiabatic) ہے تو ن = ۱٫۴۱

اگر $د\ ح^{ن}$ = مستقل کی ترسیم کھینچی جائے یعنی دباؤ کو معین اور حجم کو فصلہ

قرار دیکر حجم اور دباؤ کی تبدیلی مرتسم کی جائے تو اس طرح جو رقبہ حاصل ہوگا کئے ہوئے کام کو تعبیر کریگا۔

واضح ہے کہ ہم تپشی استحالوں میں د ح کی ترسیم قائم قطع زائد کی شکل کی ہوتی ہے۔

۵۔ قوتِ تجاذب — اس فصل میں کلیہ تجاذب (یعنے دو مادی ذرات کی کمیتیں اگر ک_1، ک_2 ہیں اور ان کے مابین فاصلہ ل تو ان کی باہمی کشش $= \text{م}\frac{\text{ک}_1\text{ک}_2}{\text{ل}^2}$ جس میں م مستقل تجاذب ہے) کے اطلاق سے بعض خاص خاص ہندسی شکل کے اجسام کی تجاذبی قوتیں دریافت کی جائینگی۔ تجاذب کے عام مسائل مشکل ہوتے ہیں۔ یہاں ہم صرف ان ہی سے بحث کرینگے جو الکھیرے تکمل کی مدد سے آسانی حل ہو جاتے ہیں۔

(ا) یکساں طولی کثافت کی پتلی سلاخ کی کشش ایک بیرونی نقطہ پر۔

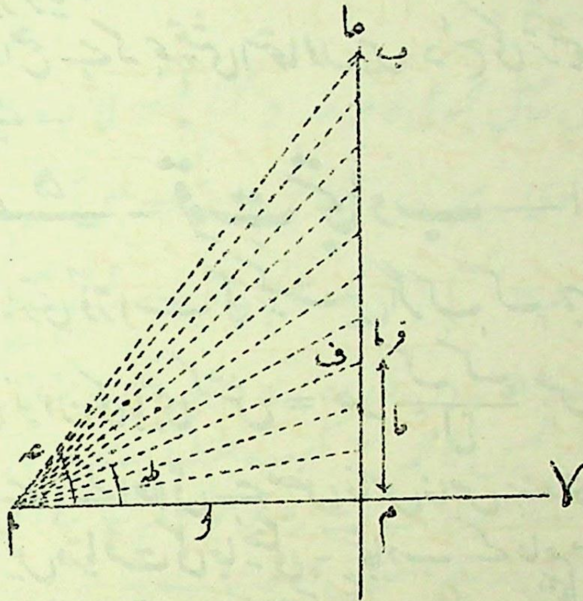
فرض کرو کہ سلاخ محور صا سے منطبق ہے اور محور لا کے نقطہ ا پر اکائی کمیت کا ایک ذرہ ہے (دیکھو شکل ۵۰)۔ ہم چاہتے ہیں کہ سلاخ کی ذرہ پر کیا کشش ہوگی معلوم کریں۔

اگر سلاخ کا طول م ب = ل مانا جائے اور اس کو کثیر التعداد چھوٹے چھوٹے مساوی حصوں میں تقسیم کیا جائے تو اس کی مجموعی کمیت ک = ثہ ل جس میں ثہ = سلاخ کی خطی کثافت یعنے اکائی طول کی کمیت۔

فرض کرو عمودی فاصلہ ا م = ا

سلاخ کے کسی عنصری ٹکڑے کی کشش ا پر $\frac{\text{م فرماثہ}}{(\text{ا}^2 + \text{ما}^2)}$

اور اس کی سمت نقطۂ ا کو سلاخ کے اس خاص ٹکڑے سے ملانے والے خط



شکل ۸۴

اف کی سمت ہوگی۔

پس اس کشش کا جزوِ تحلیلی م لا کی سمت میں

$$= \frac{\text{م ثہ فرا}}{(\text{ل}^2 + \text{ما}^2)} \text{ جم م ا ف} = \frac{\text{م ثہ ل فرا}}{(\text{ل}^2 + \text{ما}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

اس طرح اس کشش کا جزوِ تحلیلی م ما کی سمت میں

$$= \frac{\text{م ثہ فرا}}{(\text{ل}^2 + \text{ما}^2)} \text{ جب م ا ف} = \frac{\text{م ثہ ما فرا}}{(\text{ل}^2 + \text{ما}^2)^{\frac{3}{2}}}$$

∴ اگر $\text{ق}_{\text{لا}}$ = حاصل مجموعی جزوِ تحلیلی تمام ٹکڑوں کی کششوں کا سمت م لا میں اور $\text{ق}_{\text{ما}}$ = حاصل مجموعی جزوِ تحلیلی سمت م ما میں تو

$$\text{ق}_{\text{لا}} = \text{مرثہ ا} \int_{0}^{\text{ل}} \frac{\text{فرما}}{(\text{ا}^{۲}+\text{ما}^{۲})^{\frac{۳}{۲}}} \quad \text{اور} \quad \text{ق}_{\text{ما}} = \text{مرثہ} \int_{0}^{\text{ل}} \frac{\text{ما فرما}}{(\text{ا}^{۲}+\text{ما}^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}$$

ان تکملوں کی تعیین کے لیے ما = ا مس طہ لکھو تب اگر $\text{عہ} = \text{مس}^{-۱}\frac{\text{ل}}{\text{ا}}$ تو

$$\text{ق}_{\text{لا}} = \frac{\text{مرثہ}}{\text{ا}} \int_{0}^{\text{عہ}} \text{جم طہ فرطہ} = \frac{\text{مرثہ}}{\text{ا}}\,\text{جب عہ} = \frac{\text{مرک}}{\text{ال}}\,\text{جب عہ}$$

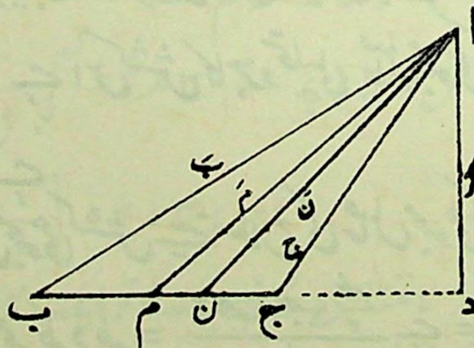
$$\text{اور} \quad \text{ق}_{\text{ما}} = \frac{\text{مرثہ}}{\text{ا}} \int_{0}^{\text{عہ}} \text{جب طہ فرطہ} = \frac{\text{مرثہ}}{\text{ا}}(\text{۱ - جم عہ}) = \frac{\text{مرک}}{\text{ال}}(\text{۱ - جم عہ})$$

$$\text{اور حاصل مجموعی قوت ق} = \sqrt{(\text{ق}_{\text{لا}})^{۲} + (\text{ق}_{\text{ما}})^{۲}} = \frac{\text{۲ مرک}}{\text{ال}}\,\text{جب}\,\frac{\text{عہ}}{۲}$$

$$\text{اور زاویہ فہ} = \text{مس}^{-۱}\frac{\text{ق}_{\text{ما}}}{\text{ق}_{\text{لا}}} = \text{مس}^{-۱}\frac{\text{۱ - جم عہ}}{\text{جب عہ}} = \frac{\text{عہ}}{۲}$$

اسی سوال کو کسی قدر زیادہ تعمیم کے ساتھ ایک اور طریقہ سے بھی حل کرسکتے ہیں جس میں احصاء کے ساتھ ہندسہ کا بھی تھوڑا سا جزو شامل ہے۔

شکل ۸۹ میں پتلی سلاخ ب ج ہے اور نقطہ جس پر اکائی کمیت رکھی گئی ہے ا ہے۔ ب ج پر ا سے جو عمود ا د گرایا گیا ہے سلاخ سے باہر واقع ہے۔



شکل ۸۹

ا کو مرکز اور ا د کو نصف قطر مان کر دائری قوس د ب کھینچو جو ا ب کو بَ اور ا ج کو جَ پر قطع کرتی ہے اور ا م کو مَ اور ا ن کو نَ پر۔

$$\text{تب جزو م ن کی کشش ا پر} = \frac{\text{مرثہ (م ن)}}{(\text{ا م})^{2}}$$

اور رقبہ ا م ن : ا مَ نَ = ا(م ن) : د(مَ نَ)

لیکن رقبہ ا م ن : ا مَ نَ = $(\text{ا م})^{2}$: $(\text{ا مَ})^{2}$ اس لیے کہ زاویہ م ا ن بہت چھوٹا ہے۔

$$\therefore \text{م ن : مَ نَ} = (\text{ا م})^{2} : (\text{ا مَ})^{2} \text{ یا } \frac{\text{م ن}}{(\text{ا م})^{2}} = \frac{\text{مَ نَ}}{(\text{ا مَ})^{2}} = \frac{\text{مَ نَ}}{\text{د}^{2}}$$

$$\text{پس م ن کی کشش ا پر} = \frac{\text{مرثہ (مَ نَ)}}{\text{د}^{2}}$$

اگر قوس بَ جَ کو مادّے سے یکساں لدا ہوا فرض کیا جائے اس طرح پر کہ اس کی خطّی کثافت سلاخ کی خطّی کثافت کے برابر ہو تو اس کی حاصل مجموعی کشش سلاخ کی حاصل مجموعی کشش کے مساوی ہوگی

قوس کی حاصل مجموعی کشش کی سمت زاویہ بَ ا جَ کی تنصیف کرتی ہے۔

فرض کرو زاویہ بَ ا جَ = عہ۔

تب قوس کے عنصر یا جزو د فرطہ کی کشش، حاصل مجموعی کشش کی سمت سے زاویۂ طہ میں $\frac{\text{مرثہ فرطہ}}{\text{د}}$ ہے اس کشش کا جزو تحلیلی حاصل مجموعی کشش کی سمت میں $\frac{\text{مرثہ فرطہ}}{\text{د}}$ جم طہ ہے

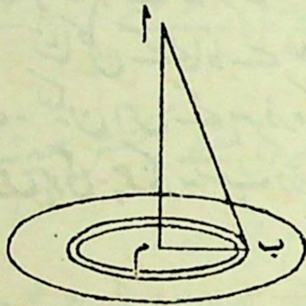
پس قوس کی حاصل مجموعی کشش یعنے سلاخ کی حاصل مجموعی کشش

$$\frac{\text{مرثہ}}{\text{د}} \int_{-\frac{\text{عہ}}{2}}^{+\frac{\text{عہ}}{2}} \text{جم طہ فرطہ} = \frac{\text{۲ مرثہ جب } \frac{\text{عہ}}{2}}{\text{د}} \text{ ہے} = \frac{\text{۲ مرک}}{\text{ا ل}} \text{ جب } \frac{\text{عہ}}{2}$$

(ب) یکساں سطحی کثافت کے دائری قرص کی کشش اس کے

محور ا م کے کسی نقطہ پر۔

فرض کرو کہ قرص کی کثافت سطحی (یعنے کمیت فی اکائی رقبہ سطح) ثہ ہے م اس کا مرکز ہے اور ا اس کا نصف قطر (شکل نمبر ۹۰) م کو مرکز مان کر دو متصل دائرے ص اور ص + فرص نصف قطر کے کھینچو۔ اس سے جو حلقہ بنتا ہے اس کی کمیت = ۲ ㄇ ص فرص م ا محور کے نقطہ ا پر قرص کی کشش مطلوب ہے۔ متذکرۂ بالا حلقہ کا ہر ذرہ ا سے فاصلہ $\sqrt{ا^2 + ص^2}$ پر واقع ہے۔ تشاکل سے واضح ہے کہ حلقہ کی حاصل مجموعی کشش محور ا م کی سمت میں ہے۔ پس حلقہ کی حاصل مجموعی کشش ا پر



شکل نمبر ۹۰

$$= \frac{۲ ㄇ ثہ ص فرص}{(ط^2 + ص^2)} \cdot \frac{ط}{(ط^2+ص^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{۲ ㄇ ثہ ط ص فرص}{(ط^2 + ص^2)^{\frac{3}{2}}}$$

جس میں ط = ا م یعنے ا کا فاصلہ م سے

$$\therefore \text{پورے قرص کی کشش نقطہ ا پر} = ۲ ㄇ ثہ ط \int_{.}^{ا} \frac{ص فرص}{(ط^2+ص^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= ۲ ㄇ ثہ ط \left[\frac{1}{ط} - \frac{1}{(ط^2 + ا^2)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

اگر قرص کا نصف قطر ا نامتناہی بڑا ہو جائے تو ایک نامتناہی وسیع پرت بن جاتی ہے اور اس کی کشش ۲ ㄇ ثہ ہو جاتی ہے جو پرت کے فاصلہ کے غیر تابع ہے۔

(ج) یکساں کثافت کے کروی خول کی کشش —

کروی خول سے مراد ایسا مجسم ہے جو تقریباً مساوی قطر کے کروں سے محدود ہے،
شکل ۹۱ میں کروی خول کا مرکز م ہے اور نقطہ ا خول کے باہر واقع بتایا گیا ہے
مرکز سے اس کا فاصلہ = ط اور خول کا نصف قطر = ا،
ا م ب اور ا م ج زاویوں کے ا م کے گرد گھومنے سے جو حلقہ بنتا ہے
اس پر غور کرو - اگر ان زاویوں کو علی الترتیب طہ اور طہ + فرطہ سے تعبیر کیا جائے
تو ب د = ا جب طہ اور ب ج = ا فرطہ پس اس حلقے کی کمیت
= ۲ π ا^2 ثہ جب طہ فرطہ

تشاکل کے لحاظ سے حلقہ کی حاصل مجموعی کشش ا م کی سمت میں ہونی چاہیے - لیکن اس کے ہر ذرہ کی کشش اس ذرہ کو ا سے ملانے والے خط کی سمت میں ہوگی - چونکہ یہ سب ذرے ا سے مساوی فاصلوں پر واقع ہیں -

شکل ۹۱

(یعنے سب ا ب کے مساوی ہیں)، ان کی کششوں کا جزو تحلیلی ا م کی سمت میں = ان کی کشش × جم ب ا م اور حلقہ کی حاصل مجموعی کشش

= (۲ π ا^2 م ثہ جب طہ فرطہ) / (ا ب)^2 × ا د / ا ب [کیونکہ جم ب ا م = ا د / ا ب]

متبوع متغیر کو ما (= ا ب) قرار دو، تب

ما^2 = (ا ب)^2 = ط^2 + ا^2 - ۲ ا ط جم طہ ∴ ما فرما = ا ط جب طہ فرطہ

معہذا $\text{اد} = \text{ط} - \text{ا جم ط} = \frac{1}{2\,\text{ط}}\left(2\,\text{ط}^2 - 2\,\text{ا ط جم ط}\right) = \frac{1}{2\,\text{ط}}\left(\text{ما}^2 + \text{ط}^2 - \text{ا}^2\right)$

ط کی قیمت تعویض کرنے سے حلقہ کی حاصل مجموعی کشش $\frac{\pi\,\text{ا ہ ث}}{\text{ط}^2}\left(1 + \frac{\text{ط}^2 - \text{ا}^2}{\text{ما}^2}\right)\text{فرما}$ برآمد ہوتی ہے۔

پورے کروی خول کی کشش معلوم کرنے کے لیے اس جملہ کو حدود ما = ط - ا اور ما = ط + ا کے مابین تکمل کرنا چاہیے۔ اس کا نتیجہ ہے

$$\frac{\pi\,\text{ا ہ ث}}{\text{ط}^2}\int_{\text{ط}-\text{ا}}^{\text{ط}+\text{ا}}\left(1 + \frac{\text{ط}^2 - \text{ا}^2}{\text{ما}^2}\right)\text{فرما} = \frac{\pi\,\text{ا ہ ث}}{\text{ط}^2}\left(\text{ما} - \frac{\text{ط}^2 - \text{ا}^2}{\text{ما}}\right)_{\text{ط}-\text{ا}}^{\text{ط}+\text{ا}} = \frac{4\pi\,\text{ا}^2\,\text{ہ ث}}{\text{ط}^2}$$

$= \frac{\text{خول کی کمیت}}{\text{ط}^2}$۔ یعنے کروی خول کی کسی بیرونی نقطے پر کشش بعینہ وہی ہے جو اس کی کمیت کو مرکز پر مرتکز تصور کرنے سے ہوتی ہے۔

اگر نقطۂ ا خول کے اندر واقع ہو تو تکمل کے حدود ما = ا - ط اور ما = ا + ط ہوتے ہیں اور ایسی صورت میں تکملہ کی قیمت صفر برآمد ہوتی ہے۔

مثالیں

(۱) ل طول کی ایک پتلی سلاخ کے وسطی نقطہ سے سلاخ کی لمبائی کی سمت میں فاصلہ ط پر ایک ذرہ کہ کمیت کا واقع ہے اگر سلاخ کی کمیت ک ہے تو اس کی کشش ذرہ پر معلوم کرو۔

[جواب $= \frac{\text{ک کہ}}{\text{ط}\,(\text{ل} + \text{ط})}$]

(۲) سابقہ سوال میں اگر ذرہ سلاخ کے عمودی منصف پر واقع ہو تو بتاؤ کہ سلاخ کی کشش $\frac{2\,\text{کہ ک}}{\text{ط}\sqrt{4\,\text{ط}^2 + \text{ل}^2}}$ ہوگی۔

(۳) ثابت کرو کہ بلندی ب، نصف قطر ص اور ث کثافت کے

قائم دائری اسطوانہ کی کشش ایک ایسے ذرہ پر جو اس کے محور پر سرے سے

ط فاصلہ پر ۲ π م ث $\{$ ب - $\sqrt{(\text{ط} + \text{ب})^2 + \text{ص}^2}$ + $\sqrt{\text{ط}^2 + \text{ص}^2}$ $\}$ ہے۔

(۴) اگر کسی قائم دائری مخروط کی بلندی ب، راسی زاویہ ۲ع اور کثافت ث ہو تو بتاؤ کہ اس کی حاصل مجموعی کشش اس کے راس پر رکھے ہوئے ذرہ پر ۲ π م ث (۱ - جم $\frac{\text{ع}}{2}$) ب ہے۔

(۵) ایک گردشی مکافی نما کا قطعہ اس کے محور کے علی القوائم مستوی سے محدود ہے۔ اگر مستوی کا فاصلہ مکافی نما کے راس سے ط ہے تو اس کے ماسکہ پر رکھے ہوئے ذرہ پر اس کی کشش ۴ π م ث ا لوک $\frac{\text{ط} + \text{ا}}{\text{ا}}$ ہے

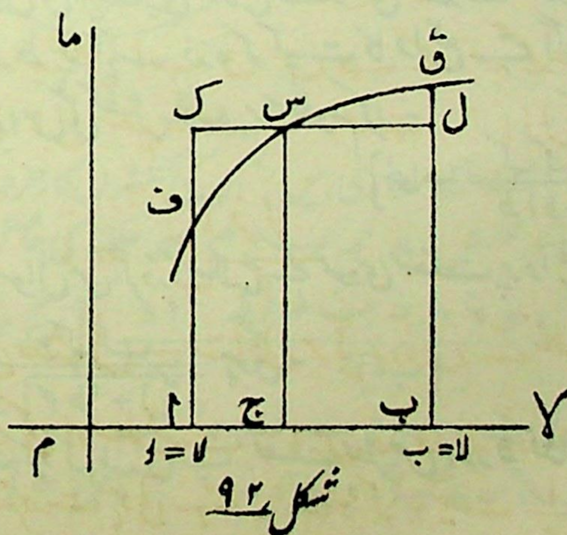
۱۶۱ - کسی تفاعل کی اوسط قیمت

ن اعداد ما۱، ما۲ ..... ما ن کا حسابی اوسط (یا ان کی اوسط قیمت) م̄ا = $\frac{1}{\text{ن}}$ (ما۱ + ما۲ + ... ما ن)

ہم اب تفاعل فہ (لا) کی اوسط قیمت لا = ا سے لے کر لا = ب تک کی تعیین کرنا چاہتے ہیں۔

شکل ۹۲ میں ف س ق کو اس تفاعل کی ترسیم فرض کرو۔

م ا = ا اور م ب = ب



شکل ۹۲

ا ب کو ن مساوی حصوں میں منقسم کرو جن میں سے ہر ایک مف لا کے مساوی ہے۔ اور ان نقاطِ تقسیم پر کے معینوں کو ما۱، ما۲ ..... ما ن سے تعبیر کرو۔ تب

$$\bar{\text{ما}} = \frac{1}{\text{ن}} (\text{ما}_1 + \text{ما}_2 + \ldots\ldots \text{ما}_\text{ن})$$ مطلوبہ اوسط کی تقریبی قیمت ہوگی۔

علامت مساوات کے بائیں جانب کے شمار کنندہ اور نسب نما کو مف لا سے ضرب دو تو چونکہ ن مف لا = ب - ا اس لیے

$$\bar{\text{ما}} = \frac{\text{ما}_1 \text{مف لا} + \text{ما}_2 \text{مف لا} + \ldots\ldots + \text{ما}_\text{ن} \text{مف لا}}{\text{ب} - \text{ا}} \;(\text{تقریباً}) \ldots\ldots\ldots (1)$$

لیکن اس آخری مساوات میں شمار کنندہ رقبہ ا ف س ق ب کے تقریباً مساوی ہے۔

تفاعل ما = فہ (لا) کی اوسط قیمت کی تعریف یہ ہے کہ وہ مساوات (۱) کے بائیں جانب کے جملہ کی انتہا ہے جبکہ ن ← ∞ پس

$\bar{\text{ما}}$ = تفاعل فہ (لا) کی اوسط قیمت لا = ا سے لا = ب تک

$$= \frac{\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{فہ (لا) فرلا}}{\text{ب} - \text{ا}} \ldots\ldots (2)$$

شکل بالا میں فہ (لا) کی اوسط قیمت معین ج س کے مساوی ہے اگر مستطیل ا ب ل ک کا رقبہ شکل ا ب ق س ف کے رقبہ کے مساوی ہے۔

ما کو تفاعل یعنے تابع متغیر لکھنے سے مساوات (۲) ذیل کی صورت اختیار کر لیتی ہے۔

$$\bar{\text{ما}} = \frac{\int_{\text{ا}}^{\text{ب}} \text{ما فرلا}}{\text{ب} - \text{ا}} \ldots\ldots\ldots\ldots (\text{ب})$$

توضیحی مثال ۔ متبادل برقی رؤں کے نظریہ میں

اکثر جب۲ طہ کی اوسط قیمت (مابین حدود طہ = ۰ اور طہ = π) معلوم کرنے کی ضرورت ہوتی ہے۔ بتاؤ کہ یہ قیمت $\frac{1}{2}$ ہے۔

حل - اوسط قیمت = $\frac{\int_{0}^{\pi} \text{جب}^2\,\text{طہ فرطہ}}{\pi - 0} = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}(1 - \text{جم}\,2\,\text{طہ})\ \text{فرطہ}$

$= \frac{1}{4\pi}\int_{0}^{\pi}(1 - \text{جم}\,2\,\text{طہ})\ \text{فر}\,2\,\text{طہ} = \frac{1}{4\pi}\Big[2\,\text{طہ} - \text{جب}\,2\,\text{طہ}\Big]_{0}^{\pi}$

$= \frac{\frac{1}{2}\pi}{\pi} = \frac{1}{2}$

مثالیں

(۱) دائرہ $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = \text{ص}^2$ کے پہلے ربع کے معینوں کی اوسط قیمت دریافت کرو۔

(ا) جبکہ ما کو بطور تفاعل لا ظاہر کیا جاتا ہے [جواب = $\frac{1}{4}\pi$ ص]

اور (ب) جبکہ ما کو بطور تفاعل زاویہ طہ ظاہر کیا جاتا ہے یعنے ما = ص جب طہ

[جواب = $\frac{2\,\text{ص}}{\pi}$]

(نوٹ - اس سے واضح ہے کہ ما کی دو بالکل مختلف قیمتیں حاصل ہوتی ہیں جو متبوع متغیر پر موقوف ہیں جس کے لحاظ سے اوسط قیمت دریافت کی جاتی ہے -)

ثابت کرو کہ

(۲) جب طہ کی اوسط قیمت لا = ۰ اور لا = π کے درمیان $\frac{2}{\pi}$ ہے۔

(۳) سادہ موسیقی حرکت میں (س = ا جم ن و جس میں س = طے شدہ فاصلہ ا اور ن = مستقل اعداد، و = وقت) اوسط توانائی بالفعل بلحاظ وقت ربع مدت دوران کے کسی ضعف کے لیے اعظم توانائی بالفعل کی نصف ہے۔

(۴) ل طول کی ایک پتلی سلاخ کی کثافت اگر لا کے لحاظ سے حسب ضابطہ ثہ = ا + $\frac{\text{لا}^2}{\text{ل}}$ تغیر پذیر ہے جس میں لا = سلاخ کا فاصلہ اس کے ایک سرے سے، تو اس کی اوسط کثافت = ا + $\frac{\text{ل}^2}{3}$

(۵) اوسط افقی ٹپہ ایسے مرمی کا جو ایک اختیاری ارتفاع سے دی ہوئی رفتار کے ساتھ پھینکا جاتا ہے اعظم افقی ٹپہ کا ۰.۶۳۶۶ ہے [اشارہ - ٹپہ = $\frac{2\,\text{ر}^2\ \text{جب طہ جم طہ}}{\text{ج}}$ جس میں ر = رفتار ج = جاذبہ ارض]

سترھواں باب

نامتناہی سلسلے

۱ - جب کئی رقمیں ایک خاص قاعدے یا کلیہ کے تحت یکے بعد دیگرے ترتیب دی جاتی ہیں تو اس ترتیب کو تواتر کہتے ہیں۔

مثلاً $۱ ،\ \frac{۱}{۲} ،\ \frac{۱}{۴} ،\ \frac{۱}{۸} ،\ \frac{۱}{۱۶} \ldots\ldots$

یا $۱ ،\ -لا ،\ \frac{لا^{۲}}{۲} ،\ -\frac{لا^{۳}}{۳} ،\ \frac{لا^{۴}}{۴} ،\ -\frac{لا^{۵}}{۵} \ldots\ldots$

کسی تواتر کی رقموں کے مظہرہ مجموعہ کو سلسلہ کہتے ہیں۔

مثلاً $۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۸} + \frac{۱}{۱۶} + \ldots\ldots$

$$۱ - لا + \frac{لا^{۲}}{۲} - \frac{لا^{۳}}{۳} + \frac{لا^{۴}}{۴} - \frac{لا^{۵}}{۵} + \ldots\ldots$$

اگر کسی سلسلہ کی رقموں کی تعداد محدود ہے تو سلسلہ محدود یا متناہی کہلاتا ہے اور اگر رقموں میں تعداد محدود نہیں ہے تو نامتناہی کہلاتا ہے۔

سلسلہ کی عام یا ن- ویں رقم ایک ایسا جملہ ہے جس میں اس سلسلہ کی مختلف رقموں کی تیاری کا قاعدہ مضمر ہے۔

پہلے سلسلہ کی ن-ویں رقم $\frac{۱}{۲^{ن}}$ ہے اور دوسرے سلسلہ کی (باستثناء ن = ۱)

$\frac{(-لا)^{ن-۱}}{ن-۱}$ ہے۔

یہ پہلا سلسلہ ہندسی سلسلہ کی ایک خاص مثال ہے جس کی ن رقموں کا حاصل مجموعہ ہے:

$$س_ن = ا + ا ر + ا ر^۲ + ا ر^۳ + \ldots\ldots + ا ر^{ن-۱} \ldots\ldots (۱)$$

جس کی قیمت (جیساکہ جبرو مقابلہ کی ابتدائی کتابوں میں بتایا گیا ہے)

$$س_ن = \frac{ا(۱-ر^ن)}{۱-ر} \quad یا \quad \frac{ا(ر^ن-۱)}{ر-۱} \quad ہے$$

پہلا جملہ اس صورت میں لکھا جاتا ہے جبکہ $|ر| < ۱$ اور دوسرا جبکہ $|ر| > ۱$

پہلی صورت میں واضح ہے کہ $نہا_{ن \to \infty} (ر^ن) = ۰$ اور $\therefore نہا_{ن \to \infty} س_ن = \frac{ا}{۱-ر}$

پس اگر $|ر| < ۱$ تو ایک ہندسی سلسلہ کا حاصل مجموعہ $س_ن$ ایک انتہا کو پہنچتا ہے جیسے جیسے کہ سلسلہ کی رقموں کی تعداد نا متناہی بڑھتی جاتی ہے۔ ایسی صورت میں سلسلہ مستدق کہلاتا ہے۔

اگر $|ر| > ۱$ تو ن کے لاانتہا بڑھنے سے $ر^ن$ نا متناہی ہو جاتا ہے۔ اور حاصل مجموعہ $س_ن$ لاانتہا بن جاتا ہے۔ ایسی صورت میں سلسلہ متسع کہلاتا ہے۔

اگر ر = -۱ تو سلسلہ ۱ - ۱ + ۱ - ۱ + ۱ - ۱ ...... ہو جاتا ہے۔ جس میں اگر ن جفت عدد ہے تو حاصل مجموعہ صفر ہے اور اگر ن طاق عدد ہے تو حاصل مجموعہ ۱ ہے۔ ن جیسے جیسے بلا انتہا بڑھتا ہے تو حاصل مجموعہ نہ تو نا متناہی ہوتا اور نہ کسی حد یا انتہا کو پہنچتا ہے۔ ایسے سلسلہ کو اہتزازی کہتے ہیں۔

۲۔ مستدق و متسع سلسلے۔

سلسلہ

$$س_ن = ک_۱ + ک_۲ + ک_۳ + \ldots\ldots + ک_ن$$

میں متغیر $س_ن$ ایک تفاعل ہے ن کا۔ اب اگر سلسلہ کے رقوم کی تعداد (= ن) بلا انتہا بڑھ جائے تو ذیل کی دو صورتوں میں سے ایک صورت پیدا ہوتی ہے:

صورت (۱) $س_ن$ ایک انتہا کو پہنچتا ہے (بالفرض د) جس کو ہم لکھتے ہیں

$$\underset{ن \to \infty}{نہا} س_ن = د \quad (۱)$$

اس صورت میں یہ نامتناہی سلسلہ مستدق کہلاتا ہے اور قیمت د کو پہنچتا ہے۔

صورت (۲) $س_ن$ کسی انتہا کو نہیں پہنچتا۔ ایسے نامتناہی سلسلہ کو متسع کہتے ہیں۔ مثلاً

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + \ldots\ldots$$

یہ پہچاننے کے لیے کہ آیا کوئی سلسلہ مستدق ہے یا متسع ذیل میں چند عام مسئلے بلا ثبوت درج کیے جاتے ہیں:—

مسئلہ (۱) اگر $س_ن$ ایک ایسا متغیر ہے جو ن کے بڑھنے سے ہمیشہ بڑھتا ہے لیکن کبھی کسی معین محدود عدد ا سے زیادہ نہیں ہوتا تو ن جیسے جیسے بلا انتہا بڑھتا ہے $س_ن$ ایک ایسی انتہا کو پہنچیگا جو ا سے زیادہ نہیں ہے۔

توضیحی مثال — ثابت کرو کہ نامتناہی سلسلہ

$$۱ + ۱ + \frac{۱}{\underline{|۲}} + \frac{۱}{\underline{|۳}} + \ldots + \frac{۱}{\underline{|ن}} + \ldots\ldots \quad (۲)$$ مستدق ہے۔

حل - اس سلسلہ کی پہلی رقم کو نظر انداز کر کے اس کو $س_ن$ سے تعبیر کرو
اس کا مقابلہ سلسلہ

$$س'_ن = ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۲^۳} + \dots + \frac{۱}{۲^{ن-۱}}$$ سے کرو۔

فوراً معلوم ہو جائیگا کہ $س_ن < س'_ن$ کیونکہ $\frac{۱}{\underline{|۳}} = \frac{۱}{۳\times۲} < \frac{۱}{۲\times۲}$

اس طرح $\frac{۱}{\underline{|۴}} < \frac{۱}{۲\times۲\times۲}$ وغیرہ

معہذا $س'_ن$ ایک ہندسی سلسلہ ہے جس میں $ر = \frac{۱}{۲}$ پس $س'_ن < ۲$ بلالحاظ اس کے کہ ن کتنا ہی بڑا ہو جائے۔

پس $س_ن$ ایسا متغیر ہے جو ن کے بڑھنے سے ہمیشہ بڑھتا ہے لیکن ۲ سے کم رہتا ہے۔ اس لیے وہ ن کے بلا انتہا بڑھنے سے ایک انتہا کو پہنچتا ہے جو ۲ سے کمتر ہے بدیں وجہ سلسلہ (۲) مستدق ہے اور اس کی قیمت ۳ سے کم ہے۔

طالب علم نے پہچان لیا ہوگا کہ سلسلہ (۲) مستقل و = ۲٫۷۱۸۲۸.... ہے جو طبعی لوکارثموں کا اساس ہے

مسئلہ (۲) اگر $س_ن$ ایسا متغیر ہے کہ وہ گھٹتا جاتا ہے جیسے جیسے ن بڑھتا ہے اور کبھی بھی ایک معین محدود عدد ب سے کمتر نہیں ہوتا ہے تو جیسے جیسے ن بلا انتہا بڑھتا ہے $س_ن$ ایک ایسی انتہا کو پہنچیگا جو ب سے کمتر نہیں ہے۔

مسئلہ (۳) سلسلہ $س_ن = ع_۱ + ع_۲ + ع_۳ + \dots + ع_ن$

میں جیسے جیسے ن نامتناہی ہوتا جاتا ہے $س_ن$ ایک انتہا کو پہنچنے کے لیے لازمی اور کافی شرط یہ ہے کہ

نہیا (سن+ف - سن) = ۰ .... (ا)
ن ← ∞

صحیح عداد ف کی جملہ قیمتوں کے لیے

اگر مسئلہ (۲) میں ف = ۱ لکھا جائے تو شرط یہ ہو جاتی ہے کہ

نہیا (ئن+۱) = ۰ .... (ب)
ن ← ∞

جو مرادف ہے اس کے کہ

نہیا (ئن) = ۰ .... (ج)
ن ← ∞

لیکن یہ شرط لازمی ہوگی کافی نہیں ۔ یعنی اگر کسی سلسلہ کی عام یا ن - ویں رقم ن کے بلا انتہا بڑھ جانے سے صفر کو نہیں پہنچتی ہے تو ہم فوراً پہچان لیتے ہیں کہ یہ سلسلہ متسع ہے ۔ لیکن اگر ن - ویں رقم صفر کو پہنچ جائے تو قطعی طور پر نہیں کہا جا سکتا کہ سلسلہ مستدق ہے ۔ مثلاً موسیقی سلسلہ

۱ + ۱/۲ + ۱/۳ + ۱/۴ + ... + ۱/ن پر غور کیا جائے ۔

اس میں نہیا (ئن) = نہیا (۱/ن) = ۰ یعنے شرط (ج) کی
ن ← ∞ ن ← ∞
تکمیل ہوتی ہے لیکن ہم آئندہ فصل میں بتائینگے کہ یہ سلسلہ متسع ہے ۔

یہ معلوم کرنے کے لیے کہ آیا سلسلہ مستدق ہے یا متسع ہم اب چند خاص خاص آزمائش کے طریقے بیان کرینگے جو متذکرہ بالا مسئلوں سے آسان تر ہیں ۔

۳ - مقابلہ کے ذریعہ آزمائش

استدقاق کا امتحان ۔ فرض کرو کہ

ئ۱ + ئ۲ + ئ۳ + ئ۴ + ... (۱)

مثبت رقموں کا ایک سلسلہ ہے جس کے استدقاق کا امتحان مطلوب ہے ۔

اگر مثبت رقموں کا ایک ایسا سلسلہ جس کے مستدق ہونے کا پہلے ہی سے علم ہے۔ یعنے

$$\text{ل}_1 + \text{ل}_2 + \text{ل}_3 + \text{ل}_4 + \cdots \qquad (۲)$$

دریافت ہو سکتا ہے جس کی رقمیں سلسلہ (۱) کی متناظر رقموں سے کبھی بھی کمتر نہیں ہیں، تو سلسلہ (۱) مستدق ہے اور اس کی قیمت سلسلہ (۲) کی قیمت سے زائد نہیں ہے۔

ثبوت۔ فرض کرو $\text{س}_\text{ن} = \text{ک}_1 + \text{ک}_2 + \text{ک}_3 + \text{ک}_4 + \cdots + \text{ک}_\text{ن}$

اور $\bar{\text{س}}_\text{ن} = \text{ل}_1 + \text{ل}_2 + \text{ل}_3 + \cdots + \text{ل}_\text{ن}$

اور $\lim_{\text{ن}\to\infty} \bar{\text{س}}_\text{ن} = \text{ا}$ تو چونکہ $\bar{\text{س}}_\text{ن} < \text{ا}$ اور $\text{س}_\text{ن} \leqq \bar{\text{س}}_\text{ن}$

اس سے یہ نتیجہ برآمد ہوتا ہے کہ $\text{س}_\text{ن} < \text{ا}$ - پس ۲ کے مسئلہ (۱) سے $\text{س}_\text{ن}$ ایک انتہا کو پہنچتا ہے اور سلسلہ (۱) مستدق ہے اور اس کی قیمت ا سے زائد نہیں ہے۔

توضیحی مثال (۱) دریافت کرو کہ آیا سلسلہ

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^5} + \cdots$$ مستدق ہے۔

حل۔ اس کا مقابلہ ہندسی سلسلہ

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots$$ سے کرو جس کا مستدق ہونا معلوم ہے۔ سلسلہ زیر امتحان کی رقمیں کبھی بھی اس ہندسی سلسلہ کی متناظر رقموں سے کمتر نہیں ہیں۔ پس وہ بھی مستدق ہے۔

اسی طرح اتساع کا بھی امتحان کیا جا سکتا ہے۔ چنانچہ

فرض کرو $\text{ک}_1 + \text{ک}_2 + \text{ک}_3 + \text{ک}_4 + \cdots \qquad (۳)$

مثبت رقموں کا ایک سلسلہ ہے جس کے اتساع کا امتحان مطلوب ہے - اگر

$$ب_1 + ب_2 + ب_3 + ب_4 + \cdots\cdots \quad (۴)$$

مثبت رقموں کا ایک ایسا سلسلہ ہے جس کے اتساع کا پہلے ہی سے علم ہے اور سلسلہ (۳) کی رقمیں کبھی بھی سلسلہ (۴) کی متناظر رقموں سے کمتر نہیں ہیں تو سلسلہ (۳) متسع ہے -

توضیحی مثال (ب) مقابلہ کے ذریعے بتاؤ کہ موسیقی سلسلہ

$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots\cdots$ متسع ہے -

حل - یہ سلسلہ مقابلہ کی سہولت کی خاطر ذیل کی شکل میں لکھا جا سکتا ہے:

$$1 + \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right] + \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right] + \left[\frac{1}{9} + \cdots\cdots + \frac{1}{16}\right] + \cdots\cdots$$

اس کا مقابلہ سلسلہ

$$1 + \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right] + \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right] + \left[\frac{1}{16} + \cdots\cdots + \frac{1}{16}\right] + \cdots\cdots$$

سے کیا جائے تو معلوم ہوگا کہ پہلے سلسلہ کی رقمیں دوسرے سلسلہ کی متناظر رقموں سے کبھی بھی کمتر نہیں ہیں - جس کی قوسین کے اندر کی رقموں کا حاصل جمع ہمیشہ $\frac{1}{2}$ ہے - واضح ہے کہ آخرالذکر سلسلہ کی قیمت رقموں کی تعداد کے بڑھنے سے بلا انتہا بڑھتا چلا جاتا ہے - اس لیے پہلا یعنی موسیقی سلسلہ بھی متسع ہے -

ک - سلسلہ یعنی

$1 + \frac{1}{2^{ک}} + \frac{1}{3^{ک}} + \frac{1}{4^{ک}} + \cdots\cdots$ (۵) کے استدقاق و اتساع کے شرائط -

جب ک > ۱ تو اس سلسلہ کی رقموں کو (پہلی رقم چھوڑ کر) حسب ذیل ترتیب میں جمع کرنے سے

$$\frac{1}{2^{ک}} + \frac{1}{3^{ک}} < \frac{1}{2^{ک}} + \frac{1}{2^{ک}} = \frac{2}{2^{ک}} = \frac{1}{2^{ک-1}}$$

$$\frac{1}{۴^{ک}}+\frac{1}{۵^{ک}}+\frac{1}{۶^{ک}}+\frac{1}{۷^{ک}}<\frac{1}{۴^{ک}}+\frac{1}{۴^{ک}}+\frac{1}{۴^{ک}}+\frac{1}{۴^{ک}}=\frac{۴}{۴^{ک}}=\left(\frac{1}{۲^{ک-۱}}\right)^{۲}$$

$$\frac{1}{۸^{ک}}+\frac{1}{۹^{ک}}+\frac{1}{۱۰^{ک}}+\cdots+\frac{1}{۱۵^{ک}}<\frac{1}{۸^{ک}}+\frac{1}{۸^{ک}}+\frac{1}{۸^{ک}}+\frac{1}{۸^{ک}}+\frac{1}{۸^{ک}}+\frac{1}{۸^{ک}}+\frac{1}{۸^{ک}}+\frac{1}{۸^{ک}}=\frac{۸}{۸^{ک}}=\left(\frac{1}{۲^{ک-۱}}\right)^{۳}$$

اسی طرح دوسری رقموں کے لیے بھی ایسا لکھا جا سکتا ہے۔ اب ذیل کے سلسلہ پر غور کیا جائے :

$$۱+\frac{1}{۲^{ک-۱}}+\left(\frac{1}{۲^{ک-۱}}\right)^{۲}+\left(\frac{1}{۲^{ک-۱}}\right)^{۳}+\cdots\cdots \quad (۶)$$

جب $ک>۱$ تو سلسلہ (۶) ایک ہندسی سلسلہ ہے جس کی مشترک نسبت اکائی سے کمتر ہے اس لیے یہ سلسلہ متدق ہے۔ پس سلسلہ (۵) بھی متدق ہے۔ جب $ک=۱$ تو سلسلہ (۵) موسیقی ہو جاتا ہے جو ہم نے دیکھا متسع ہے۔ جب $ک<۱$ تو پہلی رقم کو چھوڑ کر دیکھیں تو اس کی رقمیں موسیقی سلسلے کی متناظر رقموں سے زیادہ قیمت کی ہونگی۔ پس ایسی صورت میں سلسلہ (۵) متسع ہوگا۔

مثالیں

ثابت کرو کہ

(۱) $\frac{1}{1}+\frac{1}{(\lfloor ۲)^{۲}}+\frac{1}{(\lfloor ۳)^{۲}}+\cdots+\frac{1}{(\lfloor ن)^{۲}}+\cdots$ متدق ہے۔

(۲) $\frac{1}{1}+\frac{1}{\lfloor ۲}+\frac{1}{\lfloor ۳}+\cdots+\frac{1}{\lfloor ن}+\cdots$ متسع ہے۔

(۳) $\frac{۲}{۲\cdot۳\cdot۴}+\frac{۴}{۳\cdot۴\cdot۵}+\frac{۶}{۴\cdot۵\cdot۶}+\cdots+\frac{۲ن}{(ن+۱)(ن+۲)(ن+۳)}+\cdots$ متدق ہے

نوٹ: [۲.۳.۴ سے مراد ۲ مضروب ۳ مضروب ۴]

(۴) $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots\dots + \frac{1}{3^n} + \dots\dots$ متسع ہے۔

(۵) $\frac{1}{2-3} + \frac{1}{2-9} + \frac{1}{2-27} + \dots\dots + \frac{1}{2-3^n} + \dots\dots$ متدق ہے۔

(۶) $\frac{3}{2\cdot3} + \frac{6}{3\cdot4} + \frac{9}{4\cdot5} + \dots\dots + \frac{3n}{(n+1)(n+2)} + \dots\dots$ متسع ہے۔

۷۔ کاوشی (cauchy) کا امتحانی نسبت کے ذریعہ آزمائش کا طریقہ — نامتناہی ہندسی سلسلہ

$a + ar + ar^2 + \dots\dots + ar^n + ar^{n+1} + \dots\dots$

میں دو متصل عام رقموں ar^n اور ar^{n+1} کی نسبت مشترک نسبت ر ہے۔ ہمیں معلوم ہے کہ یہ سلسلہ متدق ہے جبکہ $|r| < 1$ اور دوسری قیمتوں کے لیے متسع ہے۔ اب ہم ایک ایسے امتحان کی تفہیم کرینگے جس کا اطلاق ہر سلسلہ پر ہوسکتا ہے۔

مسئلہ ۱۶ ۔ فرض کرو $u_1 + u_2 + u_3 + \dots\dots + u_n + u_{n+1} + \dots\dots$ (۱)

مثبت رقموں کا ایک نامتناہی سلسلہ ہے۔ اس کی دو عام متصل رقموں کی نسبت

$\frac{u_{n+1}}{u_n}$ امتحانی نسبت کہلاتی ہے۔ اس کی انتہا جبکہ ن لاتناہی کو پہنچ جاتا ہے

$r = \lim_{n \to \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$ ہے

ہم بتائینگے کہ (۱) جب $r < 1$ تو سلسلہ متدق ہے

(۲) جب $r > 1$ تو سلسلہ متسع ہے

اور (۳) جب $r = 1$ تو امتحانی نسبت کے ذریعہ آزمائش ناکامیاب

ثابت ہوتی ہے -

ثبوت - **صورت** (۱) جب سر < ۱ - انتہا کی تعریف کی مدد سے ہم ن کو اتنا بڑا عدد منتخب کر سکتے ہیں (بالفرض ن = م) کہ جب ن ≧ م تو نسبت ک‌ن+۱ / ک‌ن ہمارے حسب مرضی سر سے جس قدر کم مختلف ہونا چاہیں مختلف ہوگی - اور اس لیے ایک کسر واجب ر سے کمتر ہوگی - پس

ک‌م+۱ < ک‌م ر ، ک‌م+۲ < ک‌م+۱ ر < ک‌م ر^۲ ، ک‌م+۳ < ک‌م ر^۳ ..... وغیرہ

اس لیے رقم ک‌م کے بعد سلسلہ (۱) کی ہر ایک رقم ذیل کے ہندسی سلسلہ کی متناظر رقم سے کمتر ہے :

ک‌م ر + ک‌م ر^۲ + ک‌م ر^۳ + ... (۲)

لیکن چونکہ ر < ۱ سلسلہ (۲) اور اس لیے سلسلہ (۱) بھی مستدق ہے ' از روئے ۳ـ (یعنے از روئے آزمایش بذریعہ مقابلہ)

صورت (۲) جب سر > ۱ تو استدلال مندرجہ صورت (۱) ہی سے بتایا جا سکتا ہے کہ سلسلہ (۱) متسع ہے -

صورت (۳) جب سر = ۱ تو سلسلہ یا مستدق ہوگا یا متسع بالفاظ دیگر آزمایش ناکامیاب ثابت ہوتی ہے -

مثلاً ک - سلسلہ ۱ + ۱/۲^ک + ۱/۳^ک + ۱/۴^ک + ... + ۱/ن^ک + ۱/(ن+۱)^ک پر غور کرو -

اس میں امتحانی نسبت ک‌ن+۱ / ک‌ن = (ن / (ن+۱))^ک = (۱ - ۱/(ن+۱))^ک

اور نہا‌ن→∞ (ک‌ن+۱ / ک‌ن) = نہا‌ن→∞ (۱ - ۱/(ن+۱))^ک = (۱)^ک = ۱ (= سر)

پس سر = ۱ بلا لحاظ قیمت ک - لیکن ۳ـ میں ہم نے بتا دیا ہے کہ

جب ک < ۱ تو سلسلہ مستدق ہوتا ہے

اور جب ک ≷ ۱ تو سلسلہ متسع ہوتا ہے

جس سے ظاہر ہے کہ ر کی قیمت اکائی کے مساوی ہو سکتی ہے۔ مستدق سلسلوں کے لیے بھی اور متسع سلسلوں کے لیے۔ یعنے ایسی صورت میں امتحانی نسبت کے ذریعہ آزمایش ناکامیاب ہو جاتی ہے۔ ایسی صورتوں میں دوسرے آزمائشی طریقے استعمال ہوتے ہیں۔ جو اس کتاب کے نصاب سے باہر ہیں۔

یہ بات یاد رکھنی چاہیے کہ کسی سلسلہ کے استدقاق کے لیے نسبت $\frac{ک_{ن+۱}}{ک_ن}$ کا ن کی ہر قیمت کے لیے اکائی سے کمتر ہونا اور کمتر رہنا کافی نہیں ہے۔ شرط یہ ہے کہ $\lim_{ن \to \infty} \frac{ک_{ن+۱}}{ک_ن}$ اکائی سے کمتر ہو۔

کسی سلسلہ کے استدقاق کا جب امتحان کیا جاتا ہے تو (جیسا کہ چند ایک مرتبہ کیا گیا ہے) ہم مجاز ہیں کہ سلسلہ کی رقموں کی ایک محدود تعداد کو نظر انداز کر دیں۔ اس سے سلسلہ کی قیمت متاثر ہوگی لیکن سلسلہ کی انتہا کے وجود پر اس کا کوئی اثر نہ ہوگا۔

۵۔ متبادل سلسلے۔ جس سلسلہ کی رقمیں متبادلاً (یعنی یکے بعد دیگرے) مثبت اور منفی ہوتی ہیں متبادل کہلاتا ہے۔ ایسے سلسلوں سے بکثرت سابقہ پڑتا ہے۔

مسئلہ ۱ اگر $ک_۱ - ک_۲ + ک_۳ - ک_۴ + \ldots\ldots$ ایک متبادل سلسلہ ہے جس کی ہر رقم اس سے پیشتر کی رقم سے عدداً کمتر ہوتی ہے اور اگر $\lim_{ن \to \infty} ک_ن = ۰$ تو وہ سلسلہ مستدق ہوتا ہے۔

ثبوت ۔ جب ن ایک جفت عدد ہے تو سلسلہ کا حاصل جمع $س_ن$

ذیل کی دو شکلوں میں لکھا جا سکتا ہے :-

$$(۱)\quad س_ن = (ک_۱ - ک_۲) + (ک_۳ - ک_۴) + \cdots + (ک_{ن-۱} - ک_ن)$$

$$(۲)\quad س_ن = ک_۱ - (ک_۲ - ک_۳) - \cdots - (ک_{ن-۲} - ک_{ن-۱}) - ک_ن$$

قوسین میں جو جملے لکھے گئے ہیں ان میں سے ہر ایک مثبت ہے پس جبکہ ن جفت قیمتوں میں سے بڑھتا جاتا ہے تو (۱) سے ظاہر ہے کہ $س_ن$ بڑھتا ہے اور (۲) بتاتا ہے کہ $س_ن$ ہمیشہ $ک_۱$ سے کمتر ہے۔ پس ۲ کے مسئلہ (۱) سے $س_ن$ ایک انتہا ل کو پہنچتا ہے۔ لیکن $س_{ن+۱}$ بھی اس انتہا کو پہنچتا ہے اس لیے کہ $س_{ن+۱} = س_ن + ک_{ن+۱}$ اور $\text{نہا}\ ک_{ن+۱} = ۰$ پس جب کہ ن تمام صحیح عددی قیمتوں میں سے بڑھتا ہے تو سلسلہ مستدق ہوتا ہے۔

توضیحی مثال - متبادل سلسلہ $۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \cdots\cdots$ کے استدقاق کا امتحان کرو۔

حل - چونکہ سلسلہ کی ہر رقم عددی قیمت کے لحاظ سے اس سے پیشتر آنے والی رقم سے کمتر ہے اور

$$\text{نہا}_{ن \to \infty} (ک_ن) = \text{نہا}_{ن \to \infty} \left(\frac{۱}{ن}\right) = ۰$$ اس لیے یہ سلسلہ مستدق ہے۔

اس ثبوت سے ذیل کا اہم نتیجہ قابلِ یادداشت ہے :

ایک مستدق متبادل سلسلہ کو کسی رقم کے بعد ختم کر دینے سے جو خطا واقع ہوتی ہے سلسلہ کی متروکہ رقموں میں سے سب سے پہلی رقم کی قیمت سے عدداً زائد نہیں ہوتی۔

۶۔ مطلق استدقاق — جب کسی سلسلہ کی تمام رقمیں مثبت بنا دینے پر بھی وہ مستدق ہوتا ہے تو مطلق یا غیر مشروط مستدق کہلاتا ہے۔ اس کے خلاف دوسرے سلسلے مشروط مستدق

کہلاتے ہیں۔

مثلاً $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \ldots$ مطلق مستدق ہے اس لیے کہ

ع ۳ کی توضیحی مثال (۱)

یعنی $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2}$ مستدق ہے۔

تبادلی سلسلہ $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$ مشروط مستدق ہے اس لیے کہ

موسیقی سلسلہ $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$ متسع ہے۔

پس واضح ہے کہ ایسا سلسلہ جو بعض مثبت اور بعض منفی رقموں پر مشتمل ہے مستدق ہے اگر اس کی تمام علامتوں کو مثبت میں تبدیل کرنے سے جو سلسلہ حاصل ہوتا ہے مستدق ہے۔

مثالیں

مندرجہ ذیل سلسلوں کے مستدق یا متسع ہونے کا امتحان کرو۔

(۱) $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots$ [جواب ر = ۰ اس لیے سلسلہ مستدق ہے]

(۲) $\frac{1!}{10} + \frac{2!}{10^2} + \frac{3!}{10^3} + \ldots$ [جواب ر = ∞ اس لیے سلسلہ متسع ہے]

(۳) $\frac{1}{2\cdot1} + \frac{1}{4\cdot3} + \frac{1}{6\cdot5} + \ldots$ جس میں ۲·۱ = ۱ مضروب ۲ وغیرہ

[اشارۃً ر = ۱ اس لیے امتحانی نسبت کے ذریعہ آزمایش ناکامیاب ہے۔]

لیکن چونکہ ک۔ سلسلہ $۱ + \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۲^۳} + \frac{۱}{۲^۴} + ...$ مستدق ہے اور سلسلہ زیر امتحان کی ہر رقم اس ک۔ سلسلہ کی متناظر رقم سے کمتر ہے اس لیے وہ بھی مستدق ہے]

$$(۴)\quad \frac{۲}{۱} + \frac{۲^۲}{۲} + \frac{۲^۳}{۳} + ... + \frac{۲^{\text{ن}}}{\text{ن}} + ...$$ [جواب = متسع]

$$(۵)\quad \frac{\lfloor ۱}{۳} + \frac{\lfloor ۱}{۳ \cdot ۵} + \frac{\lfloor ۱}{۳ \cdot ۵ \cdot ۷} + ... + \frac{\lfloor \text{ن}}{۳ \cdot ۵ \cdot ۷ ...... (۲\text{ن} + ۱)} + ...$$ [جواب = مستدق]

$$(۶)\quad \frac{۱}{\text{لوک}\,۲} - \frac{۱}{\text{لوک}\,۳} + \frac{۱}{\text{لوک}\,۴} - \frac{۱}{\text{لوک}\,۵} + ...$$ [جواب = مستدق]

ٹ - قوتی سلسلہ (Power Series)

ایسا سلسلہ جس کی رقمیں یک رقمی اور کسی متغیر مثلاً لا کی صعودی صحیح عددی قوتوں پر مشتمل ہوں جیسے

$$\text{ا}_۰ + \text{ا}_۱\,\text{لا} + \text{ا}_۲\,\text{لا}^۲ + \text{ا}_۳\,\text{لا}^۳ + ... \qquad (۱)$$

جس میں سر $\text{ا}_۰$، $\text{ا}_۱$، $\text{ا}_۲$ ...... متغیر لا کے غیر تابع ہوں لا کا قوتی سلسلہ کہلاتا ہے۔ احصا میں ایسے سلسلوں کی بڑی اہمیت ہے۔ لا کا قوتی سلسلہ لا کی جملہ قیمتوں کے لیے مستدق ہو سکتا ہے یا کسی قوت کے لیے نہیں بجز لا = ۰ یا وہ لا کی چند قیمتوں کے لیے جو صفر سے مختلف ہیں مستدق ہو سکتا ہے اور دوسری قیمتوں کے لیے متسع۔ ہم سلسلہ (۱) کا صرف اس صورت میں امتحان کرینگے جبکہ اس کے سر ایسے ہیں کہ

$$\underset{\text{ن} \to \infty}{\text{نہا}} \left(\frac{\text{ا}_{\text{ن}+۱}}{\text{ا}_{\text{ن}}} \right) = \text{ل}$$

جس میں ل ایک معین عدد ہے۔ اس کی وجہ معلوم کرنے کے لیے سلسلہ مندرجۂ بالا یعنی (۱) کی پہلی رقم کو چھوڑ کر کاوشی کی امتحانی نسبت

(مصرحہ ۲) پر تیار کرو ۔

تب $\frac{ر_{ن+1}}{ر_ن} = \frac{ا_{ن+1} لا^{ن+1}}{ا_ن لا^ن} = \frac{ا_{ن+1}}{ا_ن} لا$

پس لا کی کسی معین قیمت کے لیے

$$ر = \lim_{ن \to \infty} \left(\frac{ا_{ن+1}}{ا_ن} لا\right) = لا \lim_{ن \to \infty} \left(\frac{ا_{ن+1}}{ا_ن}\right) = لا ل$$

اب دو صورتیں پیدا ہوتی ہیں :

صورت (۱) اگر ل = ۰ تو سلسلہ لا کی تمام قیمتوں کے لیے متدق ہوگا اس لیے کہ ر = ۰

صورت (۲) اگر ل صفر نہیں ہے تو سلسلہ متدق ہوگا جبکہ لا ل (= ر) اکائی سے عدداً کمتر ہے ۔ یعنی

لا وقفہ (interval) $-\frac{1}{ل} < لا < \frac{1}{ل}$ میں واقع ہے

اور لا کی اس وقفہ سے باہر والی قیمتوں کے لیے متسع ہوگا ۔

اس وقفۂ استدقاق کے سروں کے نقطوں کا علٰحدہ طور پر امتحان کیا جانا چاہیے ۔ کسی دیے ہوئے سلسلہ کے لیے امتحانی نسبت تیار کرلی جانی چاہیے اور ۲ کے ذریعہ وقفۂ استدقاق کی تعیین

توضیحی مثال ۔ سلسلہ $لا + \frac{لا^2}{2} + \frac{لا^3}{3} + \frac{لا^4}{4} + \dots\dots$ کے وقفۂ استدقاق کی تعیین کرو ۔

حل ۔ امتحانی نسبت $= \frac{لا^{ن+1}}{ن+1} \cdot \frac{ن}{لا^ن} = \frac{ن}{ن+1} لا$

اور $\lim_{ن \to \infty} \left|\frac{ن}{ن+1} لا\right| = \lim_{ن \to \infty} \left|\frac{1}{1+\frac{1}{ن}} لا\right| = |لا|$

پس سلسلۂ متدق ہوتا ہے جبکہ $|لا| < 1$ اور متسع جبکہ $|لا| > 1$ ۔ سلسلہ کا

رجحان نہیں معلوم ہو سکتا جبکہ | لا | = ۱ اس لیے کہ ایسی صورت میں امتحانی نسبت سے کوئی مدد نہیں ملتی - پس سلسلہ میں لا = ۱ تعویض کرکے جب اس کا معائنہ کرتے ہیں تو

موسیقی سلسلہ $۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + ...$ دستیاب ہوتا ہے جو

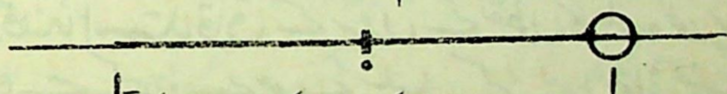
۳ کی توضیحی مثال (ب) میں متسع دریافت ہوا۔

اب لا = -۱ لکھنے سے $- [۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + ...]$ حاصل ہوتا ہے۔

یہ سلسلہ متبادل ہے، اس کی ہر رقم اس کی سابقہ رقم سے عدداً کمتر ہے اور ن۔ ویں رقم کی انتہا جبکہ ن ← ∞ صفر ہے - پس از روئے ۵ وہ متدق ہے۔ سلسلہ کا وقفۂ استدقاق اب مکمل معلوم ہو گیا - اس کو یا تو بذریعہ

$$۱ > لا \geq -۱$$

ظاہر کیا جا سکتا ہے، یا ذیل کی ترسیم کے موٹے خط سے۔



واضح ہو کہ اس ترسیم میں نقطہ لا = ۱ کے گرد ایک دائرہ کھینچا گیا ہے تاکہ یہ بتائے کہ قیمت ۱ وقفۂ استدقاق سے خارج ہے۔

مثالیں

مندرجۂ ذیل سلسلے متغیر کی کن قیمتوں کے لیے متدق ہیں دریافت کرو۔

ترسیماً

(۱) $لا - \frac{لا^{۲}}{۲^{۲}} + \frac{لا^{۳}}{۳^{۲}} - \frac{لا^{۴}}{۴^{۲}} + ...$ [جواب - $۱ \geq لا \geq -۱$ ؛ ترسیم: ۱- ، ۱+]

(۲) $لا - \frac{لا^{۲}}{۲} + \frac{لا^{۳}}{۳} - \frac{لا^{۴}}{۴} + ...$ [جواب - $۱ \geq لا > -۱$ ؛ ترسیم: ۱- ، ۱+]

(۳) لا + لا^۴ + لا^۹ + لا^۱۶ + ... [جواب - ۱ ≥ لا ≥ ۱

(۴) ۱ - لا^۲/۲ + لا^۴/۴ - لا^۶/۶ + ... [جواب لا کی تمام قیمتوں کے لیے

(۵) لا - لا^۳/۳ + لا^۵/۵ - لا^۷/۷ + ... [جواب لا کی تمام قیمتوں کے لیے

(۶) لا + ۱/۲ · لا^۳/۳ + ۱·۳/۲·۴ · لا^۵/۵ + ۱·۳·۵/۲·۴·۶ · لا^۷/۷ + ... [جواب - ۱ ≥ لا ≥ ۱

۸ - سلسلہ ثنائی

یہ اہم سلسلہ ۱ + م لا + م(م-۱)/۱·۲ لا^۲ + م(م-۱)(م-۲)/۱·۲·۳ لا^۳ + ...

+ م(م-۱)(م-۲)....(م-ن+۱)/ن! لا^ن + ... (۱)

ہے جس میں م ایک مستقل ہے -

اگر م ایک مثبت صحیح عدد ہے تو (۱) ایک محدود سلسلہ م + ۱ رقموں کا ہے اس لیے کہ لا^م جس رقم میں شامل ہے اس کے بعد کو آنے والی تمام رقموں میں جزو ضربی (م - م) شمار کنندہ میں موجود ہوگا اور اس لیے وہ سب منعدم ہو جائیں گی - اس صورت میں سلسلہ (۱) نتیجہ ہے (۱ + لا) کو م - ویں قوت تک بلند کرنے کا -

اگر م ایک مثبت صحیح عدد نہ ہو تو سلسلہ نا متناہی ہے -

سلسلہ (۱) کا جب استدقاق کے لیے امتحان کیا جاتا ہے - تو

ی_{ن+۱}/ی_ن = (م-ن+۱)/ن لا = (م+۱/ن - ۱) لا

اور چونکہ نہا_{ن→∞} (م+۱/ن - ۱) = -۱ پس ر = - لا

اس لیے یہ سلسلہ متدق ہے اگر لا عدداً اکائی سے کمتر ہے اور متسع ہے اگر لا عدداً اکائی سے زائد ہے۔ میکلارن کا سلسلہ (جو آئندہ باب کی پہلی فصل میں بیان ہوگا) اپنے اندر حسب ذیل امر مضمر رکھتا ہے۔ یہ فرض کرکے کہ م ایک مثبت صحیح عدد نہیں ہے اور $|لا| < ۱$ ثنائی سلسلہ کی قیمت بعینہ وہی ہے جو $(۱ + لا)^م$ کی ہے۔ یعنے

$$(۱ + لا)^م = ۱ + م\,لا + \frac{م(م-۱)}{۱\cdot۲}\,لا^۲ + \cdots \quad |لا| < ۱ \cdots (۲)$$

اگر م ایک مثبت صحیح عدد ہے تو سلسلہ محدود اور لا کی تمام قیمتوں کے لیے داہنے جانب کے رکن کی قیمت کے مساوی ہے۔ مساوات (۲) خصوصی ثنائی مسئلہ کو ظاہر کرتا ہے۔ ہم یوں بھی لکھ سکتے ہیں۔

$$(ا + ب)^م = ا^م(۱ + لا)^م \quad \text{اگر} \quad لا = \frac{ب}{ا} \cdots\cdots (۳)$$

اسی طرح (۳) کا سیدھے جانب کا رکن بھی ایک قوتی سلسلہ کی شکل میں ظاہر کیا جاسکتا ہے۔

§ ۹ - ایک اور نوع کا قوتی سلسلہ

ہم بارہا شکل ذیل کا سلسلہ استعمال کرینگے:

$$ب_. + ب_۱(لا - ا) + ب_۲(لا - ا)^۲ + \cdots\cdots + ب_ن(لا - ا)^ن + \cdots\cdots \quad (۱)$$

جس میں ا اور سب $ب_.$، $ب_۱$، $ب_۲$ ...... $ب_ن$ مستقل ہیں۔ ایسے سلسلہ کو (لا - ا) میں ایک قوتی سلسلہ کہتے ہیں۔

§ ۶ کی طرح ہم اس سلسلہ (۱) کو امتحانی نسبت کے ذریعہ آزماتے ہیں۔ تب اگر

$$\underset{ن \to \infty}{نہایۃ} \frac{ب_{ن+۱}}{ب_ن} = ہ$$

تو لا کی کسی معین قیمت کے لیے　ر = نہا (ن ← ∞) ک ن+۱ / ک ن = |لا - ۱| ر

اس کی دو صورتیں پیش آتی ہیں

صورت (۱) اگر ر = ۰ تو سلسلہ (۱) لا کی تمام قیمتوں کے لیے متدق ہے۔

صورت (۲) اگر ر صفر نہیں ہے تو سلسلہ (۱) مستدق ہوگا

وقفہ ۱ - ۱/|ر| > لا > ۱ + ۱/|ر| کے لیے۔

لا میں ایک متدق قوتی سلسلہ حسابی عمل کے لیے موزوں ہوتا ہے جبکہ لا صفر نہیں ہے۔ سلسلہ (۱) اگر متدق ہے تو مفید ہوتا ہے جبکہ لا پہلے ہی سے دی ہوئی معین قیمت ۱ کے قریب ہوتا ہے۔

توضیحی مثال ۔ نا متناہی سلسلہ ۱ - (لا - ۱) + (لا - ۱)^۲ / ۲ - (لا - ۱)^۳ / ۳ + ...

کے استدقاق کا امتحان کرو۔

حل ۔ پہلی رقم کو چھوڑ کر نسبت ک ن+۱ / ک ن = - ن/(ن + ۱) (لا - ۱) تیار کرو۔

نہا (ن ← ∞) (ن/(ن + ۱)) = ۱

پس |ر| = |لا - ۱| اور سلسلہ متدق ہوگا جبکہ لا مابین صفر اور ۲ کے واقع ہوگا۔ سرے کا نشان لا = ۲ بھی شامل ہو سکتا ہے۔

مثالیں

ثابت کرو کہ

(۱) ۶۳۰√ کی تقریبی قیمت اعشاریہ کے چھٹے مقام تک صحیح ۲۵۱۰۹۹۸۰۱ ہے

(۲) ۱ / ۱۰۱۰√۳　ایضاً　۱۰۰۶۷۲ء ہے

متغیر کی کن قیمتوں کے لیے مندرجۂ ذیل سلسلے مستدق ہیں ؟

(۳) ۱ - ۲ (لا - ۱) + ۳ (لا - ۱)^۲ - ۴ (لا - ۱)^۳ + ... [جواب = ۰ < لا < ۲]

(۴) ۱ + (لا - ۲) + (لا - ۲)^۲ / ۲^۲ + (لا - ۲)^۳ / ۳^۲ + (لا - ۲)^۴ / ۴^۲ + ... [جواب = ۱ ≦ لا ≦ ۳]

(۵) ۱ + (لا - ۵)^۲ / ⌊۲ - (لا + ۵)^۴ / ⌊۴ + (لا + ۵)^۶ / ⌊۶ + ... [جواب = تمام قیمتوں کے لیے]

اٹھارہواں باب

تفاعلوں کا پھیلاؤ - میکلارن اور ٹیلر کے سلسلے

۱ - اس باب میں بتایا جائیگا کہ کسی تفاعل کو قوتی سلسلہ میں کس طرح ظاہر کیا جا سکتا ہے۔ یا اگر تفاعل کسی اور طرح سے ظاہر کیا گیا ہے تو اس کو قوتی سلسلہ میں کس طرح پھیلایا جا سکتا ہے۔

واضح ہے کہ ایک مستدق قوتی سلسلہ لا میں، وقفہ استدقاق کے اندر کی تمام قیمتوں کے لیے، لا کا تفاعل ہے - پس ہم لکھ سکتے ہیں:

$$\text{ف}(\text{لا}) = \text{ا}_0 + \text{ا}_1\,\text{لا} + \text{ا}_2\,\text{لا}^2 + \cdots\cdots + \text{ا}_\text{ن}\,\text{لا}^\text{ن} + \cdots\cdots \qquad (1)$$

اس لیے اگر کوئی تفاعل قوتی سلسلہ کے ذریعہ ظاہر کیا جاتا ہے تو اس کے سروں ا_0، ا_1، ا_2 …… $\text{ا}_\text{ن}$ کی کیا شکل ہونی چاہیے معلوم کرنے کے لیے یہ عمل کیا جاتا ہے!

(۱) میں لا = ۰ لکھو، تب $\text{ف}(0) = \text{ا}_0 \cdots\cdots\cdots \qquad (2)$

اس طرح (۱) کا پہلا سر دریافت ہو جاتا ہے - اب فرض کرو کہ سلسلہ مندرجہ (۱) رقم بہ رقم تفرق کیا جا سکتا ہے - عملِ تفرق اس طرح بار بار کیے چلے جانے سے

$$\left.\begin{aligned} \text{ف}'(\text{لا}) &= \text{ا}_1 + 2\,\text{ا}_2\,\text{لا} + 3\,\text{ا}_3\,\text{لا}^2 + \cdots\cdots + \text{ن}\,\text{ا}_\text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}-1} + \cdots\cdots \\ \text{ف}''(\text{لا}) &= 2\,\text{ا}_2 + 6\,\text{ا}_3\,\text{لا} + \cdots\cdots + \text{ن}(\text{ن}-1)\,\text{ا}_\text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}-2} + \cdots\cdots \\ \text{ف}'''(\text{لا}) &= 6\,\text{ا}_3 + \cdots\cdots + \text{ن}(\text{ن}-1)(\text{ن}-2)\,\text{ا}_\text{ن}\,\text{لا}^{\text{ن}-3} + \cdots\cdots \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

وغیرہ وغیرہ

اس کے بعد لا = ٠ لکھنے پر حاصل ہوتا ہے -

فَ (٠) = ا۱ ، فً (٠) = ۲! ا۲ ، فٌ (٠) = ۳! ا۳ ، ...... ، ف^(ن) (٠) = ن! ان ...... (۴)

(۴) کو ا۱ ، ا۲ ...... ان وغیرہ کے لیے حل کرنے اور ان کی قیمتوں کو (۱) میں تعویض کرنے سے ، ضابطہ

(۲) ف (لا) = ف (٠) + فَ (٠) لا/۱! + فً (٠) لا²/۲! + ... + ف^(ن) (٠) لا^ن/ن! + ...

برآمد ہوتا ہے جو ف (لا) کو قوتی سلسلہ میں ظاہر کرتا ہے - اس عمل کو ہم کہتے ہیں کہ "ف (لا) کو (لا) کے ایک قوتی سلسلے میں پھیلایا گیا" - یہ ضابطہ یا سلسلہ عام طور پر میکلارن کے نام سے منسوب ہے -

[نوٹ: کولن میکلارن (۱۶۹۸ء تا ۱۷۴۶ء) نے اس سلسلہ کو اپنی کتاب ٹریٹز آف فلکشنز (ایڈنبرا ۱۷۴۲ء) میں شایع کیا - اصل میں اس کا منکشف اسٹرلنگ (۱۶۹۲ء تا ۱۷۷۰ء) ہے]

اب ہم (۲) پر تنقیدی نظر ڈالینگے - دسویں باب کی فصل (   ) متعلق وسیع تر مسئلۂ اوسط قیمت کے نتیجہ (ز) میں ا = ٠ اور ب = لا لکھنے سے

ف (لا) = ف (٠) + فَ (٠) لا/۱! + فً (٠) لا²/۲! + ... + ف^(ن-۱) (٠) لا^(ن-۱)/(ن-۱)! + ب ... (۵)

جس میں ب = ف^(ن) (لا۱) لا^ن/ن!   [٠ < لا۱ < لا]

رقم ب کو ن رقموں کے بعد کا باقی کہتے ہیں - (۵) کا بائیں جانب کا رکن میکلارن کے سلسلہ (۲) سے ن رقموں تک موافق ہے - اگر ہم اس (ن رقموں کے) مجموعہ کو سن سے تعبیر کریں تو (۵)

ف (لا) = سن + ب یا ف (لا) - سن = ب ہو جاتا ہے -

اب فرض کرو کہ ایک معیّن قیمت لا = لا۰ کے لیے ب بطور انتہا صفر کو پہنچتا ہے جبکہ ن لا متناہی ہو جاتا ہے - تب سن بطور انتہا ف (لا۰) کو پہنچیگا - یعنے میکلارن کا سلسلہ (۲) لا = لا۰ کے لیے مستدق ہوگا اور اس کی قیمت ہے ف (لا۰) - پس نتیجہ ذیل حاصل ہوتا ہے:

مسئلہ - سلسلہ (۲) کے مستدق ہونے اور

تفاعل ف (لا) کو تعبیر کرنے کے لیے یہ ضروری اور کافی ہے کہ

ن ← ∞ نہا ب ن = ۰ .... (۶)

عموماً (جیسا کہ سابقہ باب میں کیا گیا) وقفۂ استدقاق کی تعیین آسان تر ہے بہ نسبت وقفۂ شرط مندرجہ (۶) کی تعیین کے لیکن سادہ صورتوں میں دونوں متماثل ہیں۔

واضح ہے کہ کسی تفاعل ف (لا) کو قوتی سلسلہ (۱) کے ذریعہ تعبیر کرنے کے لیے ضروری ہے کہ تفاعل اور اس کے تمام رتبوں کے مشتقات محدود ہوں۔ لیکن یہ کافی نہیں ہے۔

میکلارن کے سلسلے کے ذریعے جن تفاعلوں کی تعبیر نہیں ہو سکتی ان میں لوک لا اور جم لا بطور مثال پیش کیے جا سکتے ہیں اس لیے کہ یہ دونوں نامتناہی ہو جاتے ہیں جبکہ لا صفر ہوتا ہے۔

سلسلہ (۱) کا استعمال عملی حسابوں میں جن میں اعشاریہ کے ایک معین مقام تک حساب کی صحت مطلوب ہے بڑی اہمیت رکھتا ہے۔ واضح ہے کہ اس کے لیے سلسلہ کی رقموں کی کافی تعداد لی جانی چاہیے۔

توضیحی مثال (۱) جم لا کو ایک نامتناہی قوتی سلسلہ کے ذریعہ پھیلاؤ اور دریافت کرو کہ لا کی کن قیمتوں کے لیے یہ سلسلہ مستدق ہوتا ہے۔

حل - پہلے تفرق کرو اور پھر لا = ۰ لکھو۔

ف (لا) = جم لا ∴ ف (۰) = ۱	فَ (لا) = -جب لا ∴ فَ (۰) = ۰
فً (لا) = -جم لا ∴ فً (۰) = -۱	فٗ (لا) = جب لا ∴ فٗ (۰) = ۰
ف$^{(۴)}$ (لا) = جم لا ∴ ف$^{(۴)}$ (۰) = ۱	ف$^{(۵)}$ (لا) = -جب لا ∴ ف$^{(۵)}$ (۰) = ۰
ف$^{(۶)}$ (لا) = -جم لا ∴ ف$^{(۶)}$ (۰) = -۱	ف$^{(۷)}$ (لا) = جب لا ∴ ف$^{(۷)}$ (۰) = ۰
وغیرہ	وغیرہ

ان کو (۱) میں تعویض کرنے سے جم لا = $۱ - \frac{لا^{۲}}{|۲} + \frac{لا^{۴}}{|۴} - \frac{لا^{۶}}{|۶} + \cdots\cdots$

سابقہ باب کی فصل (۷) کی مثال (۵) سے واضح ہے کہ یہ سلسلہ لا کی تمام قیمتوں کے لیے مستدق ہے۔

اس طرح جب لا = $لا - \frac{لا^{۳}}{|۳} + \frac{لا^{۵}}{|۵} - \frac{لا^{۷}}{|۷} + \cdots\cdots$

جو [ازروئے مثال (۶) باب و فصل مذکورۂ بالا] لا کی تمام قیمتوں کے لیے مستدق ہے۔

جم لا اور جب لا کے سلسلوں میں آسانی بنایا جاسکتا ہے کہ جیسے جیسے ن لامتناہی ہوتا ہے باقی ب بطور انتہا صفر کو پہنچتا ہے، لا کی خواہ کوئی معین قیمت ہو۔ چنانچہ

جم لا کے سلسلہ میں ہم ن۔واں مشتق بشکل $ف^{(ن)}(لا) = جم\left(لا + \frac{ن\pi}{۲}\right)$

لکھ سکتے ہیں۔

پس $ب = جم\left(لا_1 + \frac{ن\pi}{۲}\right)\frac{لا^{ن}}{|ن}$ ہے

$جم\left(لا_1 + \frac{ن\pi}{۲}\right)$ کبھی عددی قیمت میں اکائی سے بڑا نہیں ہوتا ہے۔ معہذا ب کا دوسرا جزو ضربی سلسلہ

$لا + \frac{لا^{۲}}{|۲} + \frac{لا^{۳}}{|۳} + \cdots\cdots + \frac{لا^{ن}}{|ن} + \cdots\cdots$ میں ن۔ویں رقم ہے

جو لا کی تمام قیمتوں کے لیے مستدق ہے۔ پس وہ صفر کو پہنچتا ہے جیسے جیسے ن لامتناہی ہوتا ہے۔ پس شرط مندرجہ (۶) پوری ہوتی ہے۔

توضیحی مثال (۲)۔ $ر^{لا}$ کو میکلارن کے سلسلہ کے ذریعہ پھیلاؤ اور بتاؤ کہ وہ کب مستدق ہوتا ہے۔

حل - فرض کرو

ف (لا) = ف (۰) + فَ (۰) $\frac{\text{لا}}{\lfloor 1}$ + فً (۰) $\frac{\text{لا}^2}{\lfloor 2}$ + ... + ف$^{(ن)}$ (۰) $\frac{\text{لا}^{ن}}{\lfloor ن}$ + ...

ف (لا) = ا$^{\text{لا}}$ ∴ ف (۰) = ۱ فَ (لا) = ا$^{\text{لا}}$ لوک ا ∴ فَ (۰) = لوک ا

فً (لا) = ا$^{\text{لا}}$ (لوک ا)^2 ∴ فً (۰) = (لوک ا)^2 فٌ (لا) = ا$^{\text{لا}}$ (لوک ا)^3 ∴ فٌ (۰) = (لوک ا)^3

اور ف$^{(ن)}$ (لا) = ا$^{\text{لا}}$ (لوک ا)^{ن} ∴ ف$^{(ن)}$ (۰) = (لوک ا)^{ن}

پس ا$^{\text{لا}}$ = ۱ + $\frac{(\text{لا لوک ا})}{\lfloor 1}$ + $\frac{(\text{لا لوک ا})^2}{\lfloor 2}$ + ... + $\frac{(\text{لا لوک ا})^{ن}}{\lfloor ن}$ + ...

ن رقموں کے بعد اس سلسلہ کا باقی ب = $\frac{\text{لا}^{ن}}{\lfloor ن}$ (لوک ا)^{ن} ا$^{\text{لا}'}$

ا$^{\text{لا}'}$ چونکہ ا$^{\text{لا}}$ سے کمتر ہے محدود ہے اور ن کی قیمت جب انتہائی بڑی ہوتی ہے تو $\frac{(\text{لا لوک ا})^{ن}}{\lfloor ن}$ نامتناہی چھوٹا ہوتا ہے - پس ن کو کافی بڑا لینے سے باقی ب ناقابلِ لحاظ رہ جاتا ہے اس لیے کہ یہ سلسلہ متدق ہے

[واضح ہو کہ ا کے بجائے اگر و اساس بنایا جائے

و$^{\text{لا}}$ = ۱ + $\frac{\text{لا}}{\lfloor 1}$ + $\frac{\text{لا}^2}{\lfloor 2}$ + ... + $\frac{\text{لا}^{ن}}{\lfloor ن}$ + ...

اور اگر لا = ۱ تو و = ۱ + $\frac{1}{\lfloor 1}$ + $\frac{1}{\lfloor 2}$ + ... + $\frac{1}{\lfloor ن}$ + ... = ۲٫۷۱۸۲۸.....

جیسا کہ جبر و مقابلہ کی کتاب میں بتایا گیا ہے]

توضیحی مثال (۳) لوک$_{و}$ (۱ + لا) کو پھیلاؤ جبکہ -۱ < لا ≥ ۱

حل - ف (لا) = لوک$_{و}$ (۱ + لا) ∴ ف (۰) = لوک$_{و}$ (۱) = ۰

فَ (لا) = ۱ / (۱+لا) ∴ فَ (۰) = ۱

فً (لا) = - ۱ / (۱+لا)^۲ ∴ فً (۰) = -۱

فٌ (لا) = + ۲.۱ / (۱+لا)^۳ ∴ فٌ (۰) = |۲

ف^(ن) (لا) = (-۱)^(ن-۱) |ن-۱ / (۱+لا)^ن ∴ ف^(ن) (۰) = (-۱)^(ن-۱) |ن-۱

پس لوگ (۱+لا) = ۰ + لا/|۱ - ۱ لا^۲/|۲ + |۲ لا^۳/|۳ ..... + (-۱)^(ن-۱) |ن-۱ لا^ن / |ن

= لا - لا^۲/۲ + لا^۳/۳ - لا^۴/۴ + لا^۵/۵ ..... + (-۱)^(ن-۱) لا^ن/ن .....

واضح ہے کہ یہ سلسلہ متدق ہونے کے لیے شرط -۱ < لا ≤ ۱ لازمی ہے۔

توضیحی مثال (۳) میکلارن کے سلسلے ذریعہ لوگ (۱+جب لا) کو لا^۴ والی رقم تک پھیلاؤ۔

حل - ف (لا) = لوگ (۱+جب لا) لکھو۔ تب ف (۰) = ۰

اور فَ (لا) = جم لا / (۱+جب لا) = (۱-جب لا) / جم لا = قط لا - مس لا، پس فَ (۰) = ۱

فً (لا) = قط لا مس - قط^۲ لا = - فَ (لا) قط لا ∴ فً (۰) = -۱

فٌ (لا) = - فً (لا) قط لا - فَ (لا) قط لا مس لا = - فَ (لا) فً (لا)

∴ فٌ (۰) = ۱

ف^(۴) (لا) = - {فً (لا)}^۲ - فَ (لا) فٌ (لا) ∴ ف^(۴) (۰) = -۲

∴ لوگ (۱+جب لا) = لا - لا^۲/۲ + لا^۳/۶ - لا^۴/۱۲ + ...

مثالیں

میکلارن کے سلسلہ کے ذریعہ مندرجہ ذیل پھیلاؤ حاصل کرو اور دریافت کرو کہ متغیر کی کن قیمتوں کے لیے یہ پھیلاؤ متدق ہے:

(۱) $\text{لوک}(1-\text{لا}) = -\text{لا} - \frac{\text{لا}^2}{2} - \frac{\text{لا}^3}{3} - \frac{\text{لا}^4}{4} - \dots - \frac{\text{لا}^{\text{ن}}}{\text{ن}} \dots \quad [-1 \leq \text{لا} < 1]$

(۲) $\text{جب}^{-1}\text{ط} = \text{ط} + \frac{1\,\text{ط}^3}{2\cdot 3} + \frac{1\cdot 3\,\text{ط}^5}{2\cdot 4\cdot 5} + \dots + \frac{1\cdot 3 \dots (2\text{ن}-3)\,\text{ط}^{2\text{ن}-1}}{2\cdot 4 \dots (2\text{ن}-2)(2\text{ن}-1)} + \dots \quad [-1 \leq \text{لا} \leq 1]$

(۳) $\text{مس}^{-1}\text{فہ} = \text{فہ} - \frac{\text{فہ}^3}{3} + \frac{\text{فہ}^5}{5} - \dots + \frac{(-1)^{\text{ن}-1}\,\text{فہ}^{2\text{ن}-1}}{2\text{ن}-1} + \dots \quad [-1 \leq \text{لا} \leq 1]$

(۴) $\text{جب}\left(\frac{\pi}{4} + \text{لا}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 + \text{لا} - \frac{\text{لا}^2}{2!} - \frac{\text{لا}^3}{3!} + \frac{\text{لا}^4}{4!} + \frac{\text{لا}^5}{5!} - \frac{\text{لا}^6}{6!} - \frac{\text{لا}^7}{7!} + \dots\right)$ [تمام قیمتوں کے لیے]

(۵) $\text{لوک}(\text{ک} + \text{لا}) = \text{لوک}\,\text{ک} + \frac{\text{لا}}{\text{ک}} - \frac{\text{لا}^2}{2\text{ک}^2} + \frac{\text{لا}^3}{3\text{ک}^3} - \dots + \frac{(-1)^{\text{ن}-1}\,\text{لا}^{\text{ن}}}{\text{ن}\,\text{ک}^{\text{ن}}} \quad [-1 < \text{لا} \leq 1]$

(۶) مس لا کے پھیلاؤ کی پہلی چار رقمیں $\text{لا} + \frac{\text{لا}^3}{3} + \frac{2\,\text{لا}^5}{15} + \frac{17\,\text{لا}^7}{315}$ ہیں۔

(۷) قط لا ،، ،، ،، ،، $1 + \frac{\text{لا}^2}{2} + \frac{5\,\text{لا}^4}{24} + \frac{61\,\text{لا}^6}{720}$ ہیں۔

(۸) $\text{مس}^{-1}\frac{1}{\text{لا}} = \frac{\pi}{2} - \text{لا} + \frac{\text{لا}^3}{3} - \frac{\text{لا}^5}{5} + \dots\dots$

(۹) $\frac{1}{2}\left(\text{ق}^{\text{لا}} + \text{ق}^{-\text{لا}}\right) = 1 + \frac{\text{لا}^2}{2!} + \frac{\text{لا}^4}{4!} + \frac{\text{لا}^6}{6!} + \dots\dots$

(۱۰) $\text{لوک}\,\text{جم}\,\text{ط} = -\frac{\text{ط}^2}{2} - \frac{\text{لا}^4}{12} - \frac{\text{لا}^6}{45} - \dots\dots$

۲۷۔ نامتناہی سلسلوں کے ساتھ عمل۔

جبر و مقابلہ اور احصاء کے بہت سے عمل مستدق سلسلوں کے ساتھ کیے جا سکتے ہیں۔ بعینہٖ اس طرح جس طرح کہ کثیر رقمی جملوں کے ساتھ۔ اس ضمن میں مندرجۂ ذیل امور بلا ثبوت قلمبند کیے جاتے ہیں: —

فرض کرو $\text{ا}_0 + \text{ا}_1\,\text{لا} + \text{ا}_2\,\text{لا}^2 + \dots\dots \text{ا}_\text{ن}\,\text{لا}^\text{ن}$

اور $\text{ب}_0 + \text{ب}_1\,\text{لا} + \text{ب}_2\,\text{لا}^2 + \dots \text{ب}_\text{ن}\,\text{لا}^\text{ن}$

مستدق فوقی سلسلے ہیں۔ ہم حسبِ ذیل طریقوں سے ایسے نئے مستدق فوقی سلسلے حاصل کر سکتے ہیں:

(۱) رقم بہ رقم جمع (یا تفریق) کرنے سے

$$(\text{ا}_0 \pm \text{ب}_0) + (\text{ا}_1 \pm \text{ب}_1)\,\text{لا} + \dots\dots + (\text{ا}_\text{ن} \pm \text{ب}_\text{ن})\,\text{لا}^\text{ن} + \dots\dots$$

(۲) رقموں کو ضرب دینے اور مرتب کرنے سے

$$\text{ا}_0\text{ب}_0 + (\text{ا}_0\text{ب}_1 + \text{ا}_1\text{ب}_0)\,\text{لا} + (\text{ا}_0\text{ب}_2 + \text{ا}_1\text{ب}_1 + \text{ا}_2\text{ب}_0)\,\text{لا}^2 + \dots\dots$$

توضیحی مثال (۱) لوکارقموں کا حساب۔ سلسلوں

$$\text{لوک}_\text{و}(1+\text{لا}) = \text{لا} - \frac{1}{2}\text{لا}^2 + \frac{1}{3}\text{لا}^3 - \frac{1}{4}\text{لا}^4 + \dots\dots$$

$$\text{لوک}_\text{و}(1-\text{لا}) = -\text{لا} - \frac{1}{2}\text{لا}^2 - \frac{1}{3}\text{لا}^3 - \frac{1}{4}\text{لا}^4 - \dots\dots$$

متناظر رقموں کی باہمی تفریق سے حاصل ہوتا ہے نیا سلسلہ

$$\text{لوک}_\text{و}\frac{1+\text{لا}}{1-\text{لا}} = 2\left(\text{لا} + \frac{1}{3}\text{لا}^3 + \frac{1}{5}\text{لا}^5 + \frac{1}{7}\text{لا}^7 + \dots\dots\right) \quad (1)$$

یہ سلسلہ مستدق ہوتا ہے جبکہ $|\text{لا}| < 1$

(۱) کو حسابی عمل کے لیے موزوں تر شکل میں تبدیل کرنے کی غرض سے فرض کرو م اور ن دو مثبت اعداد ہیں جن میں $\text{م} > \text{ن}$ تب لکھو

$$\text{لا} = \frac{\text{م} - \text{ن}}{\text{م} + \text{ن}} \quad \text{پس} \quad \frac{1 + \text{لا}}{1 - \text{لا}} = \frac{\text{م}}{\text{ن}} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

واضح ہے کہ م اور ن کی تمام مثبت قیمتوں کے لیے لا < ۱

اس طرح

$$\text{لوک}\,\frac{\text{م}}{\text{ن}} = 2\left[\frac{\text{م} - \text{ن}}{\text{م} + \text{ن}} + \frac{1}{3}\left(\frac{\text{م} - \text{ن}}{\text{م} + \text{ن}}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{\text{م} - \text{ن}}{\text{م} + \text{ن}}\right)^5 + \ldots\ldots\right] \ldots \quad (3)$$

یہ سلسلہ م اور ن کی تمام مثبت قیمتوں کے لیے مستدق ہوتا ہے اور حسابی عمل کے لیے بہت موزوں ہے ۔

توضیحی مثال (۲) و^لا جب لا کا قوتی سلسلہ معلوم کرو ۔

حل ۔ چونکہ

$$\text{جب لا} = \text{لا} - \frac{\text{لا}^3}{6} + \frac{\text{لا}^5}{120} - \quad [\text{توضیحی مثال (۱)}]$$

اور

$$\text{و}^{\text{لا}} = 1 + \text{لا} + \frac{\text{لا}^2}{2} + \frac{\text{لا}^3}{6} + \frac{\text{لا}^4}{24} + \frac{\text{لا}^5}{120} + \ldots\ldots \quad [\text{توضیحی مثال (۲)}]$$

ان سلسلوں کو باہم دیگر ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{و}^{\text{لا}}\,\text{جب لا} = \text{لا} + \text{لا}^2 + \frac{\text{لا}^3}{3} - \frac{\text{لا}^5}{30} + \text{رقوم جن میں } \text{لا}^6 \text{ وغیرہ ہیں ۔}$$

(۳) تقسیم کرنے سے ۔ یہاں اس کی ایک خاص صورت بطور مثال پیش کی جاتی ہے ۔

توضیحی مثال (۳) جم لا کے سلسلہ کی مدد سے قط لا کا سلسلہ تیار کرو ۔

حل ۔

$$\text{جم لا} = 1 - \frac{\text{لا}^2}{2!} + \frac{\text{لا}^4}{4!} - \frac{\text{لا}^6}{6!} + \ldots\ldots\ldots$$

چونکہ $\text{قط لا} = \frac{1}{\text{جم لا}}$ اکائی کو مندرجہ بالا سلسلہ پر تقسیم کرنے سے قط لا کا سلسلہ حاصل ہو جاتا ہے ۔ اس کے لیے اچھا طریقہ یہ ہے کہ جم لا = ۱ - ی

لکھا جائے تو

$$ی = \frac{لا^۲}{۲} - \frac{لا^۴}{۲۴} + \frac{لا^۶}{۷۲۰} - \ldots\ldots \quad (۴)$$

$$\text{اور قط لا} = \frac{۱}{۱-ی} = ۱ + ی + ی^۲ + ی^۳ + \ldots \quad \text{اگر } |لا| < ۱ \ldots (۵)$$

پس سلسلہ (۴) سے

$$ی^۲ = \frac{لا^۴}{۴} - \frac{لا^۶}{۲۴} + \text{لا کی بلندتر قوتوں کی رقمیں}$$

$$ی^۳ = \frac{لا^۶}{۸} + \ldots\ldots$$

سلسلہ (۵) میں ان قیمتوں کو تعویض کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔ جواب

$$\text{قط لا} = ۱ + \frac{۱}{۲} لا^۲ + \frac{۵}{۲۴} لا^۴ + \frac{۶۱}{۷۲۰} لا^۶ + \ldots\ldots$$

مثالیں

(۱) لوک ۲ = ۰٫۶۹۳۱۵، لوک ۳ = ۱٫۰۹۸۶۱ دیے جاتے ہیں ان کی مدد سے لوک ۷ اور لوک ۱۱ کو محسوب کرو۔ [جواب لوک ۷ = ۱٫۹۴۵۹۱ ؛ لوک ۱۱ = ۲٫۳۹۷۹۰]

مندرجۂ ذیل سلسلوں کی تصدیق کرو:—

(۲) $\frac{\text{جم ط}}{۱+ط} = ۱ - ط + \frac{ط^۲}{۲} - \frac{ط^۳}{۲} + \frac{۱۳ ط^۴}{۲۴} + \ldots\ldots$

(۳) $و^{-عہ} \text{جب عہ} = عہ - عہ^۲ + \frac{عہ^۳}{۳} - \frac{عہ^۵}{۳۰} + \ldots\ldots$

(۴) $\text{جب}^۲ ط = ط^۲ - \frac{۲ ط^۴}{|\underline{۳}} + \frac{۳۲ ط^۶}{|\underline{۶}} + \ldots\ldots$

(۵) $\frac{و^{لا}}{۱+لا} = ۱ - \frac{لا^۲}{۲} + \frac{لا^۳}{۳} + \frac{۳ لا^۴}{۸} + \ldots\ldots$

(۶) $$\frac{\text{لوک}\,(1+\text{لا})}{\text{جم لا}} = \text{لا} - \frac{\text{لا}^2}{2} + \frac{5\,\text{لا}^3}{6} - \frac{\text{لا}^4}{2} + \cdots\cdots$$

(۷) $$(1-\text{لا})\,\text{جب}^{-1}\text{لا} = \text{لا} - \text{لا}^2 + \frac{\text{لا}^3}{6} - \frac{\text{لا}^4}{6} + \frac{3\,\text{لا}^5}{40} - \frac{3\,\text{لا}^6}{40} + \cdots\cdots$$

(۸) $$(1+\text{لا})\,\text{مس}^{-1}\text{لا} = \text{لا} + \text{لا}^2 - \frac{\text{لا}^3}{3} - \frac{\text{لا}^4}{3} + \frac{\text{لا}^5}{5} + \frac{\text{لا}^6}{5} + \cdots\cdots$$

(۹) $$\text{و}^{\frac{\text{ط}}{2}}\,\text{جب}\,2\text{ط} = 2\text{ط} + \text{ط}^2 - \frac{13\,\text{ط}^3}{12} - \frac{5\,\text{ط}^4}{8} + \cdots\cdots$$

(۱۰) $$\sqrt{1+\text{جب ط}} = 1 + \frac{\text{ط}}{2} - \frac{\text{ط}^2}{2} - \frac{\text{ط}^2}{8} - \frac{\text{ط}^3}{48} + \cdots\cdots$$

۳ - قوتی سلسلوں کا تفرق اور تکمل -

ایک متدق قوتی سلسلہ

$$\text{ا}_0 + \text{ا}_1\,\text{لا} + \text{ا}_2\,\text{لا}^2 + \text{ا}_3\,\text{لا}^3 + \cdots\cdots + \text{ا}_\text{ن}\,\text{لا}^\text{ن} \cdots\cdots \quad (1)$$

رقم برقم اندرون وقفہ استدقاق لا کی کسی قیمت کے لیے تفرق کیا جا سکتا ہے اور اس سے جو سلسلہ حاصل ہوتا ہے وہ بھی متدق ہوتا ہے -

مثلاً سلسلہ $\text{جب لا} = \text{لا} - \frac{\text{لا}^3}{\underline{|3}} + \frac{\text{لا}^5}{\underline{|5}} - \frac{\text{لا}^7}{\underline{|7}} + \cdots\cdots$

کے تفرق سے نیا سلسلہ $\text{جم لا} = 1 - \frac{\text{لا}^2}{\underline{|2}} + \frac{\text{لا}^4}{\underline{|4}} - \frac{\text{لا}^6}{\underline{|6}} + \cdots\cdots$ حاصل ہوتا ہے -

دونوں سلسلے لا کی تمام قیمتوں کے لیے متدق ہیں - جیسا کہ قبل ازیں بیان ہو چکا ہے -

معہذا سلسلہ (۱) تکمل کیا جا سکتا ہے اگر تکمل کے حدود وقفہ استدقاق کے اندر ہوں، اور حاصل شدہ سلسلہ متدق ہوگا -

توضیحی مثال (۱) - تکمل کے ذریعہ $\text{لوک}_\text{و}\,(1+\text{ط})$ کا سلسلہ

دریافت کرو۔

حل۔ چونکہ $\frac{\text{فر}}{\text{فر ط}}$ لوک$_\text{و}$ (۱ + ط) = $\frac{1}{1+\text{ط}}$ ، لوک$_\text{و}$ (۱ + ط) = $\int^{\text{ط}} \frac{\text{فر ط}}{1+\text{ط}}$

لیکن $\frac{1}{1+\text{ط}} = 1 - \text{ط} + \text{ط}^2 - \text{ط}^3 + \text{ط}^4 - \dots\dots\dots$

جبکہ | ط | < ۱ اس کو اوپر کی مساوات میں تعویض کرنے اور رقم بر قم بائیں جانب کے رکن کو تکمل کرنے سے نتیجہ بر آمد ہوتا ہے۔

$$\text{لوک}_\text{و}(1+\text{ط}) = \text{ط} - \frac{1}{2}\text{ط}^2 + \frac{1}{3}\text{ط}^3 - \frac{1}{4}\text{ط}^4 + \dots\dots\dots$$

یہ سلسلہ متدق ہوتا ہے جبکہ | ط | < ۱ جیسا کہ سابقہ باب کی فصل ۲ مثال (۲) سے ظاہر ہے۔

توضیحی مثال (۲)۔ تکمل کے ذریعہ جب$^{-1}$ ط کا قوتی سلسلہ دریافت کرو۔

حل۔ چونکہ $\frac{\text{فر}}{\text{فر ط}}$ جب$^{-1}$ ط = $\frac{1}{\sqrt{1-\text{ط}^2}}$ اس لیے جب$^{-1}$ ط = $\int^{\text{ط}} \frac{\text{فر ط}}{\sqrt{1-\text{ط}^2}}$

م = $-\frac{1}{2}$ اور ی بجائے − ط^2 لکھا جاتا ہے تو سلسلہ ثنائی کی رو سے

$$\frac{1}{\sqrt{1-\text{ط}^2}} = 1 + \frac{1}{2}\text{ط}^2 + \frac{3\cdot1}{4\cdot2}\text{ط}^4 + \frac{5\cdot3\cdot1}{6\cdot4\cdot2}\text{ط}^6 + \dots\dots\dots$$

یہ سلسلہ متدق ہوتا ہے جبکہ | ط | < ۱ اس کو اوپر کی مساوات میں تعویض کرکے رقم بر قم تکمل کرنے سے

$$\text{جب}^{-1}\text{ط} = \text{ط} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\text{ط}^3}{3} + \frac{3\cdot1}{4\cdot2}\cdot\frac{\text{ط}^5}{5} + \frac{5\cdot3\cdot1}{6\cdot4\cdot2}\cdot\frac{\text{ط}^7}{7} + \dots$$ حاصل ہوتا ہے۔ یہ سلسلہ بھی متدق ہوتا ہے جبکہ | ط | < ۱

توضیحی مثال (۳)۔ سلسلہ کے ذریعہ $\int_0^1$ جب لا^2 فرلا کی تقریبی قیمت معلوم کرو۔

حل۔ فرض کرو ی = لا^2 تب جب ی = ی − $\frac{\text{ی}^3}{\lfloor 3}$ + $\frac{\text{ی}^5}{\lfloor 5}$ − ......

پس جب لا^2 = لا^2 − $\frac{\text{لا}^6}{\lfloor 3}$ + $\frac{\text{لا}^{10}}{\lfloor 5}$ ....

اور $\int_0^1 \text{جب لا}^2 \,\text{فرلا} = \int_0^1 \left\{ \text{لا}^2 - \frac{\text{لا}^6}{3!} + \frac{\text{لا}^{10}}{5!} \ldots\ldots \right\}$ تقریباً

$$= \left[\frac{\text{لا}^3}{3} - \frac{\text{لا}^7}{42} + \frac{\text{لا}^{11}}{1320} \right]_0^1 = .333 - .0238 + .0008$$

$= .3103$ جواب

۴۔ ٹیلر کا سلسلہ۔ جس تفاعل کو ایک متدق فوقی سلسلہ لا میں تعبیر کرتا ہے اس کی قیمت محسوب کرنے کے لیے بہت موزوں ہوتا ہے جبکہ لا کی قیمت چھوٹی (قریب صفر) ہوتی ہے۔ اب ہم (لا - ا) کی قوتوں کو پھیلانے کے لیے ایک جملہ اخذ کرینگے جس میں ا ایک معین عدد ہے۔ اس طرح جو سلسلہ حاصل ہوتا ہے اس تفاعل کو جس کی وہ تعبیر کرتا ہے محسوب کرنے کے لیے بہت موزوں ہوتا ہے جبکہ لا کی قیمتیں ا کے قریب ہوتی ہیں۔

فرض کرو کہ

$$\text{ف}(\text{لا}) = \text{ب}_0 + \text{ب}_1(\text{لا}-\text{ا}) + \text{ب}_2(\text{لا}-\text{ا})^2 + \ldots + \text{ب}_\text{ن}(\text{لا}-\text{ا})^\text{ن} \ldots \quad (1)$$

اور یہ سلسلہ اس تفاعل کو تعبیر کرتا ہے۔ سروں ب، ب$_1$ .... ب$_\text{ن}$ کی ضروری شکل جیسا کہ فصل (۱) میں بتایا گیا اس طرح معلوم کرلی جاتی ہے یعنی سلسلہ (۱) کو یہ مان کر کہ وہ تفرق کیا جاسکتا ہے کہ بلحاظ لا کے تفرق کیا جاتا ہے۔ چنانچہ

$$\text{ف}'(\text{لا}) = \text{ب}_1 + 2\,\text{ب}_2(\text{لا}-\text{ا}) + \ldots + \text{ن}\,\text{ب}_\text{ن}(\text{لا}-\text{ا})^{\text{ن}-1} + \ldots$$

$$\text{ف}''(\text{لا}) = 2\,\text{ب}_2 + \ldots\ldots + \text{ن}(\text{ن}-1)(\text{لا}-\text{ا})^{\text{ن}-2} + \ldots$$

وغیرہ وغیرہ

اب لا = ا ان مساواتوں اور سلسلہ (۱) میں تعویض کرکے ب، ب$_1$، ب$_2$ ..... کے لیے حل کرنے سے، حاصل ہوتا ہے:

$$\text{ب}_0 = \text{ف}(\text{ا}),\ \text{ب}_1 = \text{ف}'(\text{ا}),\ \text{ب}_2 = \frac{\text{ف}''(\text{ا})}{2!},\ \ldots\ \text{ب}_\text{ن} = \frac{\text{ف}^{(\text{ن})}(\text{ا})}{\text{ن}!},\ \ldots$$

ان قیمتوں کو سلسلہ (۱) میں درج کرنے سے نتیجہ برآمد ہوتا ہے

$$\text{ف}(\text{لا}) = \text{ف}(\text{ا}) + \text{ف}'(\text{ا})\frac{(\text{لا}-\text{ا})}{\underline{|1}} + \text{ف}''(\text{ا})\frac{(\text{لا}-\text{ا})^{2}}{\underline{|2}} + \dots + \text{ف}^{(\text{ن})}(\text{ا})\frac{(\text{لا}-\text{ا})^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}} + \dots \quad (\text{ب})$$

یہ سلسلہ ٹیلر کا سلسلہ یا مسئلہ کہلاتا ہے۔

[نوٹ - یہ مسئلہ پہلے ڈاکٹر بروک ٹیلر (۱۶۸۵ء - ۱۷۳۱ء) نے اپنی کتاب میتھاڈس انکریمنٹورم مطبوعہ لندن ۱۷۱۵ء میں شایع کیا تھا۔]

اب ہم (ب) پر تنقیدی نظر ڈالینگے۔ دسویں باب کی فصل (۱۰) متعلق وسیع تر مسئلہ اوسط قیمت کے نتیجہ (ز) میں ب = لا لکھنے سے حاصل ہوتا ہے:

$$\text{ف}(\text{لا}) = \text{ف}(\text{ا}) + \text{ف}'(\text{ا})\frac{(\text{لا}-\text{ا})}{\underline{|1}} + \dots + \text{ف}^{(\text{ن}-1)}(\text{ا})\frac{(\text{لا}-\text{ا})^{\text{ن}-1}}{\underline{|\text{ن}-1}} + \text{ب} \dots\dots (2)$$

$$\text{جس میں}\quad \text{ب} = \text{ف}^{(\text{ن})}(\text{لا}_1)\frac{(\text{لا}-\text{ا})^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}} \qquad [\text{ا} < \text{لا}_1 < \text{لا}]$$

رقم ب کو ن رقموں کے بعد کا باقی کہتے ہیں۔

(۲) کے بائیں جانب کا سلسلہ ٹیلر کے سلسلہ (ب) کے ساتھ ن رقموں تک مطابق ہوتا ہے۔ ان رقموں کے حاصل مجموعہ کو $\text{س}_{\text{ن}}$ سے تعبیر کرو تو (۲) سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{ف}(\text{لا}) = \text{س}_{\text{ن}} + \text{ب} \quad \text{یا} \quad \text{ف}(\text{لا}) - \text{س}_{\text{ن}} = \text{ب}$$

اب مانو کہ ایک معیّن قیمت لا = لا. کے لیے باقی ب بطور انتہا صفر کو پہنچتا ہے جبکہ ن لامتناہی ہوتا ہے۔ تب

$$\text{نہا}_{\text{ن}\to\infty}\ \text{س}_{\text{ن}} = \text{ف}(\text{لا}_{.}) \dots\dots\dots\dots (3)$$

اور سلسلہ (ب) مستدق ہوتا ہے لا = لا. کے لیے اور اس کی قیمت ہے ف (لا.)

مسئلہ۔ نامتناھی سلسلہ (ب) تفاعل کو لا کی ان قیمتوں کے لیے اور صرف ان ھی قیمتوں کے لیے تعبیر کرتا ھے جن کے لیے باقی صفر کو پہنچتا ھے جیسے جیسے رقموں کی تعداد بلا انتہا بڑھتی جاتی ھے۔

اگر سلسلہ لا کی ایسی قیمتوں کے لیے متدق ہوتا ہے جن کے لیے باقی صفر کو نہیں پہنچتا جیسے جیسے کہ ن بلا انتہا بڑھتا جاتا ہے تو لا کی ایسی قیمتوں کے لیے سلسلہ تفاعل ف (لا) کو تعبیر نہیں کرتا۔

عام طور پر سلسلہ کا وقفۂ استدقاق دریافت کرلینا زیادہ آسان ہے بہ نسبت باقی کے صفر کو پہنچنے کے وقفہ کے۔ لیکن سادہ صورتوں میں دونوں وقفے متماثل ہیں۔

جب کسی تفاعل اور اس کے متواتر مشتقات کی قیمتیں متغیر کی کسی معین قیمت مثلاً لا = ا کے لیے معلوم اور محدود ہیں تو لا کی ا کے قرب و جوار کی قیمتوں کے لیے سلسلہ (ب) اس تفاعل کی قیمت دریافت کرنے میں استعمال کیا جاتا ہے۔ اور (ب) کو ف (لا) کا پھیلاؤ لا = ا کے قرب و جوار میں بھی کہتے ہیں۔

توضیحی مثال (۱) لوک لا کو (لا - ۱) کی قوتوں میں پھیلاؤ۔

حل۔ ف (لا) = لوک لا ، ∴ ف (۱) = ۰

فَ (لا) = ۱/لا ∴ فَ (۱) = ۱

فً (لا) = - ۱/لا^۲ ∴ فً (۱) = - ۱

فً‍ً (لا) = ۲/لا^۳ ∴ فً‍ً (۱) = ۲ ، وغیرہ ، وغیرہ

ان کو سلسلہ (ب) میں تعویض کرنے سے لوک (لا) = ۰ + ۱ (لا - ۱)/۱! - ۱ (لا - ۱)^۲/۲! + ۲ (لا - ۱)^۳/۳! - ....

= (لا - ۱) - ۱/۲ (لا - ۱)^۲ + ۱/۳ (لا - ۱)^۳ - ....

یہ سلسلہ لا کی صفر اور ۲ کے مابین قیمتوں میں متدق ہوتا ہے اور لوک لا کا لا = ۱ کے قرب وجوار میں پھیلاؤ ہے۔

توضیحی مثال (۲) جم ط کو (ط − $\frac{\pi}{4}$) کی قوتوں میں چار رقموں تک پھیلاؤ۔

حل۔ ف(ط) = جم ط، ف($\frac{\pi}{4}$) = $\frac{1}{\sqrt{2}}$

ف′(ط) = −جب ط، ف′($\frac{\pi}{4}$) = $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

ف″(ط) = −جم ط، ف″($\frac{\pi}{4}$) = $-\frac{1}{\sqrt{2}}$

ف‴(ط) = جب ط، ف‴($\frac{\pi}{4}$) = $\frac{1}{\sqrt{2}}$ وغیرہ وغیرہ

پس سلسلہ جم ط = $\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}$(ط − $\frac{\pi}{4}$) − $\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\frac{(\text{ط} - \frac{\pi}{4})^2}{\underline{|2}}$ + $\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\frac{(\text{ط} - \frac{\pi}{4})^3}{\underline{|3}}$ + ...

= $\frac{1}{\sqrt{2}}$ [۱ − (ط − $\frac{\pi}{4}$) − $\frac{1}{2}$(ط − $\frac{\pi}{4}$)^2 + $\frac{1}{6}$(ا − $\frac{\pi}{4}$)^3 .....]

۵۔ ٹیلر کے سلسلہ کی ایک دوسری شکل۔

اگر سابقہ فصل کے سلسلہ (ب) میں بجائے ل کے لا. لکھیں اور لا − ل = ھ مانیں یعنے لا = ل + ھ = لا. + ھ تو نتیجہ حاصل ہوتا ہے:

ف(لا. + ھ) = ف(لا.) + ف′(لا.) $\frac{\text{ھ}}{\underline{|1}}$ + ف″(لا.) $\frac{\text{ھ}^2}{\underline{|2}}$ + ...

ف$^{(\text{ن})}$(لا.) $\frac{\text{ھ}^{\text{ن}}}{\underline{|\text{ن}}}$ .... (ج)

اس نئی شکل میں ف(لا) کی نئی قیمت، جبکہ لا بدلتا ہے لا. سے لا. + ھ میں، ھ کے ایک قوتی سلسلہ میں پھیلائی جاتی ہے، جو لا کا اضافہ ہے۔

توضیحی مثال۔ لوک (لا. + ھ) کو ٹیلر کے سلسلے کے ذریعہ پھیلاؤ۔

حل۔ ف(لا) = لوک (لا)، فَ(لا) = ۱/لا ، فً(لا) = − ۱/لا²

فًَ(لا) = ۲/لا³ ، ...... ف^(ن)(لا) = (−۱)^(ن−۱) ‏|ن−۱ / لا^ن

پس لوک (لا + ھ) = لوک لا + ھ/لا − ۱/۲ · ھ²/لا² + ۱/۳ · ھ³/لا³ − ۱/۴ · ھ⁴/لا⁴ + ...

مثالیں

مندرجہ ذیل سلسلوں کی ٹیلو کے مسئلہ کے ذریعہ تصدیق کرو:

(۱) جب لا = جب ا + (لا − ا) جم ا − (لا − ا)²/|۲ جب ا − (لا − ا)³/|۳ جم ا + ...

(۲) جم لا = جم ا − (لا − ا) جب ا − (لا − ا)²/|۲ جم ا + (لا − ا)³/|۳ جب ا + ...

(۳) مس (لا + ھ) = مس لا + ھ قط² لا + ھ² قط² لا مس لا + ...

(۴) جب لا کو (لا − π/۴) کی قوتوں میں چار رقموں تک پھیلاؤ۔

[جواب۔ جب لا = ۱/√۲ {۱ + (لا − π/۴) − (لا − π/۴)²/|۲ − (لا − π/۴)³/|۳ + ...}]

(۵) ثابت کرو کہ مس⁻¹ (لا + ھ) = مس⁻¹ لا + ھ جب ی · جب ی/۱ − (ھ جب ی)² · جب ۲ی/۲ + (ھ جب ی)³ · جب ۳ی/۳ − وغیرہ۔ جس میں ی = قم⁻¹ لا

[اشارہ۔ ف (لا) = مس⁻¹ لا = π/۲ − ی اور فر^ن ی / فر لا^ن = (−۱)^ن ‏|ن−۱ جب^ن ی جب ن ی۔]

۶۔ تقریبی ضابطوں کا حصول میکلارن اور ٹیلر کے سلسلوں سے۔

توضیحی مثال (۱) میکلارن کے سلسلہ سے جب لا = لا − لا³/|۳ + لا⁵/|۵ − ....

اگر صرف پہلی رقم تک تقریبی قیمت محسوب کی جائے تو جب لا = لا ......

" " دوسری جب لا = لا - لا^۳/۳!

وغیرہ وغیرہ

پہلی صورت میں باقی ماندہ سلسلہ کی قیمت عدداً اس کی پہلی رقم ۱/۶ لا^۳ سے کمتر ہے- [سابقہ باب ۵]

یعنے جب لا = لا ساتھ |خطا| < |۱/۶ لا^۳|

ہم یہ دریافت کرسکتے ہیں کہ اس صورت میں لا کی کن قیمتوں کے وقفہ یا سعت کے لیے تقریبی قیمت اعشاریہ کے تین مقاموں تک صحیح ہوسکتی ہے-

تب |۱/۶ لا^۳| < ۰٫۰۰۰۵ یعنے |لا| < ∛۰٫۰۰۳ < ۰٫۱۴۴۳ نیم قطری-

پس جب لا = لا اعشاریہ کے تین مقاموں تک صحیح ہے جبکہ لا کی قیمت -۰٫۱۴۴۳ اور +۰٫۱۴۴۳ نیم قطریوں کے درمیان ہے یا بالفاظِ دیگر -۸٫۲° اور +۸٫۲° کے درمیان ہے-

توضیحی مثال (۲) ٹیلر کے سلسلہ سے مس لا کا تقریبی اضافہ دریافت کرو جبکہ لا کی قیمت ۴۵° سے بدل کر ۴۶° ہوتی ہے-

حل- ۵ مثال (۳) کی رو سے

مس (لا + ھ) = مس لا + قط^۲ لا ھ + قط^۲ لا مس لا ھ^۲ + ...

اس مثال میں لا = ۴۵° اور مس ۴۵° = ۱، قط^۲ لا = ۲

معہذا ھ = ۱° یا ۰٫۰۱۷۴۵ نیم قطری

چونکہ ف (لا + ھ) - ف (لا) = فَ (لا) ھ + فً (لا) ھ^۲/۲ + ...

تو بائیں جانب کے رکن کی صرف پہلی رقم لینے سے مس ۴۶° - مس ۴۵° = ۲ (۰٫۰۱۷۴۵) = ۰٫۰۳۴۹

اور .... پہلی دو رقمیں .... = ۰٫۰۳۴۹ + ۲ (۰٫۰۱۷۴۵)^۲

= ۰٫۰۳۵۵

پس اس دوسرے تقریبی حساب سے مس ۴۶° کی قیمت ۱٫۰۳۵۵ برآمد ہوتی ہے

جو اعشاریہ کے چوتھے مقام تک صحیح ہے۔

مثالیں

(۱) تقریبی ضابطہ جم طہ = ۱ - $\frac{\text{طہ}^2}{2}$ میں کس قدر صحت ہے جبکہ (ا) طہ = ۳۰°
(ب) طہ = ۶۰° (ج) طہ = ۹۰° ؟ [جواب (ا) خطا < ۰.۰۰۳۲
(ب) خطا < ۰.۰۵ (ج) خطا < ۰.۲۵

(۲) تقریبی ضابطہ قو$^{-1}$ = ۱ - لا میں کس قدر خطا شامل ہے جبکہ (ا) لا = ۰.۱
(ب) لا = ۰.۰۵ ؟

(۳) ثابت کرو کہ سلسلہ ∫ لوک (۱-لا) فرلا کی تقریبی قیمت
= ج - $\frac{\text{لا}^2}{2}$ - $\frac{\text{لا}^3}{6}$

(۴) تقریبی ضابطہ مس ($\frac{\pi}{4}$ + طہ) = ۱ + ۲ طہ + ۲ طہ^2 کی تصدیق کرو۔
اور اس کی مدد سے مس ۴۶° اور مس ۵۰° محسوب کر کے صحت کا مقابلہ مثلثی جدولوں سے کرو۔

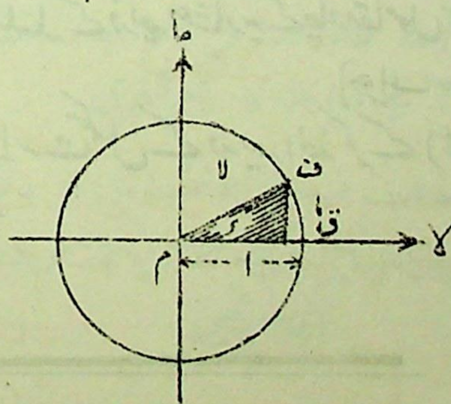
(۵) محدود تکملہ $\int_0^{\frac{1}{2}}$ لا لوک (۱ + لا) فرلا دیا جاتا ہے۔
(ا) اس کی قیمت سلسلہ کے ذریعہ اعشاریہ کے چار مقاموں تک محسوب کرو۔
[جواب = ۰.۰۰۹
(ب) اس کی قیمت راست تکمل کے ذریعہ اخذ کر کے (ا) کی تقریبی قیمت سے اس کا مقابلہ کرو۔

اُنیواں باب

زائدی تفاعلوں کا تفرق اور تکمل

علـ ۔ زائد تفاعلوں کی تعریف اور ان کے چند باہمی رشتے نصاب کی پہلی جلد کے آخری باب میں مختصراً بیان ہو چکے ہیں۔ یہ تفاعل بعض طبیعی اور میکانی مسائل کے حل میں بہت کارآمد ثابت ہوئے ہیں۔ یہاں ان کی ہندسی تعبیر کے بعد ان کے تفرق اور تکمل کے نتائج قلمبند کیے جائینگے۔

دائری اور زائدی تفاعلوں (یا نسبتوں) میں توافق ۔ شکل ۹۳ میں اکائی نصف قطر م ق کا ایک دائرہ جس کی



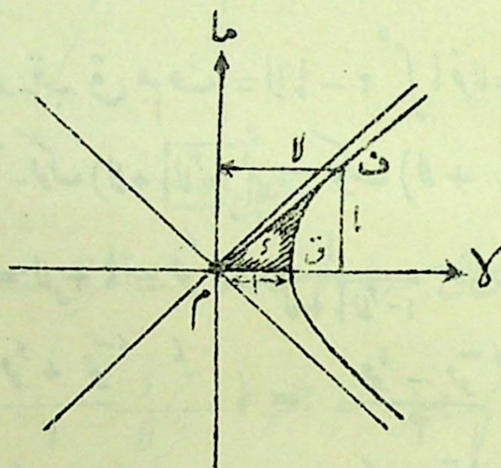
شکل ۹۳

مساوات لا^2 + ما^2 = ۱ ہے کھینچا گیا ہے۔ منحنی کے نقطہ ف (محدد لا، ما)
میں سے ایک سمتی نیم قطر م ف بنایا گیا ہے۔

قطاع دائرہ ق م ف کے رقبہ کا دو چند عدداً زاویہ ی = زاویہ ق م ف کے نیم قطریوں کی تعداد کے مساوی ہے۔ پس اس رقبہ کے دو چند کو، زاویہ ی کی ناپ یا پیمائش تصور کر سکتے ہیں۔ اور

جب ی = ما/م ق = ما، جم ی = لا/م ق = لا، مس ی = جب ی/جم ی = ما/لا، وغیرہ

شکل ۹۴ میں نصف قاطع محور م ق = ۱ کا ایک قائم یا متساوی الاضلاع قطع زائد کھینچا گیا ہے جس کی مساوات لا^2 - ما^2 = ۱ ہے۔



شکل ۹۴

منحنی کے نقطہ ف (محدد لا، ما) میں سے ایک سمتی نیم قطر م ف بنایا گیا ہے۔ توافق کے لحاظ سے زائدی قطاع ق م ف کے رقبہ کے دو چند کو زاویہ ی = زاویہ ق م ف کی ناپ یا پیمائش زائدی سمتی نیم قطروں میں تصور کر سکتے ہیں۔ اور

ی کے زائدی جیب کی تعریف　جبز ی = ما/م ق = ما ہے

ء کے زائدی جیب التمام کی تعریف $\text{جمز ء} = \frac{\text{لا}}{\text{م ق}} = \text{لا}$ سے

اور ء ء زائدی مماس $\text{مسنز ء} = \frac{\text{جبز ء}}{\text{جمز ء}} = \frac{\text{ما}}{\text{لا}}$ سے کی جاتی ہے

ان تفاعلوں یا نسبتوں کے متکافی علی الترتیب قمز ء، قطز ء اور مجز ء ہیں۔ ان کے مقلوب تفاعلوں کی بھی (دائری تفاعلوں) کی طرح تعریف کی جاتی ہے۔

مثلاً $\text{ء} = \text{جبز}^{-1}\,\text{ما} = \text{جمز}^{-1}\,\text{لا} = \text{مسنز}^{-1}\,\frac{\text{ما}}{\text{لا}}$ وغیرہ

زائدی تفاعلوں یا نسبتوں کو زاویہ کی رقموں میں ظاہر کرنے کے لیے یہ کیا جاتا ہے کہ

چونکہ $\text{ء} = \text{دو چند رقبہ ق م ف} = \text{لا ما} - ۲\int_{۱}^{\text{لا}} \text{ما فرلا} = \text{لا ما} - ۲\int_{۱}^{\text{لا}} \sqrt{\text{لا}^۲ - ۱}\;\text{فرلا}$

$= \text{لا ما} - \left\{ \text{لا}\sqrt{\text{لا}^۲-۱} - \text{لوک}\left(\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^۲-۱}\right) \right\} = \text{لوک}\left(\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^۲-۱}\right)$

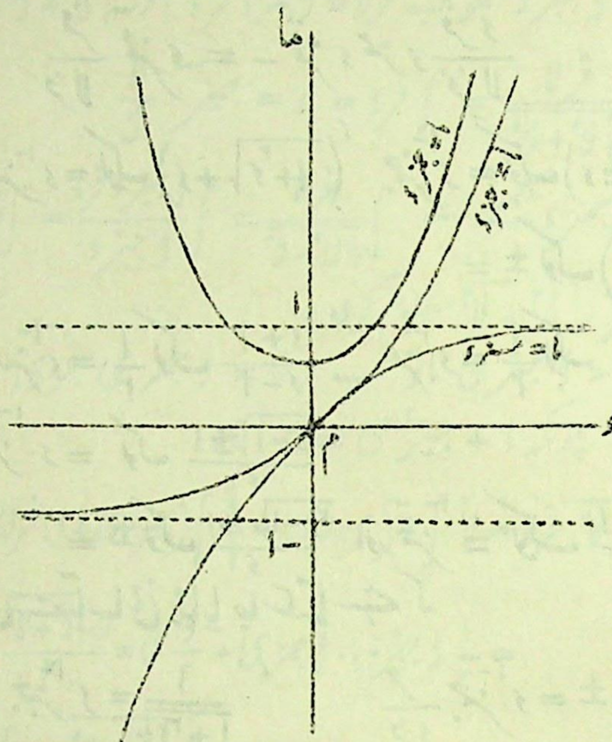
پس $\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^۲-۱} = \text{لا} + \text{ما} = \text{ﻭ}^{\text{ء}}$ اور $\frac{۱}{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^۲-۱}} = \text{لا} - \text{ما} = \text{ﻭ}^{-\text{ء}}$

$\therefore \text{لا} = \frac{\text{ﻭ}^{\text{ء}} + \text{ﻭ}^{-\text{ء}}}{۲}$ ، $\text{ما} = \frac{\text{ﻭ}^{\text{ء}} - \text{ﻭ}^{-\text{ء}}}{۲}$

اس لیے $\text{جبز ء} = \frac{\text{ﻭ}^{\text{ء}} - \text{ﻭ}^{-\text{ء}}}{۲}$ اور $\text{جمز ء} = \frac{\text{ﻭ}^{\text{ء}} + \text{ﻭ}^{-\text{ء}}}{۲}$

آخری دو ضابطوں کے ذریعہ دوسرے زائدی تفاعلوں کی قیمتیں معلوم کر لی جاتی ہیں جیسا پہلی جلد کے آخری باب میں بتایا گیا ہے۔ زائدی تفاعلوں کی جدولیں تیار کی گئی ہیں اور بوقت ضرورت مثلثی نسبتوں کی جدولوں کی طرح حساب میں ان سے استفادہ کیا جا سکتا ہے۔

شکل ۹۵ میں جبز ء، جمز ء اور مسنز ء کی ترسیمیں دی گئی ہیں۔



شکل

زائدی تفاعلوں کی مصرحۂ بالا مساواتوں کے تفرق سے با آسانی بتایا جا سکتا ہے کہ

فر/فر لا جبز ی = جمز ی · فر ی/فر لا

فر/فر لا جمز ی = جبز ی · فر ی/فر لا

فر/فر لا مسز ی = قطز² ی · فر ی/فر لا

فر/فر لا ظمز ی = - قمز² ی · فر ی/فر لا

فر/فر لا قطز ی = - قطز ی مسز ی · فر ی/فر لا

$$\frac{\text{فر}}{\text{فرلا}}\,\text{قمز}\,\text{ی} = -\,\text{قمز}\,\text{ی}\;\text{ممز}\,\text{ی}\,\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$$

اور چونکہ $\text{جبز}^{-1}\text{ی} = \text{لوک}\left(\text{ی} + \sqrt{\text{ی}^2+1}\right)$، $\text{جمز}^{-1}\text{ی} = \text{لوک}\left(\text{ی} \pm \sqrt{\text{ی}^2-1}\right)$

$$= \pm\,\text{لوک}\left(\text{ی} + \sqrt{\text{ی}^2-1}\right)$$

$$\text{مسز}^{-1}\text{ی} = \frac{1}{2}\,\text{لوک}\,\frac{1+\text{ی}}{1-\text{ی}},\quad \text{ممز}^{-1}\text{ی} = \frac{1}{2}\,\text{لوک}\,\frac{\text{ی}+1}{\text{ی}-1}$$

$$\text{قطز}^{-1}\text{ی} = \text{لوک}\,\frac{1 \pm \sqrt{1-\text{ی}^2}}{\text{ی}}$$

$$= \pm\,\text{لوک}\,\frac{1+\sqrt{1-\text{ی}^2}}{\text{ی}} \quad \text{اور}\quad \text{قمز}^{-1} = \text{لوک}\,\frac{1+\sqrt{1+\text{ی}^2}}{\text{ی}}$$

ان کے تفرق سے بآسانی بتایا جاسکتا ہے کہ

$$\frac{\text{فر}}{\text{فری}}\,\text{جبز}^{-1}\text{ی} = \frac{1}{\sqrt{\text{ی}^2+1}},\quad \frac{\text{فر}}{\text{فری}}\,\text{جمز}^{-1}\text{ی} = \pm\frac{1}{\sqrt{\text{ی}^2-1}}$$

$$\frac{\text{فر}}{\text{فری}}\,\text{مسز}^{-1}\text{ی} = \frac{1}{1-\text{ی}^2},\quad \frac{\text{فر}}{\text{فری}}\,\text{ممز}^{-1}\text{ی} = \frac{1}{1-\text{ی}^2}$$

$$\frac{\text{فر}}{\text{فری}}\,\text{قطز}^{-1}\text{ی} = \mp\frac{1}{\text{ی}\sqrt{1-\text{ی}^2}},\quad \frac{\text{فر}}{\text{فری}}\,\text{قمز}^{-1}\text{ی} = -\frac{1}{\text{ی}\sqrt{1+\text{ی}^2}}$$

پس $\int \frac{\text{فری}}{\sqrt{1+\text{ی}^2}} = \text{جبز}^{-1}\text{ی}$، $\int \frac{\text{فری}}{\sqrt{\text{ی}^2-1}} = \text{جمز}^{-1}\text{ی}$

$$\int \frac{\text{فری}}{1-\text{ی}^2} = \text{مسز}^{-1}\text{ی},\quad -\int \frac{\text{فری}}{\text{ی}\sqrt{1-\text{ی}^2}} = \text{قطز}^{-1}\text{ی}$$

$$-\int \frac{\text{فری}}{\text{ی}\sqrt{1+\text{ی}^2}} = \text{قمز}^{-1}\text{ی}$$

توضیحی مثالیں

(۱) $\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}^2+\text{ل}^2}}$ دریافت کرو

حل - $\text{لا} = \text{ا}\ \text{جبز}\ \text{ی}$ لکھو تب $\text{فرلا} = \text{ا}\ \text{جمز}\ \text{ی}\ \text{فری}$ اور $\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ا}^2} = \text{ا}\ \text{جمز}\ \text{ی}$

پس $\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ا}^2}} = \int \text{فری} = \text{ی} = \text{جبز}^{-1} \frac{\text{لا}}{\text{ا}}$

اسی طرح $\text{لا} = \text{ا}\ \text{جمز}\ \text{ی}$ لکھنے سے $\int \frac{\text{فرلا}}{\sqrt{\text{لا}^2 - \text{ا}^2}} = \int \frac{\text{ا}\ \text{جبز}\ \text{ی}\ \text{فری}}{\text{ا}\ \text{جبز}\ \text{ی}} = \int \text{فری} = \text{ی} = \text{جمز}^{-1} \frac{\text{لا}}{\text{ا}}$

(۲) $\int \sqrt{\text{ا}^2 + \text{لا}^2}$ معلوم کرو

حل - $\text{لا} = \text{ا}\ \text{جبز}\ \text{ی}$ مانو تب $\text{فرلا} = \text{ا}\ \text{جمز}\ \text{ی}\ \text{فری}$

اور چونکہ $1 + \text{جبز}^2\ \text{ی} = \text{جمز}^2\ \text{ی}$

$$\therefore \int \sqrt{\text{ا}^2 + \text{لا}^2}\ \text{فرلا} = \text{ا}^2 \int \text{جمز}^2\ \text{ی}\ \text{فری} = \frac{\text{ا}^2}{2} \int (\text{جمز}\ 2\text{ی} + 1)\ \text{فری} = \frac{\text{ا}^2}{4}\ \text{جبز}\ 2\text{ی} + \frac{\text{ا}^2\text{ی}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\ \text{ا}\ \text{جبزی} \cdot \text{ا}\ \text{جمزی} + \frac{\text{ا}^2}{2}\text{ی} = \frac{\text{لا}\sqrt{\text{ا}^2 + \text{لا}^2}}{2} + \frac{\text{ا}^2}{2}\ \text{جبز}^{-1} \frac{\text{لا}}{\text{ا}}$$

یا $\frac{\text{لا}\sqrt{\text{ا}^2 + \text{لا}^2}}{2} + \frac{\text{ا}^2}{2}\ \text{لوک}\ \frac{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^2 + \text{ا}^2}}{\text{ا}}$

(۳) $\int \sqrt{\text{لا}^2 - \text{ا}^2}$ معلوم کرو

حل - $\text{لا} = \text{ا}\ \text{جمزی}$ لکھو۔

تب $\text{فرلا} = \text{ا}\ \text{جبزی}\ \text{فری}$ اور چونکہ $\text{جمز}^2\ \text{ی} - 1 = \text{جبز}^2\ \text{ی}$

$$\int \sqrt{\text{لا}^2 - \text{ا}^2}\ \text{فرلا} = \text{ا}^2 \int \text{جبز}^2\ \text{ی}\ \text{فری} = \frac{\text{ا}^2}{2} \int (\text{جمز}\ 2\text{ی} - 1)\ \text{فری} = \frac{\text{ا}^2}{4}\ \text{جبز}\ 2\text{ی} - \frac{\text{ا}^2\text{ی}}{2}$$

$$= \frac{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^2 - \text{ا}^2}}{2} - \frac{\text{ا}^2}{2}\ \text{جمز}^{-1} \frac{\text{لا}}{\text{ا}}\ \text{یا}\ \frac{\text{لا}\sqrt{\text{لا}^2 - \text{ا}^2}}{2} - \frac{\text{ا}^2}{2}\ \text{لوک}\ \frac{\text{لا} + \sqrt{\text{لا}^2 - \text{ا}^2}}{\text{ا}}$$

مثالیں

(۱) جبز لا کو میکلارن کے سلسلہ کے ذریعہ پھیلاؤ [جواب $= \text{لا} + \frac{\text{لا}^3}{3!} + \frac{\text{لا}^5}{5!} + \ldots$

(۲) جمز لا کو میکلارن کے سلسلہ کے ذریعہ پھیلاؤ [جواب = ۱ + لا^۲ / ۲| + لا^۲ / ۴| + ...

(۳) ثابت کرو کہ ∫ مسنز لا فر لا = لوک جمز لا + ج

(۴) ″ ″ جبز^{-۱} لا = لا − ۱/۲ · لا^۳/۳ + ۱·۳/۲·۴ · لا^۵/۵ − ۱·۳·۵/۲·۴·۶ · لا^۷/۷ + ... [|لا|<۱]

(۵) ″ ″ مسنز^{-۱} لا = لا + لا^۳/۳ + لا^۵/۵ + ...

بیسواں باب

جزوی تفرّق

۱ - متعدد متغیروں کے تفاعل - تسلسل

ابتدائی ریاضی میں بھی ایسے تفاعلوں کی مثالیں بکثرت ملتی ہیں ۔ جیسے

(۱) قایم مخروط کا حجم ح = $\frac{1}{3}$ ${}^{\pi}$ لا^۲ ما دو متبوع متغیروں کا تفاعل ہے لا = دائری قاعدہ کا نصف قطر اور ما = اس کا ارتفاع ۔

(۲) ترچھے مثلث کا رقبہ س = $\frac{1}{2}$ لا ما جب عہ تین متبوع متغیروں کا تفاعل ہے لا اور ما مثلث کے دو ضلعے ہیں اور عہ اُن کا درمیانی زاویہ

رابطہ ی = ف (لا، ما) .... (۱)

کو ایک سطح کے ذریعہ مرتسم کیا جا سکتا ہے ۔ جو مساوات (۱) کا طریق ہے جبکہ لا، ما، ی قائم محدّد تصوّر کیے جاتے ہیں ۔ یہ سطح دو متغیروں لا، ما کے تفاعل ف (لا، ما) کی ترسیم ہے ۔

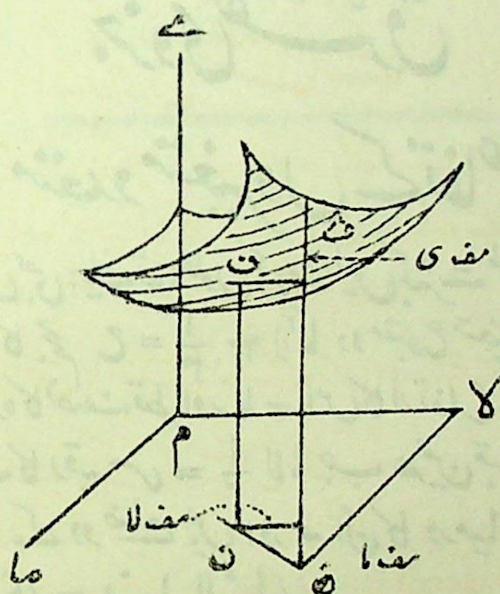
دو متبوع متغیروں لا، ما کے تفاعل ف (لا، ما) کی تعریف کی جاتی ہے کہ وہ لا = ا اور ما = ب کے لیے مسلسل ہے، جبکہ

نہا ف (لا، ما) = ف (ا، ب) .... (۲)
لا ← ا
ما ← ب

لا اور ما اپنی اپنی انتہاؤں ا اور ب کو خواہ کسی بھی طرح پہنچ جائیں ۔

تسلسل کی اس تعریف کو مختصراً ان الفاظ میں ادا کر سکتے ہیں کہ ایک یا دونوں متغیّروں میں اگر ایک بہت ہی خفیف تبدیلی واقع ہو تو اس سے تفاعل کی قیمت میں بھی بہت ہی خفیف تبدیلی پیدا ہوتی ہے۔

شکل ۹۶ میں رابطہ (۱) یعنی ی = ف (لا، ما) کی ہندسی توضیح کی گئی ہے۔سطح مرتسم کے نقطہ ف پر غور کرو جس کا لا = ا اور ما = ب



شکل ۹۶

ان متغیروں کے اضافوں کو مف لا اور مف ما سے نامزد کرو اور تفاعل ی کے متناظر اضافہ کو مف ی سے۔ نقطہ ف کے محدد ہیں۔

لا + مف لا، ما + مف ما، ی + مف ی

ف پر تفاعل کی قیمت ہے

ی = ف (ا، ب) = ف ن

اگر تفاعل ف کے پاس مسلسل ہے تو مف لا اور مف ما خواہ کسی طرح بھی صفر کو بطور انتہا پہنچتے ہیں ۔ مف ی بھی بطور انتہا صفر کو پہنچیگا ۔ یعنے نقطہ فَ نقطہ ف کے پاس سطح کے اوپر خواہ کسی سمت سے بھی پہنچے فَ نَ انطباق کو پہنچیگا ف ن کے ۔

دو سے زائد متغیروں کے مسلسل تفاعل کی تعریف بھی اسی طرح کی جاتی ہے ۔ ہم اس باب میں متغیروں کی صرف اُن قیمتوں پر غور اور بحث کرینگے جن کے لیے تفاعل مسلسل ہوتا ہے ۔

۲ ۔ جُزوی مشتقات ۔ رابطہ ی = ف (لا ، ما)

میں ہم ما کو بدلنے نہ دے کر صرف لا کو بدلنے دے سکتے ہیں ، ایسی صورت میں ی صرف ایک متغیر لا کا تفاعل بن جاتا ہے اور پھر ہم معروف عام طریقہ سے اس کا مشتق حاصل کر سکتے ہیں ۔

ی کے ایسے مشتق کو $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}$ لکھتے ہیں اور کہتے ہیں کہ وہ ی کا جزوی مشتق ہے بلحاظ لا کے جبکہ ما مستقل رکھا جاتا ہے ۔

[نوٹ ۔ یورپ کی کتاب میں اس جزوی مشتق کو $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\text{جف ما}}{\text{جف لا}}$ لکھتے ہیں ۔
اس طریق کتابت کا موجد یہودی مہندس یعقوبی (Karl Gustav Jacobi) ۱۸۰۴ء ۔ ۱۸۵۱ء ہے] ۔

اسی طرح $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}$ = ی کا جزوی مشتق بلحاظ ما جبکہ لا مستقل ہے ۔

تین یا زیادہ متغیروں کے تفاعلوں کے جزوی مشتقات کے لیے ان کے مماثل علامتیں استعمال کی جاتی ہیں ۔ مصرحہ بالا طریق کتابت کے علاوہ اور بھی طریقے عموماً مروج ہیں ۔ چنانچہ

$$\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}\ \text{ف}\ (\text{لا، ما}) = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} = \text{ف}_{\text{لا}}\ (\text{لا، ما}) = \text{ف}_{\text{لا}} = \text{ی}_{\text{لا}}$$

اور $\frac{جف ی}{جف ما} = \frac{جف}{جف ما}$ ف (لا، ما) $= \frac{جف ف}{جف ما} =$ ف$_{ما}$ (لا، ما) = ف$_{ما}$ = ی$_{ما}$

دو سے زیادہ متغیروں کے تفاعلوں کے مشتقات کے لیے ان کے مماثل کتابت کے طریقے مستعمل ہیں۔

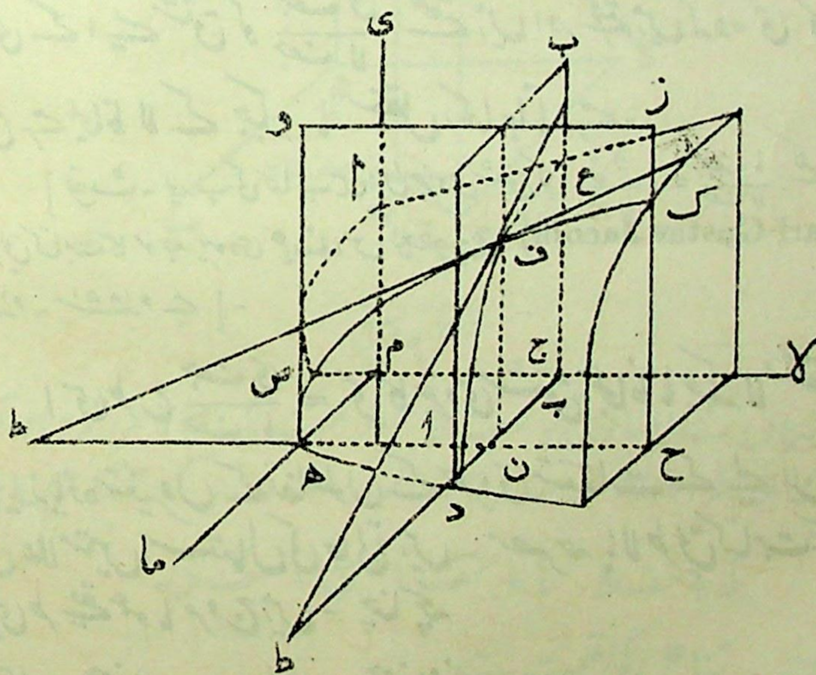
جزوی مشتقات کی ہندسی ترجمانی

فرض کرو کہ شکل ۹۷ کی سطح کی مساوات

ی = ف (لا، ما) ہے

سطح پر کے نقطہ ف میں سے (جہاں لا = ا اور ما = ب) ایک مستوی ﮦ و ز ح مستوی لا م ی کے متوازی کھینچو۔ چونکہ اس مستوی کی مساوات

ما = ب ہے



شکل ۹۷

سطح کے ساتھ اس مستوی کے تقاطع سے جو منحنی ص ف ک بنتا ہے اس کی مساوات

$$\text{ی} = \text{ف} \left(\text{لا}،\ \text{ب} \right)$$ ہوگی

اگر ھ و کو ے کا محور تصور کیا جائے اور ھ ح کو لا کا محور۔ اس مستوی میں $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}$ سے وہی مراد ہوگی جو $\frac{\text{فر ی}}{\text{فر لا}}$ سے ہوتی ہے۔

$\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = \text{مس ن} \widehat{\text{ط}} \text{ف} =$ منحنیِ تقاطع ص ک کی ڈھلان نقطہ ف پر .... (۱)

اس طرح اگر مستوی ب ج د نقطہ ف میں سے مستوی ما م ے کے متوازی کھینچا جائے تو اس کی مساوات ہوگی

$$\text{لا} = \text{ا}$$

اور منحنیِ تقاطع د ف ع کے لیے $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}$ سے مراد وہی ہوگی جو $\frac{\text{فر ی}}{\text{فر ما}}$ سے ہوتی ہے۔ پس

$\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = - \text{مس ن} \widehat{\text{ط}} \text{ف} =$ منحنیِ تقاطع د ع کی ڈھلان نقطہ ف پر... (۲)

توضیحی مثال۔ مجسم ناقص نما $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{ی}^2}{\text{ج}^2} = ۱$ کے منحنیانِ تقاطع کی ڈھلانیں دریافت کرو، (۱) نقطہ لا = د پر جبکہ مستوی ما = ھ مجسم کو قطع کرتا ہے، (۲) نقطہ ما = ز پر جبکہ مستوی لا = و اس کو قطع کرتا ہے۔ دونوں صورتوں میں ی مثبت مانا جائے۔

حل۔ (۱) ما کو مستقل تصور کرنے سے

$$\frac{۲\text{لا}}{\text{ا}^2} + \frac{۲\text{ی}}{\text{ج}^2} \cdot \frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = ۰ \quad \therefore \quad \frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = - \frac{\text{ج}^2}{\text{ا}^2} \cdot \frac{\text{لا}}{\text{ی}}$$

جب لا = د اور ما = ھ تو $\frac{\text{ی}^{۲}}{\text{ج}^{۲}} = \frac{\text{ا}^{۲}\text{ب}^{۲} - \text{ب}^{۲}\text{د}^{۲} - \text{ا}^{۲}\text{ھ}^{۲}}{\text{ا}^{۲}\text{ب}^{۲}}$

$\therefore \text{ی} = \pm \frac{\text{ج}}{\text{اب}} \sqrt{\text{ا}^{۲}\text{ب}^{۲} - \text{ب}^{۲}\text{د}^{۲} - \text{ا}^{۲}\text{ھ}^{۲}}$ اس لیے $\frac{\text{جفی}}{\text{جفلا}} = - \frac{\text{ب ج د}}{\text{ا}\sqrt{\text{ا}^{۲}\text{ب}^{۲} - \text{ب}^{۲}\text{د}^{۲} - \text{ا}^{۲}\text{ھ}^{۲}}}$

(۲) لا کو مستقل تصور کرنے سے

$\frac{۲\,\text{ما}}{\text{ب}^{۲}} + \frac{۲\,\text{ی}}{\text{ج}^{۲}} \cdot \frac{\text{جفی}}{\text{جفما}} = ۰ \quad \therefore \frac{\text{جفی}}{\text{جفما}} = - \frac{\text{ج}^{۲}}{\text{ب}^{۲}} \cdot \frac{\text{ما}}{\text{ی}}$

جب لا = و اور ما = ز تو $\frac{\text{ی}^{۲}}{\text{ج}^{۲}} = \frac{\text{ا}^{۲}\text{ب}^{۲} - \text{ب}^{۲}\text{و}^{۲} - \text{ا}^{۲}\text{ز}^{۲}}{\text{ا}^{۲}\text{ب}^{۲}}$

$\therefore \text{ی} = \pm \frac{\text{ج}}{\text{اب}} \sqrt{\text{ا}^{۲}\text{ب}^{۲} - \text{ب}^{۲}\text{و}^{۲} - \text{ا}^{۲}\text{ز}^{۲}}$ اس لیے $\frac{\text{جفی}}{\text{جفما}} = - \frac{\text{ا ج ز}}{\text{ب}\sqrt{\text{ا}^{۲}\text{ب}^{۲} - \text{ب}^{۲}\text{و}^{۲} - \text{ا}^{۲}\text{ز}^{۲}}}$

مثالیں

ثابت کرو کہ

(۱) اگر $\text{ی} = \text{الا}^{۲} + \text{ب لاما} + \text{ج ما}^{۲} + \text{د لا} + \text{ھ ما} + \text{و}$

تو $\frac{\text{جفی}}{\text{جفلا}} = ۲\,\text{الا} + \text{ب ما} + \text{د}$ اور $\frac{\text{جفی}}{\text{جفما}} = \text{ب لا} + ۲\,\text{ج ما} + \text{ھ}$

(۲) اگر $\text{لا}^{۴} - ۲\,\text{لا}^{۳}\text{ما} + \text{لا}^{۲}\text{ما}^{۲}$ تو $\text{لا} \frac{\text{جفی}}{\text{جفلا}} + \text{ما} \frac{\text{جفی}}{\text{جفما}} = ۴\,\text{ی}$

(۳) اگر $\text{ء} = \frac{\text{لاما}}{\text{لا} + \text{ما}}$ تو $\text{لا} \frac{\text{جفء}}{\text{جفلا}} + \text{ما} \frac{\text{جفء}}{\text{جفما}} = \text{ء}$

(۴) اگر $\text{ء} = \text{لا}^{۲}\text{ما} + \text{ما}^{۲}\text{ی} + \text{ی}^{۲}\text{لا}$ تو $\frac{\text{جفء}}{\text{جفلا}} + \frac{\text{جفء}}{\text{جفما}} + \frac{\text{جفء}}{\text{جفی}} = (\text{لا} + \text{ما} + \text{ی})^{۲}$

(۵) اگر $\text{ء} = \frac{\text{لا}^{۳} - \text{ما}^{۳}}{\text{لاما}}$ تو $\text{لا} \frac{\text{جفء}}{\text{جفلا}} + \text{ما} \frac{\text{جفء}}{\text{جفما}} = \text{ء}$

(۶) مجسم مکافی نمای = $\frac{\text{لا}^2}{۴}$ + ما^2 میں منحنی تقاطع کی ڈھلان معلوم کرو
(ا) نقطہ لا = ۲ پر جبکہ متقاطع مستوی ما = ۱ ہے (ب) نقطہ ما = ۱ پر
جبکہ متقاطع مستوی لا = ۲ ہے۔ [جواب (ا) $\frac{۱}{۲}$ (ب) ۱]
(۷) بتاؤ کہ سطح لا ما ی = ص^۳ کا جب مستوی ما = ۱ سے تقاطع
ہوتا ہے تو نقطہ لا = ۱ پر تقاطع کے منحنی کی ڈھلان -۱ ہے۔

۳- پورا تفرق - دو متغیروں لا، ما کے تفاعل

ی = ف (لا، ما) .... (۱)

میں اگر لا، اور ما کو، علی الترتیب مف لا اور مف ما اضافہ حاصل
ہو اور اس سے ی کا متناظر اضافہ مف ی ہو تو

مف ی = ف (لا + مف لا، ما + مف ما) - ف (لا، ما) ..... (۲)

اور ی کا پورا اضافہ کہلاتا ہے۔
(۲) کے بائیں جانب کے جملہ میں ف (لا، ما + مف ما) جمع اور تفریق
کرنے سے

مف ی = [ف (لا + مف لا، ما + مف ما) - ف (لا، ما + مف ما)]

+ [ف (لا، ما + مف ما) - ف (لا، ما)] .... (۳)
(۳) کے بائیں جانب والے ہر دو تفاوتوں پر باب (۱) کے اوسط قیمت
کے مسئلہ (د) کے اطلاق سے پہلا تفاوت

ف (لا + مف لا، ما + مف ما) - ف (لا، ما + مف ما)

= ف$_{\text{لا}}$ (لا + ط مف لا، ما + مف ما) مف لا .... (۴)
[۱ > ط > ۰، مف لا = مف لا اور چونکہ لا بدلتا ہے جبکہ ما + مف ما مستقل رہتا ہے

اس لیے جزوی مشتق بلحاظ ما حاصل ہوتا ہے]

اور دوسرا تفاوت

ف (لا، ما + مف ما) - ف (لا، ما) = ف٫ (لا، ما + طہ٫ مف ما) مف ما ... (۵)

[۱ = ما، مف ۱ = مف ما، اور چونکہ ما بدلتا ہے جبکہ لا مستقل رہتا ہے، اس لیے جزوی مشتق بلحاظ ما حاصل ہوتا ہے]

(۳) میں، (۴) اور (۵) سے تعویض کرنے سے

مف ی = ف٫ (لا + طہ٫ مف لا، ما + مف ما) مف لا

+ ف٫ (لا، ما + طہ٫ مف ما) مف ما .... (۶)

جس میں طہ٫ اور طہ٫ مثبت کسریں ہیں۔

چونکہ ف٫ (لا، ما) اور ف٫ (لا، ما) متغیروں لا اور ما کے مسلسل تفاعل ہیں (۶) میں مف لا اور مف ما کے سر علی الترتیب ف٫ (لا، ما) اور ف٫ (لا، ما) کو بطور انتہا پہنچینگے جبکہ مف لا اور مف ما بطور مشترک انتہاؤں کے صفر کو پہنچینگے۔ پس اگر صہ اور صہ ایسے صغارئے ہیں کہ

نہا صہ = ۰، نہا صہ = ۰
(مف لا ← ۰، مف ما ← ۰)

ہم لکھ سکتے ہیں ف٫ (لا + طہ٫ مف لا، ما + مف ما) = ف٫ (لا، ما) + صہ ...... (۷)

ف٫ (لا، ما + طہ٫ مف ما) = ف٫ (لا، ما) + صہ ..... (۸)

اور (۷) ہو جاتا ہے

مف ی = ف٫ (لا، ما) مف لا + ف٫ (لا، ما) مف ما + صہ مف لا + صہ مف ما ... (۹)

تب ہم ی کے پورے تفرق (= فری) کی حسب ذیل تعریف کرتے ہیں :

فری = ف٫ (لا، ما) مف لا + ف٫ (لا، ما) مف ما ...... (۱۰)

(۱۰) کے بائیں جانب کا رکن (۹) کے بائیں جانب کے رکن کا اصل حصہ ہے یعنی فری ایک بہت ہی قریب کی قیمت ہے مف ی کی مف لا اور مف ما کی

چھوٹی قیمتوں کے لیے - واضح ہے کہ اگر (۱۰) میں ء = لا تو فرلا = مف لا اور اگر ء = ما تو فرما = مف ما - پس (۱۰) میں مف لا اور مف ما کے لیے ان کے متناظر تفرقے تعویض کرنے سے ذیل کا اہم ضابطہ حاصل ہوتا ہے:

$$\text{فرء} = \text{ف}_{\text{لا}}(\text{لا، ما})\ \text{فرلا} + \text{ف}_{\text{ما}}(\text{لا، ما})\ \text{فرما} = \frac{\text{جف ء}}{\text{جف لا}}\ \text{فرلا} + \frac{\text{جف ء}}{\text{جف ما}}\ \text{فرما}$$

$$= \frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}}\ \text{فرلا} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}\ \text{فرما} \quad \ldots\ldots (\text{ب})$$

اگر ء تین متغیروں کا تفاعل ہو تو اس کا پورا تفرقہ

$$\text{فرء} = \frac{\text{جف ء}}{\text{جف لا}}\ \text{فرلا} + \frac{\text{جف ء}}{\text{جف ما}}\ \text{فرما} + \frac{\text{جف ء}}{\text{جف ی}}\ \text{فری} \quad \ldots\ldots (\text{ج})$$

اسی طرح تین سے زائد خواہ کتنے بھی متغیر ہوں اُن کے تفاعل کا پورا تفرقہ لکھا جا سکتا ہے - ضابطہ (ب) کی ہندسی ترجمانی آئندہ باب میں کی جائیگی -

توضیحی مثال (۱) تفاعل $\text{ء} = \text{لا}^2 - \text{لا ما} + \text{ما}^2$ کے لیے مف ء اور فرء محسوب کرو جبکہ لا = ۴، ما = -۲، مف لا = ۲ء۰، مف ما = -۲ء۰.

حل. $\text{ء} + \text{مف ء} = (\text{لا} + \text{مف لا})^2 - (\text{لا} + \text{مف لا})(\text{ما} + \text{مف ما}) + (\text{ما} + \text{مف ما})^2$

$$= \text{لا}^2 + ۲\ \text{لا مف لا} + (\text{مف لا})^2 - \text{لا ما} - \text{لا مف ما} - \text{ما مف لا} - \text{مف لا مف ما}$$

$$+ \text{ما}^2 + ۲\ \text{ما مف ما} + (\text{مف ما})^2$$

اب اس میں سے $\text{ء} = \text{لا}^2 - \text{لا ما} + \text{ما}^2$ کو تفریق کرنے سے

$$\text{مف ء} = ۲\ \text{لا مف لا} + ۲\ \text{ما مف ما} - \text{لا مف ما} - \text{ما مف لا} - \text{مف لا مف ما}$$
$$+ (\text{مف لا})^2 + (\text{مف ما})^2$$

اس جملہ میں دی ہوئی قیمتیں تعویض کرنے سے مف ء کی قیمت ۲، ۳ء برآمد ہوتی ہے -

$$\text{فرد} = \frac{\text{جف د}}{\text{جف لا}}\,\text{فرلا} + \frac{\text{جف د}}{\text{جف ما}}\,\text{فرما} = (\text{۲لا} - \text{ما})\,\text{فرلا} + (-\text{لا} + \text{۲ما})\,\text{فرما}$$

دی ہوئی قیمتیں تعویض کرنے سے اور یہ یاد رکھکر کہ مف لا = فرلا اور مف ما = فرما
فرد کی قیمت ۶ء۳ برآمد ہوتی ہے۔

توضیحی مثال (۲)۔

$$\text{د} = \text{قط}^{-1}\,\frac{\text{ما}}{\text{لا}}$$ ، فرد دریافت کرو۔

$$\text{فرد} = \frac{\text{جف د}}{\text{جف لا}}\,\text{فرلا} + \frac{\text{جف د}}{\text{جف ما}}\,\text{فرما}$$

$$= \left\{ \frac{1}{\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\sqrt{1-\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)^2}}\;\frac{\text{جف}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)}{\text{جف لا}} \right\}\text{فرلا} + \left\{ \frac{1}{\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\sqrt{1-\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)^2}}\;\frac{\text{جف}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}}\right)}{\text{جف ما}} \right\}\text{فرما}$$

$$= -\left\{ \frac{\text{لا}^2}{\text{ما}\sqrt{\text{ما}^2-\text{لا}^2}}\left(\frac{\text{ما}}{\text{لا}^2}\right) \right\}\text{فرلا} + \left\{ \frac{\text{لا}^2}{\text{ما}\sqrt{\text{ما}^2-\text{لا}^2}}\left(\frac{1}{\text{لا}}\right) \right\}\text{فرما}$$

$$= \frac{\text{لا فرما} - \text{ما فرلا}}{\text{ما}\sqrt{\text{ما}^2 - \text{لا}^2}}$$ جواب

مثالیں

مندرجہ ذیل میں ہر ایک کا پورا تفرق معلوم کرو۔

(۱) $\text{د} = \frac{\text{لا} + \text{ما}}{\text{لا} - \text{ما}}$ 　　[جواب فرد = $\frac{\text{۲ما فرلا} + \text{۲لا فرما}}{(\text{لا} - \text{ما})^2}$

(۲) د = عہ بہ جہ 　　[جواب فرد = بہ جہ فرعہ + جہ عہ فربہ + عہ بہ فرجہ

(۳) سا = فہ جب سہ 　　[جواب فرسا = جب سہ فرفہ + فہ جتب سہ فرسہ

(۴) اگر $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ی}^2 = \text{ر}^2$ تو بتاؤ کہ $\text{فری} = \frac{\text{لا فرلا} + \text{ما فرما}}{\text{ی}}$

(۵) تفاعل ی = مس⁻¹ (ما/لا) تو بتاؤ کہ فری = (لا فرما - ما فرلا)/(لا² + ما²)

۴ - پورے اضافہ کی تقریبی قیمت خفیف خطائیں

ضابطے (ب) اور (ج) اضافہ مف ی کی تقریبی قیمت محسوب کرنے میں استعمال کیے جاتے ہیں۔ معہذا جبکہ لا اور ما کی قیمتیں بذریعہ پیمایش یا تجربہ معلوم کی جاتی ہیں (اور اس لیے ان میں خفیف خطائیں مف لا اور مف ما نقص آلات یا نقص مشاہدہ کی وجہ سے سرایت کر جاتی رہیں) تو اس طرح سے تفاعل ی کی قیمت میں صورت پذیر ہونے والی خطا کی تقریبی قیمت ضابطہ (ب) یا (ج) کے ذریعہ دریافت کر لی جا سکتی ہے۔

توضیحی مثال - ایک ترچھے مستوی مثلث کے ضلعوں کے طول پیمایش سے ۶۰ فٹ اور ۸۰ فٹ دریافت ہوئے اور ان کا درمیانی زاویہ °۶۰۔ لیکن ضلعوں کی پیمایش میں ۰.۱ فٹ اعظم خطا کی گنجائش تھی اور زاویہ کی پیمایش میں ½ درجہ کی - ان پیمایشوں کی مدد سے مثلث کے تیسرے ضلع کا طول محسوب کرنے میں کیا تقریبی اعظم خطا اور فی صدی خطا ہو سکتی ہے معلوم کرو۔

حل - جیب التمام کے کلیہ سے ی² = لا² + ما² - ۲ لا ما جم عہ ...... (۱)

یہاں لا = ۶۰ فٹ ما = ۸۰ فٹ عہ = °۶۰ = π/۳ ، فرلا = فرما = ۰.۱

فرعہ = ۰.۰۰۸۷۳ نیم قطری

(۱) کے جزوی تفرق سے جف ی/جف لا = (لا - ما جم عہ)/ی ، جف ی/جف ما = (ما - لا جم عہ)/ی ،

جف ی/جف عہ = لا ما جب عہ/ی

پس ضابطہ (ج) کی رو سے فری = ((لا - ما جم عہ) فرلا + (ما - لا جم عہ) فرما + لا ما جب عہ فرعہ)/ی

دی ہوئی قیمتیں تعویض کرنے سے فری = (۲ + ۵ + ۳۶.۲۹)/۷۲.۰۱ = ۰.۶ فٹ

∴ فی صدی خطا = $100\,\frac{\text{فری}}{\text{ی}}$ = ۰٫۸ جواب

مثالیں

(۱) دو برقی مزاحمتیں ز_1، ز_2 ہمتوازی جوڑی گئی ہیں۔ ان کی معادل مزاحمت $\text{ز} = \left(\frac{1}{\frac{1}{\text{ز}_1} + \frac{1}{\text{ز}_2}}\right)$ کی حسابی تعیین میں ممکنہ فی صدی خطا دریافت کرو جبکہ ز_1، ز_2 کی پیمایش میں ± ۱ فی صد کی خطا واقع ہوئی ہے۔ [جواب = ۱ فی صد

(۲) جب کوئی جسم حالت سکون سے جاذبہ زمین کے زیرِ اثر گرتا ہے تو اس کا و ثانیوں میں طے کیا ہوا فاصلہ $\text{س} = \frac{1}{2}\,\text{ج}\,\text{و}^2$ و کی قیمت پیمایش سے ۱۰ ثانیے معلوم ہوئی ہے اور اس میں ایک ثانیہ کی خطا کا امکان ہے۔ ج جاذبہ زمین کی تعیین میں ۰٫۱ فی صد خطا ممکن ہے بتاؤ کہ س کے محسوب کرنے میں ممکنہ فی صد خطا ۲۰٫۱ ہے۔

(۳) ایک سطح $\text{ی} = \frac{\text{لا}\,\text{ما}}{\text{لا} + \text{ما}}$ دی گئی ہے۔ اگر نقطہ لا = ما = ۴ پر لا اور ما ہر ایک بقدر $\frac{1}{10}$ بڑھ جائیں تو ثابت کرو کہ ی کی تقریبی تبدیلی + $\frac{1}{20}$ ہے۔

(۴) ایک ٹھوس فلزی مستطیل منشور کے کنارے ۲، ۳ اور ۴ فٹ لمبے ہیں۔ تپش کی زیادتی سے یہ کنارے ۰٫۰۰۱ فٹ فی فٹ فی دقیقہ بڑھتے ہیں۔ بتاؤ کہ ٹھوس مجسم کے حجم میں اضافہ کی شرح ۰٫۰۷۲ مکعب فٹ فی دقیقہ ہے۔

(۵) ایک جسم کی کثافت اضافی ضابطہ $\frac{\text{و}_1}{\text{و}_1 - \text{و}_2}$ کے ذریعہ دریافت کی جاتی ہے۔ جس میں اس کا وزن خلاء میں و_1 ہے اور پانی میں و_2۔ اگر و_1 = ۹ پونڈ اور و_2 = ۵ مشخص ہوئے ہیں اور اول الذکر قیمت کی تعیین میں ۰٫۰۱ پونڈ اعظم خطا اور ثانی الذکر کی تعیین میں ۰٫۰۲ پونڈ اعظم خطا کا امکان ہے تو بتاؤ کہ کثافتِ اضافی محسوب کرنے میں اعظم خطا تقریباً ۰٫۰۱۴۴ ہے۔

۵- پورے مشتقات - شرحیں - اب فرض کرو کہ

د = ف (لا، ما) .... (۱) میں لا اور ما متبوع متغیر نہیں ہیں اور مثال کے طور پر دونوں ایک تیسرے متغیر و کے تفاعل ہیں -

یعنے لا = فہ (و) اور ما = سہ (و) .... (۲)

جب یہ قیمتیں (۱) میں تعویض کی جاتی ہیں تو د ایک ہی متغیر و کا تفاعل بن جاتا ہے - اور اس کے مشتقات طریقۂ معروف سے دریافت ہو سکتے ہیں - چنانچہ

فر د = (فر د / فر و) فر و، فر لا = (فر لا / فر و) فر و، فر ما = (فر ما / فر و) فر و ...... (۳)

ضابطہ (ب) اس مفروضہ پر حاصل کیا گیا تھا کہ لا اور ما متبوع متغیر تھے - اب ہم بتائینگے کہ یہ ضابطہ حالیہ صورت میں بھی درست ہے -

فصل ۳ کے رابطہ (۹) کے جانبین کے ارکان کو مف لا پر تقسیم کرو - طریقہ کتابت تبدیل کر کے اب ہم لکھ سکتے ہیں

(مف د / مف و) = (جف د / جف لا) (مف لا / مف و) + (جف د / جف ما) (مف ما / مف و) + (صہ (مف لا / مف و) + صَہ (مف ما / مف و)) .... (۴)

جبکہ مف و ← ۰، مف لا ← ۰ اور مف ما ← ۰ - پس

نہا صہ = ۰ . نہا صَہ = ۰ .
مف و ← ۰　　　مف و ← ۰

پس جبکہ مف و ← ۰ (۴) ہو جاتا ہے -

(فر د / فر و) = (جف د / جف لا) (فر لا / فر و) + (جف د / جف ما) (فر ما / فر و) .... (د)

جانبین کے ارکان کو فر و سے ضرب دینے اور (۳) کو استعمال کرنے سے ضابطہ (ب) حاصل ہو جاتا ہے - بالفاظِ دیگر ضابطہ (ب) اس صورت میں بھی درست ہے جبکہ لا اور ما ایک تیسرے متغیر

کے تفاعل ہیں۔

اسی طرح اگر د = ف (لا، ما، ی) اور لا، ما، ی سب کے سب و کے تفاعل ہیں تو

$$\frac{\text{فر د}}{\text{فر و}}=\frac{\text{جف د}}{\text{جف لا}}\,\frac{\text{فر لا}}{\text{فر و}}+\frac{\text{جف د}}{\text{جف ما}}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر و}}+\frac{\text{جف د}}{\text{جف ی}}\,\frac{\text{فر ی}}{\text{فر و}}\ \ldots\ldots\ (\text{ه})$$

ایسا ہی تین سے زائد متغیروں کے لیے بھی

(د) میں ہم فرض کر سکتے ہیں کہ و = لا تب ما تفاعل ہے لا کا اور د ایک ہی متغیر لا کا تفاعل ہے۔ جس سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\text{فر د}}{\text{فر لا}}=\frac{\text{جف د}}{\text{جف لا}}+\frac{\text{جف د}}{\text{جف ما}}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\ \ldots\ldots\ldots\ (\text{و})$$

اسی طرح (ه) سے جبکہ ما اور ی دونوں لا کے تفاعل ہیں، حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\text{فر د}}{\text{فر لا}}=\frac{\text{جف د}}{\text{جف لا}}+\frac{\text{جف د}}{\text{جف ما}}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}+\frac{\text{جف د}}{\text{جف ی}}\,\frac{\text{فر ی}}{\text{فر لا}}\ \ldots\ldots\ (\text{ز})$$

یہ بات یاد رکھنی چاہیے کہ $\frac{\text{جف د}}{\text{جف لا}}$ اور $\frac{\text{فر د}}{\text{فر لا}}$ ایک دوسرے سے بالکل مختلف مفہوم رکھتے ہیں۔ جزوی مشتق $\frac{\text{جف د}}{\text{جف لا}}$ اس مفروضہ پر بنتا ہے کہ مخصوص متغیر لا ہی اکیلا بدلتا ہے۔ باقی دوسرے تمام متغیر بدلنے نہیں دیے جاتے لیکن

$$\frac{\text{فر د}}{\text{فر لا}}=\underset{\text{مف لا}\to 0}{\text{نہا}}\left(\frac{\text{مف د}}{\text{مف لا}}\right)$$

جس میں مف لا پورا مشتق ہے د کا تمام متغیروں کی تبدیلیوں کی وجہ سے جو متبوع متغیر میں مف لا تبدیلی کے باعث پیدا ہوتی ہیں۔ جزوی مشتقات سے امتیاز کی خاطر $\frac{\text{فر د}}{\text{فر و}}$، $\frac{\text{فر د}}{\text{فر لا}}$ پورے مشتق کہلاتے ہیں علی الترتیب بلحاظ و اور لا کے

یہ جاننا چاہیے کہ $\frac{\text{جف د}}{\text{جف لا}}$ کسی بھی نقطہ (لا، ما) کے لیے ایک بالکلیہ معین محدود

قیمت رکھتا ہے۔ لیکن $\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$ نہ صرف نقطہ (لا، ما) کے تابع ہے بلکہ اس خاص سمت کے بھی جو اس نقطہ تک پہنچنے کے لیے منتخب کی جاتی ہے۔

توضیحی مثال - ی = قو^لا (ما - ی)، ما = اجب لا، ی = جم لا دیے جاتے ہیں، $\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$ دریافت کرو۔

حل - $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}$ = ا قو^لا (ما - ی)، $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}}$ = قو^لا، $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ی}}$ = - قو^لا،

$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ = ا جم لا، $\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$ = - جب لا - ان کو ضابطہ (ن) میں تعویض کرنے سے

$\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}}$ = ا قو^لا (ما - ی) + ا قو^لا جم لا + قو^لا جب لا = قو^لا ($ا^۲$ + ۱) جب لا = جواب

۹ - تضمینی تفاعلوں کا تفرق -

مساوات ف (لا، ما) = ۰ .... (۱) لا کی بحیثیت تفاعل ما یا ما کی بحیثیت تفاعل لا تعریف کرتی ہے۔ لا اور ما کی اس مساوات میں تمام رقمیں ایک ہی جانب منتقل کردی گئی ہوتی ہیں۔

فرض کرو

ی = ف (لا، ما) .... (۲)

تب ضابطہ (و) سے $\frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$

اور ما، لا کا ایک اختیاری تفاعل ہے۔ اب فرض کرو ما، لا کا وہ تفاعل ہے جو (۱) کی شرط کو پوری کرتا ہے

تب د = ۰ اور فرد = ۰ اور اس لیے

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۰ \quad .... \quad (۳)$$

پس

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = - \frac{\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}}}{\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}} \quad ..... \quad \left[\frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} \neq ۰\right] \quad ..... \quad (\text{ح})$$

اس ضابطہ کے ذریعہ تضمینی تفاعلوں کا سہولت کے ساتھ تفرق عمل میں آسکتا ہے۔

توضیحی مثال ۔ ضابطہ (ح) کے ذریعہ $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ معلوم کرو جبکہ

$$\text{لا}^{۳} - \text{لا}^{۲}\,\text{ما} + \text{لا}\,\text{ما}^{۲} + \text{ما}^{۳} = ۰$$

حل -

$$\frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}} = ۳\,\text{لا}^{۲} - ۲\,\text{لا ما} + \text{ما}^{۲}،\quad \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}} = -\text{لا}^{۲} + ۲\,\text{لا ما} + ۳\,\text{ما}^{۲}$$

$$\therefore \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \frac{۳\,\text{لا}^{۲} - ۲\,\text{لا ما} + \text{ما}^{۲}}{\text{لا}^{۲} - ۲\,\text{لا ما} - ۳\,\text{ما}^{۲}} = \text{جواب}$$

$$\text{فا}\,(\text{لا}،\ \text{ما}،\ \text{ی}) = ۰ \quad .... \quad (۴)$$ ایک سطح ہے

فرض کرو

$$\text{لا} = \text{فہ}\,(\text{و})،\quad \text{ما} = \text{کہ}\,(\text{و})،\quad \text{ی} = \text{سہ}\,(\text{و}) \quad .... \quad (۵)$$

ایسے تفاعل ہیں جن سے (۴) کی متماثلاً تصدیق ہوتی ہے۔ تب مساواتیں (۵) سطح (۴) پر کے منحنی کی تضمینی مساواتیں ہیں۔

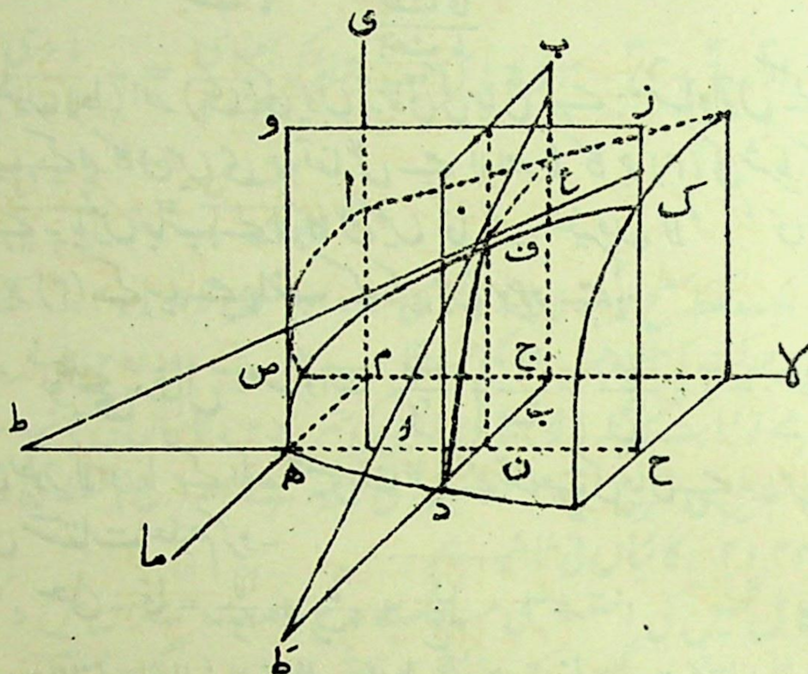
اگر

$$\text{د} = \text{فا}\,(\text{لا}،\ \text{ما}،\ \text{ی}) \quad .... \quad (۶)$$

تب (۵) کو استعمال کرنے سے د = ۰ اور فرد = ۰ پس ضابطہ (ز) ہوجاتا ہے۔

$$۰ = \frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}}\,\frac{\text{فرلا}}{\text{فرو}} + \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}}\,\frac{\text{فرما}}{\text{فرو}} + \frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}}\,\frac{\text{فری}}{\text{فرو}} \quad ...... \quad (۷)$$

سطح (۴) پر کے منحنی کے لیے جس کی تعریف (۵) سے ہوتی ہے۔ یہاں ہم دو خاص مثالوں پر غور کرینگے۔ شکل ۹۷ میں منحنی ص ف ک سطح کی مستوی تراش ہے



شکل ۹۸

جو مستوی ما = مستقل سے بنتی ہے۔ پس (۷) میں

$$\text{فرما} = 0 \quad \text{اور} \quad \frac{\text{جف ما}}{\text{جف لا}}\,\frac{\text{فر لا}}{\text{فر و}} + \frac{\text{جف ما}}{\text{جف ی}}\,\frac{\text{فر ی}}{\text{فر و}} = 0$$

(۸) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\dfrac{\text{فر ی}}{\text{فر و}}}{\dfrac{\text{فر لا}}{\text{فر و}}} = -\frac{\dfrac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}}}{\dfrac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۹)$$

لیکن اس مساوات میں سیدھے جانب کا رکن منحنی ص ف ک کی ڈھلان ہے۔ پس

$$\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = -\frac{\dfrac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}}}{\dfrac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (ط)$$

اسی طریقہ پر ہم ثابت کرسکتے ہیں کہ

$$\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = -\frac{\dfrac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}}}{\dfrac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\text{ی})$$

ضابطوں (ط) اور (ی) کی یوں ترجمانی کی جاتی ہے: مساواتوں کے سیدھے جانب کے ارکان میں ی وہ تفاعل ہے لا اور ما کا جو (۴) کی شرط کو پوری کرتا ہے۔ بائیں جانب سے ارکان میں فا تینوں متغیروں لا، ما، ی کا تفاعل ہے جو (۴) کے سیدھے جانب کے رکن میں موجود ہے۔

توضیحی مثال۔ مساوات $\frac{\text{لا}^2}{\text{ر}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{ی}^2}{\text{ج}^2} - ۱ = ۰$ سے ی کی بطور لا اور ما کے ایک تضمینی تفاعل کے تعریف کی جاتی ہے۔ اس تفاعل کے جزوی مشتقات معلوم کرو۔

حل۔ $\text{فا} = \frac{\text{لا}^2}{\text{ر}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{ی}^2}{\text{ج}^2} - ۱ = ۰$

پس $\frac{\text{جف فا}}{\text{جف لا}} = \frac{۲\,\text{لا}}{\text{ر}^2}$، $\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ما}} = \frac{۲\,\text{ما}}{\text{ب}^2}$، $\frac{\text{جف فا}}{\text{جف ی}} = \frac{۲\,\text{ی}}{\text{ج}^2}$

ضابطوں (ط) اور (ی) میں تعویض کرنے سے

$\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = -\frac{\text{ج}^2\,\text{لا}}{\text{ر}^2\,\text{ی}}$ اور $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = -\frac{\text{ج}^2\,\text{ما}}{\text{ب}^2\,\text{ی}}$ = جواب

(نوٹ ۲ کی توضیحی مثال سے اس کا مقابلہ کیا جائے)

مثالیں

(۱) $\text{د} = \frac{\text{لا} + ۲\,\text{ما}}{۲\,\text{لا} - \text{ما}}$، $\text{لا} = \text{قو}^{\text{و}}$، $\text{ما} = \text{قو}^{-\text{و}}$ ثابت کرو کہ $\frac{\text{فر د}}{\text{فر و}} = \frac{-۱۰}{(۲\,\text{قو}^{\text{و}} - \text{قو}^{-\text{و}})^2}$

(۲) $\text{لا}^3 - \text{لا}^2\,\text{ما} + \text{لا}\,\text{ما}^2 + \text{ما}^3 = ۰$ ضابطہ (ح) استعمال کرکے بتاؤ کہ

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{۳\,\text{لا}^2 - ۲\,\text{لا}\,\text{ما} + \text{ما}^2}{\text{لا}^2 - ۲\,\text{لا}\,\text{ما} - ۳\,\text{ما}^2}$$

(۳) مساوات لا^{۳} + ما^{۳} − ۶ لا ما − ۱۹ = ۰ صحیح ہے جبکہ لا = ۲، ما = −۱

بتاؤ کہ $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = ۲$

(۴) لا^{۳} + ما^{۳} + ی^{۳} − ۳ لا ما ی = ۰۔ بتاؤ کہ $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = - \frac{\text{ما + ی}}{\text{لا + ما}}$

اور $\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = - \frac{\text{لا + ی}}{\text{لا + ما}}$

(۵) ایک نقطہ سطح لا^{۲} + لا ما + ما^{۲} − ی^{۲} = ۰ اور مستوی لا − ما + ۲ = ۰ کے تقاطع کے منحنی پر حرکت کرتا ہے۔ لا کی قیمت جب ۳ ہے اور وہ ۲ اکائیاں فی ثانیہ بڑھتا ہے تو ثابت کرو کہ (ا) ما کی تبدیلی کی شرح ۲ اکائیاں فی ثانیہ ہے (ب) ی کی تبدیلی کی شرح $\frac{۳}{۷}$۳ اکائیاں فی ثانیہ ہے، اور (ج) نقطہ کی رفتار حرکت ۴۴ و ۴ اکائیاں فی ثانیہ ہے۔

(۶) کامل گیس کی اختصاصی مساوات د ح = مر ت ہے جس میں د، ح اور ت علی الترتیب گیس کے دباؤ حجم اور تپش ہیں اور مر گیسی مستقل ہے۔ ایک خاص آن میں گیس کی ایک معینہ کمیت کا حجم ۲۰ مکعب فٹ ہے اور اس کا دباؤ ۳۰ پونڈ فی مربع انچ۔ مر کو ۹۶ مان کر دریافت کرو کہ گیس کی تپش کس شرح سے بدلتی ہے جبکہ اس کا حجم بشرح $\frac{۱}{۲}$ مکعب فٹ فی ثانیہ بڑھتا ہے اور دباؤ بشرح $\frac{۱}{۱۰}$ پونڈ فی مربع انچ فی ثانیہ گھٹتا ہے۔ [جواب = بشرح $\frac{۱}{۱۲}$ درجہ فی ثانیہ

ط۔ متغیروں کی تبدیلی

۔ اگر ر = ف (لا، ما) ... (۱)

میں متغیر بدل دیے جاتے ہیں بذریعہ استحالہ (Transformation)

لا = فہ (ر، س)، ما = سہ (ر، س) ...... (۲)

تو ر کے جزوی مشتقات بلحاظ نئے متغیروں ر اور س کے ضابطہ (د) سے دریافت کر لیے جا سکتے ہیں کیونکہ اگر ہم س کو بدلنے نہ دیں تو

لا اور ما (۳) میں صرف ر ہی کے تفاعل ہوتے ہیں - پس

$$\frac{\text{جف ی}}{\text{جف ر}} = \frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} \cdot \frac{\text{جف لا}}{\text{جف ر}} + \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} \cdot \frac{\text{جف ما}}{\text{جف ر}} \quad \ldots\ldots\ (۳)$$

اب تمام مشتقات بلحاظ ر جزوی ہیں -

اسی طرح

$$\frac{\text{جف ی}}{\text{جف س}} = \frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} \cdot \frac{\text{جف لا}}{\text{جف س}} + \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} \cdot \frac{\text{جف ما}}{\text{جف س}} \quad \ldots\ldots\ (۴)$$

بطور خاص فرض کرو کہ استحالہ ہے $\text{لا} = \text{لاَ} + \text{ھ}$ اور $\text{ما} = \text{ماَ} + \text{ک}$ .... (۵)

نئے متغیر لاَ اور ماَ ہیں اور ھ اور ک مستقل - تب

$$\frac{\text{جف لا}}{\text{جف لاَ}} = ۱ ،\ \frac{\text{جف لا}}{\text{جف ماَ}} = ۰ ،\ \frac{\text{جف ما}}{\text{جف لاَ}} = ۰ ،\ \frac{\text{جف ما}}{\text{جف ماَ}} = ۱$$

اور (۳) اور (۴) سے حاصل ہوتا ہے

$$\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف ی}}{\text{جف لاَ}} ،\ \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ماَ}} \quad \ldots\ldots\ (۶)$$

پس استحالہ (۵) سے جزوی مشتقات میں کوئی تبدیلی نہیں واقع ہوتی -

اگر لا اور ما کی (۵) والی قیمتیں (۱) میں تعویض کی جائیں تو نتیجہ برآمد ہوتا ہے

$$\text{ی} = \text{ف}(\text{لا}،\text{ما}) = \text{فا}(\text{لاَ}،\text{ماَ}) \quad \ldots\ldots\ (۷)$$

اور اب (۶) کے نتائج لکھے جا سکتے ہیں

$$\text{ف}_{\text{لا}}(\text{لا}،\text{ما}) = \text{فا}_{\text{لاَ}}(\text{لاَ}،\text{ماَ})، \ \text{ف}_{\text{ما}}(\text{لا}،\text{ما}) = \text{فا}_{\text{ماَ}}(\text{لاَ}،\text{ماَ}) \quad \ldots\ldots\ (۸)$$

۸ - اعلیٰ رتبہ کے مشتقات

- اگر $\text{ی} = \text{ف}(\text{لا}،\text{ما})$ ...(۱)

تب

$$\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = \text{ف}_{\text{لا}}(\text{لا}،\text{ما})، \ \frac{\text{جف ی}}{\text{جف ما}} = \text{ف}_{\text{ما}}(\text{لا}،\text{ما}) \quad \ldots\ldots\ (۲)$$

یہ خود بھی لا اور ما کے تفاعل ہیں اور اس لیے تفرق کیے جا سکتے ہیں۔ چنانچہ اس میں کے پہلے تفاعل کو تفرق کرنے سے حاصل ہوتے ہیں۔

$$\frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف لا}^2} = \text{ف}_{\text{لالا}}(\text{لا، ما})\text{، } \frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف ما جف لا}} = \text{ف}_{\text{مالا}}(\text{لا، ما}) \quad \ldots\ldots (۳)$$

اسی طرح (۲) میں کے دوسرے تفاعل کو تفرق کرنے سے ہمیں حاصل ہوتے ہیں

$$\frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف لا جف ما}} = \text{ف}_{\text{لاما}}(\text{لا، ما})\text{، } \frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف ما}^2} = \text{ف}_{\text{ماما}}(\text{لا، ما}) \quad \ldots (۴)$$

(۳) اور (۴) میں دوسرے رتبہ کے بظاہر چار مشتقات ہیں۔ لیکن یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ

$$\frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف ما جف لا}} = \frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف لا جف ما}} \quad \ldots\ldots\ldots (ک)$$

صرف شرط یہ ہے کہ متعلقہ مشتقات مسلسل ہوں۔ بالفاظِ دیگر لا اور ما کے لحاظ سے متواتر جزوی تفرق جب عمل میں آتا ہے تو عملِ تفرق کی ترتیب کا نتیجہ پر کوئی اثر نہیں پڑتا۔ چنانچہ ف (لا، ما) کے دوسرے رتبہ کے صرف تین جزوی تفرق ہوتے ہیں۔ یعنے

$$\text{ف}_{\text{لالا}}(\text{لا، ما})\text{، } \text{ف}_{\text{لاما}}(\text{لا، ما}) = \text{ف}_{\text{مالا}}(\text{لا، ما})\text{، } \text{ف}_{\text{ماما}}(\text{لا، ما}) \quad \ldots (۵)$$

اس سے اعلیٰ درجہ کے مشتقات کے متعلق بھی اس قاعدہ کو توسیع دی جا سکتی ہے۔ مثلاً چونکہ ضابطہ ک کی صحت مان لی گئی ہے

$$\frac{\text{جف}^3\text{ی}}{\text{جف لا}^2\text{جف ما}} = \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}\left(\frac{\text{جف}^2\text{ی}}{\text{جف لا جف ما}}\right) = \frac{\text{جف}^3\text{ی}}{\text{جف لا جف ما جف لا}} = \frac{\text{جف}^2}{\text{جف لا جف ما}}\left(\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}\right)$$

$$= \frac{\text{جف}^2}{\text{جف ما جف لا}}\left(\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}\right) = \frac{\text{جف}^3\text{ی}}{\text{جف ما جف لا}^2}$$

تین یا اس سے زائد متغیروں کے تفاعلوں کے بھی اُن کے مماثل نتائج صادق آتے ہیں۔ طالب علم چند مثالیں لے کر آزما سکتا ہے۔

مثالیں

(۱) $\text{ی} = \frac{\text{لا} + \text{ما}}{\text{لا} - \text{ما}}$ کے دوسرے رتبہ کے جزوی مشتقات بتاؤ۔

[جواب $\frac{\text{جف}^2\,\text{ی}}{\text{جف لا}^2} = \frac{4\,\text{ما}}{(\text{لا} - \text{ما})^3}$ ، $\frac{\text{جف}^2\,\text{ی}}{\text{جف لا جف ما}} = \frac{-2(\text{لا} + \text{ما})}{(\text{لا} - \text{ما})^3}$ ، $\frac{\text{جف}^2\,\text{ی}}{\text{جف ما}^2} = \frac{4\,\text{لا}}{(\text{لا} - \text{ما})^3}$]

(۲) اگر ف (لا، ما) = جب لا لوک (ما + ۱) + جم ما لوک (۱ − لا) تو ثابت کرو کہ

$\text{ف}_{\text{لا}}(0,0) = -1$ ، $\text{ف}_{\text{ما}}(0,0) = 0$ ، $\text{ف}_{\text{لالا}}(0,0) = -1$ ، $\text{ف}_{\text{ماما}}(0,0) = 1$ ، $\text{ف}_{\text{لاما}}(0,0) = 0$

(۳) اگر د = (ا لا² + ب ما² + ج ی²) تو بتاؤ کہ

$$\frac{\text{جف}^3\,\text{د}}{\text{جف لا}^2\,\text{جف ما}} = \frac{\text{جف}^3\,\text{د}}{\text{جف لا جف ما جف لا}} = \frac{\text{جف}^3\,\text{د}}{\text{جف ما جف لا}^2}$$

(۴) اگر د = لوک $\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}$ تو ثابت کرو کہ $\frac{\text{جف}^2\,\text{د}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\,\text{د}}{\text{جف ما}^2} = 0$

(۵) اگر $\text{د} = \frac{1}{\sqrt{\text{لا}^2 + \text{ما}^2 + \text{ی}^2}}$ تو بتاؤ کہ $\frac{\text{جف}^2\,\text{د}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\,\text{د}}{\text{جف ما}^2} + \frac{\text{جف}^2\,\text{د}}{\text{جف ی}^2} = 0$

(۶) اگر د = ی مس$^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ما}}$ تو بتاؤ کہ $\frac{\text{جف}^2\,\text{د}}{\text{جف لا}^2} + \frac{\text{جف}^2\,\text{د}}{\text{جف ما}^2} + \frac{\text{جف}^2\,\text{د}}{\text{جف ی}^2} = 0$

(۷) اگر د = ف (لا، ما) اور لا = ص جم طہ، ما = ص جب طہ تو ثابت کرو کہ

$$\frac{\text{جف د}}{\text{جف لا}} = \text{جم طہ}\,\frac{\text{جف د}}{\text{جف ص}} - \frac{\text{جب طہ}}{\text{ص}}\,\frac{\text{جف د}}{\text{جف طہ}}$$

اور

$$\frac{\text{جف د}}{\text{جف ما}} = \text{جب طہ}\,\frac{\text{جف د}}{\text{جف ص}} + \frac{\text{جم طہ}}{\text{ص}}\,\frac{\text{جف د}}{\text{جف طہ}}$$

اکیسواں باب

ضعفی تکملے

۱۔ جزوی اور متواتر تکمّل ـ تفرقی احصا میں

جس طرح جزوی تفرّق عمل میں آتا ہے اسی طرح تکملی احصا میں اس کا معکوس عمل جزوی تکمل ہے ـ جزوی تکمل سے مراد یہ ہے کہ دو یا اس سے زائد متبوع متغیروں والے تفرقی جملہ کا تکملہ دریافت کیا جائے اس طریقہ پر کہ پہلے ان متغیروں میں سے صرف ایک کو متغیر اور باقی سبھوں کو مستقل مان کر جملہ تکمل کیا جائے اور پھر باقی ماندہ متغیروں میں سے دوسرے ایک کو متغیر اور بقیہ کو مستقل مان کر حاصل شدہ جملہ تکمّل کیا جائے یہاں تک کہ باری باری سے سب متغیر ختم ہو جائیں ـ ایسے تکملے ضعفی متغیروں کی تعداد کے لحاظ سے دُہرے تہرے یا ضعفی کہلاتے ہیں ـ

مثال کے طور پر اگر $\frac{\text{جف}^2 \text{د}}{\text{جف لا جف ما}} = \text{لا}^{\text{ن}} + \text{ما}^{\text{ن}}$

تو $\text{د} = \int\int (\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ما}^{\text{ن}}) \,\text{فرلا فرما}$

اور اس کے تعیین کے لیے $(\text{لا}^{\text{ن}} + \text{ما}^{\text{ن}})$ کا پہلے (لا کو مستقل مان کر) بلحاظ ما

تکملہ معلوم کیا جاتا ہے، چنانچہ

$$\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}} = \text{لا}^{\text{ن}}\,\text{ما} + \frac{\text{ما}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{فہ}\,(\text{لا})$$

جس میں فہ (لا) بلحاظ اس کے کہ لا کو مستقل مانا گیا تھا لا کا ایک اختیاری تفاعل ہے اور پھر حاصل شدہ جملہ کا (ما کو مستقل مان کر) بلحاظ لا تکملہ دریافت کیا جاتا ہے۔ چنانچہ

$$\text{ی} = \frac{\text{لا}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1}\,\text{ما} + \frac{\text{لا}\,\text{ما}^{\text{ن}+1}}{\text{ن}+1} + \text{فہ}\,(\text{لا}) + \text{سہ}\,(\text{ما})$$

جس میں سہ (ما)، ما کا ایک اختیاری تفاعل ہے اور فہ (لا) = $\int$ فہ (لا) فرلا

۲۔ محدود دُہرا تکمّلہ۔ فرض کرو کہ ف (لا، ما)، لا اور ما کا ایک مسلسل اور وحید القیمت تفاعل ہے۔ ہندسی لحاظ سے

$$\text{ی} = \text{ف}\,(\text{لا، ما}) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ایک سطح ک ل کی مساوات ہے۔ شکل ۹۹ میں ایک سطح س لو جو مستوی لا مر ما میں واقع ہے اور اس کو اساس مان کر اس پر ایک قائم استوانہ تیار کرو جس کی دیواریں مر ے کے متوازی ہیں۔ اب اگر یہ استوانہ سطح ک ل میں سے رقبہ سَ کو گھیر لے تو س، سَ اور استوانی سطح سے محدود حجم کی تعیین کے لیے حسبِ ذیل طریقہ اختیار کیا جاتا ہے:

مر ما کے متوازی مساوی فصلوں (= مف لا) پر رقبہ س کے اندر خطوطِ مستقیم کی ایک قطار کھینچو۔ اسی طرح مر لا کے متوازی مساوی فصلوں (= مف ما) پر خطوط کی ایک دوسری قطار کھینچو۔ ان خطوط میں سے علی الترتیب ما مر ے اور لا مر ے کے متوازی مستویاں تیار کرو۔ اس طرح رقبوں س اور سَ کے اندر خطوط کا ایک ایک جال تیار ہوتا ہے جن میں سے س کے اندر کا جال مف لا مف ما رقبہ کے مستطیلوں پر مشتمل ہوتا ہے۔ شکل کے مطالعہ سے

معلوم ہو جائیگا کہ عملِ ہذا سے اسطوانہ م ن ف ق کے مماثل متعدد چھوٹے چھوٹے

شکل ۹۹

اسطوانوں میں منقسم ہو جاتا ہے جس کے اوپر اور نیچے کے سرے س اور سَ کے متناظر جال ہیں - چونکہ ان چھوٹے اسطوانوں کے اوپر والے سرے منحنی شکل کے

ہیں اس لیے براہِ راست ان اسطوانوں کے حجم محسوب نہیں کیے جا سکتے۔ اب ان کے اوپر کے سروں کے اُن کونوں سے جن کے لیے لا اور ما کی قیمتیں سب سے کمتر ہیں لا م ما کے متوازی مستویاں کھینچو اس طرح رم ن ف ر کے حائل متعدد قایم منشور تیار ہو جائینگے۔

اگر ف کے محدد (لا، ما، ی) ہیں تو م ف = ی = ف (لا، ما) اور اس لیے م ن ف ر کا حجم = ف (لا، ما) مف لا مف ما .... (۲)

اور پورے اسطوانہ کے حجم ح کے تقریباً مساوی

حجم حَ = ∑ ∑ ف (لا، ما) مف لا مف ما .... (۳)

جس میں دہرے مجموعہ کی علامت ∑ ∑ اس بات کو ظاہر کرتی ہے کہ دونوں متغیروں لا، ما کے لحاظ سے مجموعہ حاصل کیا جانا چاہیے۔

اب اگر س کے جال کے نقاط تقسیم کی تعداد نا متناہی بڑھی کردی جائے یعنے مف لا، مف ما کو نا متناہی گھٹا دیا جائے تو حَ پورے اسطوانہ کے حجم ح کو بطور انتہا پہنچ جائیگا اور

ح = نہا ∑ ∑ ف (لا، ما) مف لا مف ما..... (۴)
مف لا ← ۰
مف ما ← ۰

اب ہم بتائینگے کہ یہ انتہا متواتر تکمل کے ذریعہ یوں دریافت ہو سکتی ہے:

مجسم اسطوانے کی کسی ایک قاش پر نظر ڈالو جو ہا م رے کے متوازی مستویوں سے بنتی ہے۔ مثلاً وَ ع ح گ اور ی طہ لَ کَ پہلووں والی قاش پر۔ اس کی موٹائی مف لا ہے۔ منحنی ح ع کے لیے محدد ی کی قیمتیں مساوات ی = ف (لا، ما) میں لا = مرد لکھنے سے دریافت ہوتی ہیں۔ بالفاظِ دیگر

ی = ف (مرد، ما)

پس رقبہ وَ ع ح گ = ∫ (دو سے دگ تک) ف (مرد، ما) فرما

قاش زیر بحث کا حجم تقریباً ایک ایسے منشور کے حجم کے مساوی ہے جس کا قاعدہ وَ ع ح گ ہے اور ارتفاع مف لا

یعنے مساوی ہے مف لا (رقبہ وَ ع ح گ) = مف لا $\int_{دَو}^{دگ}$ ف (مد، ما) فرما

اور واضح ہے کہ پورے مجسم کا حجم اس طرح تیار شدہ منشوروں کے حاصل مجموعہ کی انتہا ہے، جیسے جیسے لا (= مد) کی قیمت م ا سے بدل کر م ب ہو جاتی ہے ۔ یعنے

$$ح = \int_{م ا}^{م ب} فرلا \int_{دَو}^{دگ} ف (لا، ما) فرما \quad \ldots\ldots\ldots (۵)$$

اسی طرح بتایا جا سکتا ہے کہ $ح = \int_{مج}^{مدم} فرما \int_{ھ ؤ}^{ھ ؤم} ف (لا، ما) فرلا \ldots (۶)$

ان تکملوں کو عموماً بنظر سہولت کتابت

$\int_{دَو}^{دگ} \int_{م ا}^{م ب} ف (لا، ما) فرما فرلا$ اور $\int_{ھ ؤ}^{ھ ؤم} \int_{مج}^{مدم} ف (لا، ما) فرلا فرما$ لکھتے ہیں

(۵) میں انتہائیں د وَ اور د گ محدد لا کے تفاعل ہیں ۔ اس لیے کہ وہ مجسم کے قاعدہ کے محیط کی مساوات کو ما کے لیے حل کرنے سے دریافت ہوتی ہیں ۔
اسی طرح (۶) میں انتہائیں ھ ؤ اور ھ ؤم محدد ما کے تفاعل ہیں ۔

(۴)، (۵) اور (۶) کے باہمدگر مقابلہ سے نتیجۂ ذیل اخذ ہوتا ہے :-

$$\left.\begin{aligned} ح &= \underset{\substack{مف لا \to . \\ مف ما \to .}}{نہا} \sum \sum ف (لا، ما) مف ما مف لا = \int_{ی_۲}^{ی_۱} \int_{و_۲}^{و_۱} ف (لا، ما) فرما فرلا \\ &= \int_{و_۲}^{و_۱} \int_{ی_۲}^{ی_۱} ف (لا، ما) فرلا فرما \end{aligned}\right\} \ldots (۷)$$

جن میں و۱ اور و۲ عموماً ما کے تفاعل ہیں اور ی۱ اور ی۲ عموماً لا کے تفاعل ۔ ہر صورت میں پہلی علامتِ تکمل پہلے تفرقہ سے متعلق ہوتی ہے اور دوسری

علامتِ تکمل دوسرے تفرقہ سے ـ

مساوات (ا) دُہرے مجموعوں کے لیے تیرھویں باب کے ۱ کے اساسی مسئلہ کی توسیع ہے ـ

توضیحی مثال (۱) ثابت کرو کہ $\int_{0}^{\text{ا}} \int_{-\sqrt{\text{ا}^2-\text{لا}^2}}^{\sqrt{\text{ا}^2-\text{لا}^2}} \text{لا فرلا فرما} = \frac{2\,\text{ا}^3}{3}$

حل ـ $\int_{0}^{\text{ا}} \Big[\text{لا ما}\Big]_{-\sqrt{\text{ا}^2-\text{لا}^2}}^{\sqrt{\text{ا}^2-\text{لا}^2}} \text{فرلا} = \int_{0}^{\text{ا}} 2\,\text{لا}\sqrt{\text{ا}^2-\text{لا}^2}\ \text{فرلا} = \Big[-\frac{2}{3}(\text{ا}^2-\text{لا}^2)^{\frac{3}{2}}\Big]_{0}^{\text{ا}} = \frac{2}{3}\,\text{ا}^3$

توضیحی مثال (۲) ثابت کرو کہ $\int_{2}^{3}\int_{1}^{2}\int_{0}^{5} \text{لا}^2\text{ما فرلا فرما فری} = 25\frac{1}{3}$

حل ـ تکملہ $= \int_{2}^{3}\int_{1}^{2}\Big(\int_{0}^{5}\text{لا}^2\text{ما فری}\Big)\text{فرلا فرما} = \int_{2}^{3}\int_{1}^{2}\Big[\text{لا}^2\text{ما ی}\Big]_{0}^{5}\text{فرلا فرما}$

$= \int_{2}^{3}\int_{1}^{2}(2\,\text{لا}^2\text{ما فرما})\,\text{فرلا} = 2\int_{2}^{3}\Big[\frac{\text{لا}^2\text{ما}^2}{2}\Big]_{1}^{2}\text{فرلا}$

$= \int_{2}^{3} 4\,\text{لا}^2\ \text{فرلا} = 4\Big[\frac{\text{لا}^3}{3}\Big]_{2}^{3} = \frac{4}{3}(27-8) = 25\frac{1}{3}$

توضیحی مثال (۳) اسطوانی سطح $\text{لا}^2 + \text{ما}^2 = 2\,\text{ا لا}$ ، $\text{ا} > 0$ اور مستویوں $\text{ی} = \text{م لا}$ اور $\text{ی} = 0$ سے محدود خانہ کا حجم دریافت کرو ـ

حل ـ شکل ۱ میں نصف خانہ ھ ز ا ب ہے ـ اس کی تراشش د ز و ھ مستوی ما ے کے متوازی ہے اور اس میں لا مستقل ہے ـ ما کے حدود صفر اور و ز $(=\sqrt{2\,\text{ا لا} - \text{لا}^2})$ ہیں ـ پس مطلوبہ حجم ح کا نصف ہے ـ

شکل ۵۱

ح / ۲ = ۲ ∫ (م لا) فرلا ∫ (ب) ⁻ م لا فرما [جذر: ۲ ا لا − لا^۲]

= م^۲ ∫ لا [جذر: ۲ ا لا − لا^۲] فرلا = م^۲ ∫ لا [جذر: ا^۲ − (ا^۲ − ۲ ا لا + لا^۲)] فرلا

= م^۲ ∫ لا [جذر: ا^۲ − (ا − لا)^۲] فرلا اگر ا − لا کو ا جب طہ لکھا جائے تو

ا = − م^۲ ∫ (از π/۲ تا −π/۲) ا^۳ (۱ − جب طہ) جم^۲ طہ فرطہ

[اس لیے کہ لا = ا (۱ − جب طہ) اور فرلا = − ا جم طہ فرطہ]

= م ا^۳ π/۲ اور ح = م π ا^۳ = جواب

مثالیں

ذیل کے تکملوں کی تصدیق کرو:—

(۱) $\int_{0}^{\pi}\int_{0}^{\text{ا(۱+جم ط)}} \text{ر}^{۲}\ \text{جب ط فرط فر} = \frac{\text{ا}^{۳}}{۳}$

(۲) $\int_{0}^{ب}\int_{0}^{۱۰\text{س}} \sqrt{\text{س و} - \text{و}^{۲}}\ \text{فرو فرس} = ۶\,\text{ب}^{۳}$

(۳) $\int_{0}^{۲}\int_{0}^{۱}\int_{0}^{۲} \text{لا}^{۲}\ \text{ما}^{۲}\ \text{ی فرلا فرما فری} = ۴\frac{۲}{۳}$

(۴) $\int_{0}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{0}^{\text{ا جم ط}} \text{ر}^{۴}\ \text{فرط فرر} = \frac{\text{ا}^{۵}}{۱۰}\left(\frac{۱۶}{۱۵} - \pi\right)$

(۵) $\int_{0}^{ا}\int_{0}^{ب}\int_{0}^{ج} (\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲} + \text{ی}^{۲})\ \text{فرلا فرما فری} = \frac{\text{ا ب ج}}{۳}(\text{ا}^{۲} + \text{ب}^{۲} + \text{ج}^{۲})$

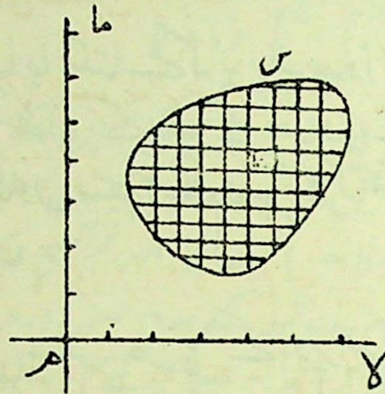
(۶) $\int_{0}^{۱}\int_{\text{ما}^{۲}}^{\text{ما}} \int_{0}^{\text{ا-لا}} \text{لا فرما فرلا فری} = \frac{۴}{۳۵}$

(۷) $\int_{0}^{۲}\int_{0}^{\text{ی}}\int_{0}^{\text{لا}\sqrt{۳}} \frac{\text{لا فری فرلا فرما}}{\text{لا}^{۲} + \text{ما}^{۲}} = \frac{\pi}{۲}$

۳۔ محدود دُہرے تکملہ کی قیمت ایک خطہ س کے

اوپر — یہ کوئی ضروری نہیں کہ ہر دُہرا محدود تکمّلہ ایک حجم ہی ہو۔ اگر لا، ما، ی فضا میں کے کسی نقطہ کے محدد ہیں تو نتیجہ یقیناً حجم ہے۔ لیکن اگر ہم مستوی لا م ما میں ایک خط س سے بحث کر رہے ہیں اور اس کے ساتھ اس کے ہر نقطہ (لا، ما) سے ایک دیا ہوا انفاعل ف (لا، ما) وابستہ ہے (مثلاً ایک پتلی پرت کی کثافت یعنے کمیت فی اکائی رقبہ یا کوئی اور خاصیت) تو ہم خطہ مذکور کو م لا، م ما کے متوازی خطوط کھینچکر مف لا مف ما رقبہ کے مستطیل عنصروں میں منقسم کر کے مجموعہ $\sum\sum$ ف (لا، ما) مف لا مف ما حاصل کر سکتے ہیں اور

نہا ∑ ∑ ف (لا، ما) مف لا مف ما = ∫∫ف (لا، ما) فر لا فر ما ....(۱)
مف لا ← ۰
مف ما ← ۰



شکل ۱۰۱

خط س کے اوپر تفاعل ف (لا، ما) کا دُہرا تکمّل کہلاتا ہے۔ رابطہ (۱) سے اس دُہرے تکملہ کی قیمت متواتر تکمّل کے ذریعہ معلوم کی جا سکتی ہے۔ اب تکمّل کے حدود کی تعیین باقی رہ جاتی ہے۔

مستوی رقبہ بحیثیت محدود دُہرا تکملہ۔ علی القوائم

محدّد۔ بارہویں باب کی فصل (؟) میں اکھیرے تکمّل کے ذریعہ مستوی رقبوں کی تعیین کا سوال حل کیا گیا تھا۔ دُہرے تکمّل کے ذریعہ اس کا حل زیادہ تر اس لیے مفید ہے کہ اس سے عام سوال میں حدود کی تعیین واضح ہو جاتی ہے۔

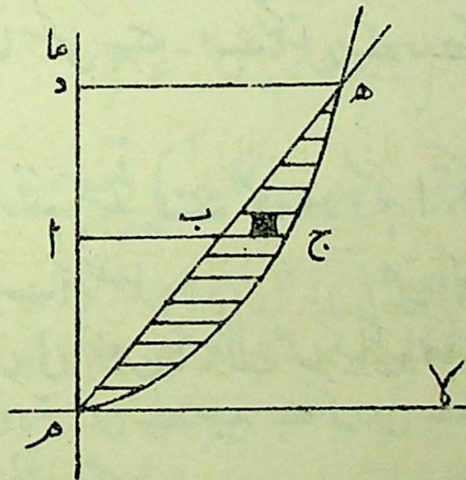
شکل ۱۰۱ کے معائنہ سے ظاہر ہے کہ جالدار خطّہ س کا رقبہ

ر = نہا ∑ ∑ مف لا مف ما = ∫∫ فر لا فر ما ....(ب)
مف لا ← ۰
مف ما ← ۰

پس رابطہ (۱) کے مدنظر ہم کہہ سکتے ہیں کہ
کسی خطہ کا رقبہ اس خطہ کے اوپر تفاعل ف (لا، ما) = ۱ کے دُہرے تکملہ کی قیمت ہے۔
یا ۲ کے مدنظر کہا جا سکتا ہے کہ یہ رقبہ عددًا قاعدہ س پر اکائی بلندی کے بنائے ہوئے اسطوانہ کے رقبہ کے مساوی ہے۔
مندرجۂ ذیل مثالوں سے معلوم ہو جائیگا کہ تکمل کے حدود کس طرح دریافت کیے جاتے ہیں۔

توضیحی مثال ۱۔ م لا کے اوپر نیم کعبی مکافی $ما^2 = لا^3$ اور خطِ مستقیم ما = لا سے جو رقبہ محدود ہے اس کو محسوب کرو۔

حل۔ شکل ۱۰۲ کے مطالعہ سے واضح ہوگا کہ پہلے تکمل بلحاظ لا عمل میں لایا جاتا ہے۔ یعنے عناصر فرلا فرما ایک اُفقی (محور م لا کے متوازی) پٹّی میں جوڑے جاتے ہیں۔



شکل ۱۰۲

پس $\int_{اب}^{اج}$ فرلا فرما = فرما $\int_{اب}^{اج}$ فرلا = ارتفاع فرما کی افقی پٹّی کا رقبہ

اس کے بعد اس نتیجہ کو بلحاظ ما تکمّل کیا جاتا ہے - یعنی شکل کی تمام افقی پٹیاں جوڑ لی جاتی ہیں - پس

$$\text{رقبہ } \text{ا} = \int_{\text{اب}}^{\text{اج}} \int_{\text{مر دم}} \text{فرما فرلا}$$

پہلے تکملے کے حدود ا ب اور ا ج کی تعیین کے لیے رقبہ کو محدود کرنے والے منحنیوں کی مساواتیں حل کر کے لا کی قیمت معلوم کر لی جاتی ہے - چنانچہ خطِ مستقیم کی مساوات سے لا = ا ب ما اور نیم کعبی مکافی کی مساوات سے لا = اج = $\text{ما}^{\frac{3}{2}}$ دوسرے تکملہ کے حدود صفر اور مرد ہیں - مرد کی تعیین کے لیے دی ہوئی دونوں مساواتیں ہمزاد تصور کر کے حل کی جاتی ہیں جس سے منحنیوں کے نقطہ تقاطع ھ کے محدد (۱، ۱) معلوم ہو جاتے ہیں - پس مرد = ۱

$$\text{اور } \text{ا} = \int_{\cdot}^{\text{ا}} \int_{\text{ما}}^{\text{ما}^{\frac{3}{2}}} \text{فرما فرلا} = \int_{\cdot}^{\text{ا}} (\text{ما}^{\frac{3}{2}} - \text{ما})\,\text{فرما} = \left[\text{ما}^{\frac{5}{2}} - \tfrac{1}{2}\,\text{ما}^{2}\right]_{\cdot}^{\text{ا}} = \frac{1}{10}$$

اس سوال کے حل میں ہم یہ بھی کر سکتے تھے کہ عناصر فرلا فرما کو انتصابی پٹی میں جوڑ لیتے اور بعد کو یہ سب انتصابی پٹیاں جمع کر لی جاتیں - یعنے

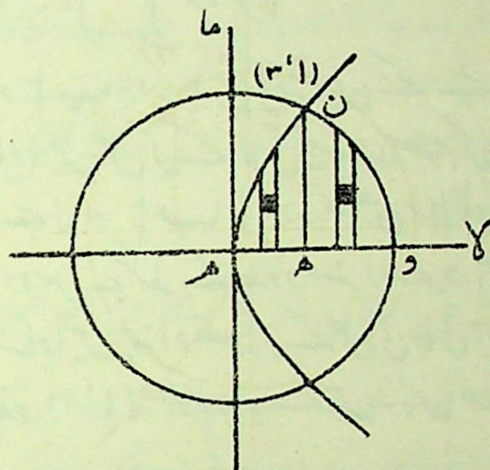
$$\text{ا} = \int_{\cdot}^{\text{ا}} \int_{\text{لا}^{\frac{2}{3}}}^{\text{لا}} \text{فرلا فرما} = \int_{\cdot}^{\text{ا}} (\text{لا} - \text{لا}^{\frac{3}{2}})\,\text{فرلا} = \frac{1}{10}$$

یاد رہنا چاہیے کہ یہ ایک ایسی مثال ہے جس میں تکمل کے عمل کی کوئی بھی ترتیب (یعنی پہلے کونسا تکمل عمل میں لایا جاتا ہے اور بعد کو کونسا) اختیار کر لی جا سکتی ہے - لیکن توضیحی مثال (۲) کے مطالعہ سے معلوم ہو گا کہ ہر صورت میں ایسا نہیں کیا جا سکتا -

توضیحی مثال (۲) پہلے ربع کے اندر کا رقبہ دریافت کرو جو محدود ہے محور لا اور منحنیوں

$$\text{لا}^{2} + \text{ما}^{2} = 10 \quad \text{اور} \quad \text{ما}^{2} = 9\,\text{لا} \quad \text{سے}$$

حل پہلے ہم انتصابی پٹیاں استعمال کر کے بلحاظ ما تکمل کرینگے۔ شکل ۱۰۳ کے مطالعہ سے فوراً معلوم ہوجائیگا کہ اس طرز عمل سے ہمیں دو تکملوں کی ضرورت ہوگی۔ چونکہ دائرہ اور مکافی کے نقطہ تقاطع ن کے محدد (۱، ۳) ہیں اور



شکل ۱۰۳

مکافی پر ھ اور ن کے مابین ما = ۳ $\sqrt{\text{لا}}$ پس رقبہ م ن ھ = $\int_0^1 \int_0^{3\sqrt{\text{لا}}}$ فرلا فرما

$$= \int_0^1 3\sqrt{\text{لا}}\ \text{فرلا} = 2$$

اسی طرح رقبہ و ن ھ = $\int_1^{\sqrt{10}} \int_0^{\sqrt{10-\text{لا}^2}}$ فرلا فرما = $\int_1^{\sqrt{10}} \sqrt{10-\text{لا}^2}$ فرلا

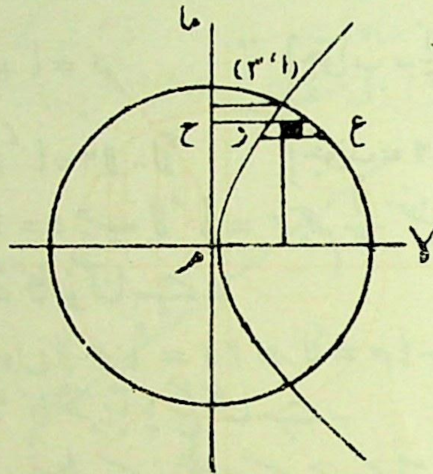
$$= \left[\frac{\text{لا}}{2}\sqrt{10-\text{لا}^2} + 5\ \text{جب}^{-1}\frac{\text{لا}}{\sqrt{10}}\right]_1^{\sqrt{10}}$$

$$= 0 - \frac{3}{2} + 5\left(\text{جب}^{-1} 1 - \text{جب}^{-1}\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$$

$$= -1.5 + 5(1.571 - 0.322) = 4.745$$

∴ پورا رقبہ م ن و = ۶٫۷۵ جواب

اس کے برعکس اگر ہم پہلے اُفقی پٹیاں استعمال کرکے بلحاظ لا تکمل کریں تو شکل ۱۰۴ کے مطالعہ سے معلوم ہوگا کہ پورے رقبہ کی قیمت = $\int_{0}^{3}\int_{\text{ح ز}}^{\text{ح ع}}$ فرما فرلا



شکل ۱۰۴

چونکہ لا = ح ز = $\frac{1}{9}$ ما^2 اور ح ع = + $\sqrt{10-\text{ما}^2}$

رقبہ = $\int_{0}^{3}\int_{\frac{1}{9}\text{ما}^2}^{\sqrt{10-\text{ما}^2}}$ فرما فرلا = $\left[\frac{\text{ما}}{2}\sqrt{10-\text{ما}^2} + 5\,\text{جب}^{-1}\frac{\text{ما}}{\sqrt{10}} - \frac{1}{27}\text{ما}^3\right]_0^3$

= $\frac{3}{2}$ + ۵ جب$^{-1}$ $\frac{3}{\sqrt{10}}$ − ۱ = ۱٫۵ + ۶٫۲۵ − ۱ = ۶٫۷۵ جواب

پس واضح ہے کہ دوسرا طریقہ آسان تر ہے اور عام طور پر ایسے سوالوں کے حل میں کوشش کی جانی چاہیے کہ تکمل کی ترتیب ایسی ہو کہ حتی الامکان ایک ہی تکملہ سے رقبہ مطلوبہ معلوم ہو جائے۔

مثالیں

(۱) دُہرے تکمل کے ذریعے مکافیوں ۳ ما^2 = ۲۵ لا اور ۵ لا^2 = ۹ ما کا درمیانی رقبہ دریافت کرو۔ (ا) پہلے بلحاظ لا تکمّل کرکے (ب) پہلے بلحاظ ما تکمل کرکے

[جواب (ا) $\int_{0}^{1} \int_{\frac{2}{3}}^{\frac{5}{3}}$ فرما فرلا = ۵ (ب) $\int_{2}^{3} \int_{\frac{لا^2}{9}}^{\frac{لا+25}{3}}$ فرلا فرما = ۵

دُہرے تکمّل کے ذریعہ ذیل کے دو منحنیوں کے مابین محدود رقبہ کی تعیین کرو:

(۲) لا ما = ۴، لا + ما = ۵ [جواب = $\frac{1}{2}$ ۷ - ۴ لوک ۴ = ۱۹۵۶ء۱

(۳) ما = لا^3 - ۲ لا، ما = ۶ لا - لا^3 [جواب = ۱۶

(۴) ثابت کرو کہ ما = ۲ جب لا، ما = ۲ جم $\frac{لا}{2}$ منحنیوں سے محدود رقبوں میں بڑا رقبہ چھوٹے کا نوگنا ہے۔

(۵) بتاؤ کہ منحنیوں لا^2 + ما^2 = ۲۵ اور لا^2 = ۴ ما - ۷ سے محدود رقبوں میں بڑا رقبہ چھوٹے کا تقریباً پانچ گنا ہے۔

۴ - کسی سطح کے نیچے کے حجم کی تعیین

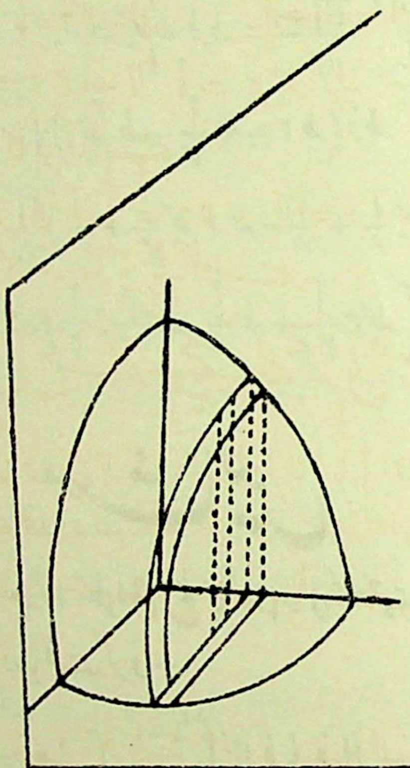
۲ میں ایسے مجسم کے حجم سے بحث کی گئی تھی جو ی = ف (لا، ما) اور مستوی لا م ما اور ایک اسطوانہ سے محدود ہے۔ اسطوانہ کے عناصر م ی کے متوازی تھے اور اس کا رقبہ مستوی لا م ما کا ایک خطہ س تھا۔ رابطہ (۲) سے اس مجسم کا حجم ہے۔

$$ح = \iint_{س} ی \ فرما \ فرلا = \iint_{س} ف(لا، ما) \ فرما \ فرلا \quad \ldots (۱)$$

مجسم کی ترتیب اور اس کے حدود وہی ہیں جو رقبہ س کے لیے ہیں۔ اس نوع کے مجسم کا حجم "سطح ی = ف (لا، ما) کے نیچے کا حجم" کہلاتا ہے۔ مستوی کی صورت میں اس کی متناظر مثال "منحنی کے نیچے کا رقبہ" ہے۔ جس پر بارہویں باب میں بحث کی گئی ہے۔ "کسی سطح کے نیچے کے حجم" کی ایک خاص صورت ایسا حجم ہو سکتا ہے جو دی ہوئی سطح اور خود مستوی لا م ما سے محدود ہو۔ یہ یاد رہے کہ ضابطہ (۱) میں حجم کا عنصر قاعدہ فرلا فرما پر بلندی ی = ف (لا، ما) کا قایم منشور ہے۔

توضیحی مثال - ناقص مکافی نما ی = ۲ - ۲ لا۲ - ما۲ اور مستوی لا م ما سے محصور مجسم کا حجم دریافت کرو۔

حل - ی کو صفر لکھنے سے ما = $\sqrt{\text{۲ - ۲ لا}^{\text{۲}}}$ اور یہ مستوی لا م ما میں مجسم کے قاعدہ کی مساوات ہے۔ ا کو صفر لکھنے سے ۲ لا۲ = ۲ ∴ لا = ۱ اس لیے لا کے حدود ۱ اور صفر ہیں۔ دیکھو شکل ۱۰۵۔



شکل ۱۰۵

پس مطلوبہ حجم

$$\text{ح} = \text{۴} \int_{\text{۰}}^{\text{۱}} \int_{\text{۰}}^{\sqrt{\text{۲-۲لا}^{\text{۲}}}} (\text{۲ - ۲لا}^{\text{۲}} - \text{ما}^{\text{۲}})\ \text{فرلا فرما}$$

$$= \text{۴} \int_{\text{۰}}^{\text{۱}} \left\{ \text{۲}\sqrt{\text{۲-۲لا}^{\text{۲}}} - \text{۲لا}^{\text{۲}}\sqrt{\text{۲-۲لا}^{\text{۲}}} - \frac{\text{۲}}{\text{۳}}(\text{۲-۲لا}^{\text{۲}})^{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}} \right\} \text{فرلا}$$

$$= \text{۴} \int_{\text{۰}}^{\text{۱}} \left\{ \text{۲}\sqrt{\text{۲-۲لا}^{\text{۲}}} + (\text{۲-۲لا}^{\text{۲}})^{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}} - \text{۲}\sqrt{\text{۲-۲لا}^{\text{۲}}} - \frac{\text{۱}}{\text{۳}}(\text{۲-۲لا}^{\text{۲}})^{\frac{\text{۳}}{\text{۲}}} \right\} \text{فرلا}$$

= $\frac{8}{3}$ $\int_{0}^{1}$ (۲ - ۲ لا^2)$^{\frac{3}{2}}$ فرلا

لا = جب طہ لکھو تو ۲ - ۲ لا^2 = ۲ - ۲ جب^2 طہ = ۲ جم طہ ∴ (۲ - ۲ لا^2)$^{\frac{3}{2}}$ = ۲ $\sqrt{2}$ جم^3 طہ

فرلا = جم طہ فرطہ اور جبکہ لا = ۱ تو جب طہ = ۱ اور طہ = $\frac{\pi}{2}$ اور جبکہ لا = ۰ تو طہ = ۰

پس ح = $\frac{8}{3}$ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ ۲ $\sqrt{2}$ جم^3 طہ جم طہ فرطہ = $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ جم^4 طہ فرطہ

= $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ (جم^2 طہ - $\frac{1}{4}$ جب^2 ۲ طہ) فرطہ

= $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ ($\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{2}$ جم ۲ طہ - $\frac{1}{8}$ + $\frac{1}{8}$ جم ۴ طہ) فرطہ

= $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ [$\frac{1}{2}$ طہ + $\frac{1}{4}$ جب ۲ طہ - $\frac{1}{8}$ طہ + $\frac{1}{32}$ ۴ طہ]$_{0}^{\frac{\pi}{2}}$ = $\frac{16\sqrt{2}}{3}$ × $\frac{3\pi}{16}$

= $\sqrt{2}$ π جواب

مثالیں

(۱) دُہرے تکمل کے ذریعہ اسطوانی سطح ما^2 = ۱ - لا، مستوی ی = لا اور سے محدود جسم کا حجم دریافت کرو۔

[جواب = ۲ $\int_{0}^{1}$ $\int_{0}^{\sqrt{1-ما}}$ لا فرما فرلا = $\frac{8}{15}$]

(۲) دُہرے تکمل سے ایک ایسے چوسطحی مجسم (Tetrahedron) کا حجم دریافت کرو جو محدّدوں کے مستویوں اور $\frac{لا}{ا}$ + $\frac{ما}{ب}$ + $\frac{ی}{ج}$ = ۱ مستوی سے محدود ہو۔ [جواب = $\frac{ا ب ج}{6}$

(۳) ا نصف قطر کے ایک کرہ میں سے ایک قائم دائری اسطوانہ (جس کے قاعدہ کا نصف قطر ب ہے اور جس کا محور کرہ کے مرکز میں سے گزرتا ہے) ایک جسم قطع کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا حجم = $\frac{4\pi}{3}$ [ا^3 - (ا^2 - ب^2)$^{\frac{3}{2}}$]

(۴) گردشی مکافی نما لا۲ + ما۲ = ر ی، مستوی لا = صا اور اسطوانہ لا۲ + ما۲ = ۲ ا لا سے محدود مجسم کا حجم دریافت کرو۔

[جواب = ۲ $\int$ ۲ ا لا - لا۲ ... (لا۲ + ما۲)/ر فرلا فرما = ۳/۲ π ر۳]

(۵) بتاؤ کہ لا۲ + ما۲ = ص۲ اور لا۲ + ی۲ = ص۲ دو اسطوانوں کا مشترک حجم ۱۶ ص۳/۳ ہے۔

(۶) سطح (لا/ا)$^{\frac{1}{2}}$ + (ما/ب)$^{\frac{1}{2}}$ + (ی/ج)$^{\frac{1}{2}}$ = ۱ اور محددوں کے مستویوں سے محدود حجم کی قیمت دریافت کرو۔ [جواب = ا ب ج/۹۰

(۷) ثابت کرو کہ سطح لا$^{\frac{2}{3}}$ + ما$^{\frac{2}{3}}$ + ی$^{\frac{2}{3}}$ = ا$^{\frac{2}{3}}$ سے محدود جسم کا مکمل حجم ۴π ا۳/۳۵ ہے

[نوٹ :- کسی مطلوبہ خواص کے بموجب دُہرا تکمل تیار کرنے کے لیے ذیل کی ہدایات یاد رکھی جائیں :-

(۱) متعلقہ خطہ یا رقبہ جن منحنیوں سے محدود ہے ان کو مرتسم کیا جائے۔

(۲) رقبہ کے اندر کسی نقطہ ف (= لا، ما) پر رقبہ مف لا مف ما کا مستطیلی عنصر تیار کیا جائے۔

(۳) تفاعل ف (لا، ما) معلوم کر لیا جائے جس کو مف لا مف ما سے ضرب دینے سے مستطیلی عنصر رقبہ کے لیے مطلوبہ خاصیت حاصل ہو جاتی ہے۔

(۴) مطلوب تکملہ $\int\int$ ف (لا، ما) فرلا فرما ہے جو دیے ہوئے خطہ یا رقبہ کے اوپر محسوب کیا جاتا ہے جس طریقہ پر رقبہ دریافت کیا جاتا ہے اسی طریقہ پر تکمل کی ترتیب اور اس کے حدود معلوم کر لیے جاتے ہیں۔

۵ - رقبہ کے معیار اثر اور ہندسی مرکزوں کی تعین -

سولھویں باب میں ان کے چند مسائل اکہرے تکمل کے ذریعہ حل کر کے بتائے گئے ہیں۔ یہاں ہم ان کو دُہرے تکمل کی مدد سے حل کرینگے جو اکثر زیادہ سہولت کا

باعث ہے۔

چونکہ مستطیلی عنصر رقبہ کے لیے رقبہ کا معیارِ اثر محور مہا کے لحاظ سے لا مف لا ما ہے اور محور مہ لا کے لحاظ سے ما مف لا ما ہے

اس لیے پورے رقبہ کے لیے باب محولہ کی فصل ۵ کی ترقیم کے بموجب

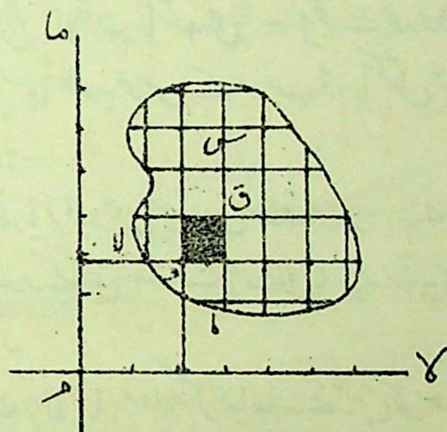
$$\text{م}_{\text{لا}} = \iint \text{ما فرلا فرما} \quad \text{اور} \quad \text{م}_{\text{ما}} = \iint \text{لا فرلا فرما} \quad \ldots\ldots (\text{ج})$$

رقبہ کا ہندسی مرکز محددوں

$$\bar{\text{لا}} = \frac{\text{م}_{\text{ما}}}{\text{رقبہ}}, \quad \bar{\text{ما}} = \frac{\text{م}_{\text{لا}}}{\text{رقبہ}} \quad \ldots\ldots (\text{د})$$

سے معلوم ہو جاتا ہے۔

(ج) میں تکملے علی الترتیب تفاعلوں ف (لا، ما) = ما اور ف (لا، ما) = لا کی قیمتوں کو رقبہ کے اوپر لے کر ظاہر کرتے ہیں۔



شکل ۱۰۹

کسی منحنی، محور لا اور دو معینوں سے محدود رقبہ (بالفاظِ دیگر "منحنی کے نیچے کے رقبہ") کے لیے رابطہ (ج) سے حسبِ ذیل نتائج اخذ کیے جاتے ہیں:-

$$\left.\begin{aligned} \text{م}_{\text{لا}} &= \int_{\text{و}}^{\text{ب}} \int_{0}^{\text{م}} \text{ما فرلا فرما} = \frac{1}{2} \int_{\text{و}}^{\text{ب}} \text{ما}^2 \,\text{فرلا} \\ \text{م}_{\text{ما}} &= \int_{\text{و}}^{\text{ب}} \int_{0}^{\text{م}} \text{لا فرلا فرما} = \int_{\text{و}}^{\text{ب}} \text{لا ما فرلا} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (1)$$

یہ ضابطے محولہ بالا فصل کے ضابطوں (۲) سے مطابق ہے۔ یاد رہے کہ (۱) میں ما منحنی پر کے نقطہ کا معین ہے اور اس کی قیمت لا کی رقموں میں منحنی کی مساوات سے معلوم کر لی جانی چاہئیے اور تکمّل سے پہلے متکمّل (integrand) میں تعویض کی جانی چاہیے۔

توضیحی مثال۔ باب ہذا کی ۳ کی توضیحی مثال ۲ میں جو رقبہ دریافت کیا گیا ہے (یعنے پہلے ربع میں نصف کعبی مکانی $ما^3 = لا^2$ اور خطِ مستقیم ما = لا سے محدود رقبہ) اس کا ہندسی مرکز دریافت کرو۔

حل۔ تکمّل کی ترتیب اور اس کے حدود مثال محولہ میں دریافت ہو چکے ہیں۔ پس بذریعہ (ج)

$$م_{لا} = \int_{0}^{1}\int_{ما}^{ما^{\frac{2}{3}}} ما\ فرما\ فرلا = \int_{0}^{1}\left(ما^{\frac{5}{3}} - ما^{2}\right) فرما = \frac{1}{24}$$

$$م_{ما} = \int_{0}^{1}\int_{ما}^{ما^{\frac{2}{3}}} لا\ فرلا\ فرما = \frac{1}{2}\int_{0}^{1}\left(ما^{\frac{4}{3}} - ما^{2}\right) فرما = \frac{1}{21}$$

چونکہ رقبہ = $\frac{1}{10}$ اس لیے ازروئے (د) $\bar{لا} = \frac{10}{21}$ اور $\bar{ما} = \frac{5}{12}$ جواب

۶۔ پاپس یا گلڈن کے مسئلے (Pappus or Guldin)

اس نام سے دو مفید ضابطے مشہور ہیں جو گردشی مجسموں کے حجموں اور منحنی سطحوں کا ان کی تراشوں کے ہندسی مرکزوں کے ساتھ رابطہ ظاہر کرتے ہیں۔

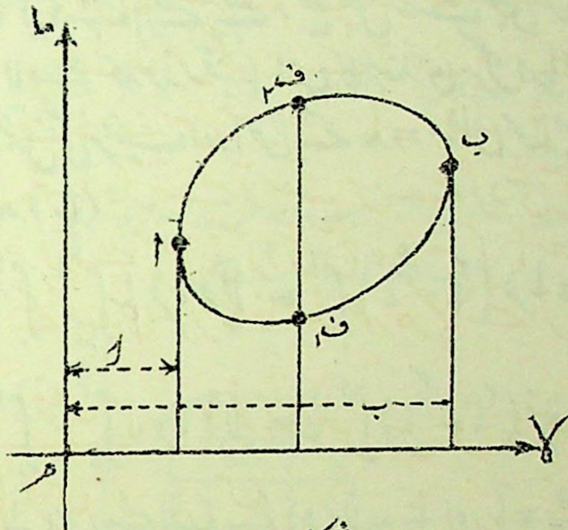
مسئلہ (۱) اگر ایک مستوی رقبہ کسی ایسے محور کے گرد گھمایا جاتا ہے جو رقبہ کے مستوی کے اندر واقع ہے۔ لیکن رقبہ کو قطع نہیں کرتا ہے، تو اس طرح پیدا ہونے والے گردشی مجسم کا حجم مستوی رقبہ اور اس کے ہندسی مرکز کے طے کردہ طول کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔

ثبوت۔ ۵ کے رابطہ (ج) سے شکل ۱۰۷ کے رقبہ اف$_2$ب ف$_1$ کے لیے

$$م_{لا} = \int_{ا}^{ب}\int_{ما_1}^{ما_2} ما\ فرلا\ فرما = \frac{1}{2}\int_{ا}^{ب} ما_2^{2}\ فرلا - \frac{1}{2}\int_{ا}^{ب} ما_1^{2}\ فرلا$$

اگر ع ف = ما اور ع ف۲ = ما۲ - اب ہر ر کے لیے اس کی قیمت مندرجہ رابطہ (د) فصل مذکور تعویض کرنے اور علامت مساوات کے دونوں جانب کے ارکان کو ۲π سے ضرب دینے سے حاصل ہوتا ہے

۲π آ س = π ∫ ما۲ فرلا - π ∫ ما۱ فرلا جس میں س = رقبہ



شکل ۱۰۷

بائیں جانب کے رکن کی پہلی رقم گردشی مجسم کا حجم ہے جو رقبہ تحت منحنی اف۲ب کے گھومنے سے پیدا ہوتا ہے اور دوسری رقم گردشی مجسم کا حجم ہے جو رقبہ تحت منحنی اف۱ب کے گھومنے سے پیدا ہوتا ہے۔ سیدھے جانب کا رکن رقبہ اور ہندسی مرکز کے طے کردہ طول کا حاصل ضرب ہے۔ پس مسئلہ (۱) ثابت ہو جاتا ہے۔ اور لکھا جاتا ہے

ح = ۲π آ س .... (۱)

مسئلہ (۲) جب کوئی بند منحنی ایک ایسے محور کے گرد گھمایا جاتا ہے جو منحنی (۱) کے مستوی کے اندر واقع ہے لیکن منحنی کو قطع نہیں کرتا ہے تو اس طرح پیدا ہونے والے حلقہ کی منحنی سطح ایک ایسے اسطوانہ کی

سطح کے مساوی ہے جس کا قاعدہ گھومنے والا منحنی ہے اور ارتفاع منحنی کے محیط کا طے کردہ طول ہے۔

ثبوت۔ یہ ثبوت اکہرے تکملہ کے ذریعہ بآسانی ثابت کیا جا سکتا ہے۔ شکل ۲۰۱ میں ف کے بالکل قریب منحنی کے محیط پر نقطہ فؔ تصور کیا جائے تو منحنی کے طول کا عنصر ف فؔ = مف س۔ منحنی جب محور مر لا کے گرد زاویہ مف طہ میں گھومتا ہے تو مف س سے پیدا ہونے والا

جزو رقبہ = ما مف طہ مف س جس میں ما = ف ع

جب منحنی پوری گردش کر چکتا ہے تو مف س سے گردشی سطح ۲π مامف س تیار ہوتی ہے اور پورے منحنی کی گردشی سطح = ۲π ∫ مامف س۔

منحنی کے محیط کے ہندسی مرکز کا فاصلہ محور مر لا سے اگر لہ قرار دیا جائے تو

$$\text{لہ} = \frac{\int \text{ما فرس}}{\int \text{فرس}} = \frac{\int \text{ما فرس}}{\text{س}} \quad \text{جس میں س = منحنی کا محیط}$$

اور ۲π لہ س = ۲π ∫ ما فرس

واضح ہے کہ ۲π لہ = منحنی کے ہندسی مرکز کا طے کردہ طول ہے۔

مثال۔ ایک لنگر چھلا رٔ نصف قطر والے دائرہ کے ایک ایسے خط کے گرد گھومنے سے بنتا ہے جو دائرہ کے مستوی میں اس کے مرکز سے فاصلہ ط پر واقع ہے تو پاپئیس کے مسئلوں سے

حلقہ کا حجم = π رٔ^۲ (۲π ط) = ۲π^۲ رٔ^۲ ط

" کی منحنی سطح = ۲π رٔ (۲π ط) = ۴π^۲ رٔ ط

مثالیں

مندرجہ ذیل منحنیوں سے محدود رقبہ کا ہندسی مرکز دریافت کرو:۔

(۱) ما = لا^۲ - ۲ لا - ۳، ما = ۲ لا - ۳ [جواب = ۲، - ۳/۵]

(۲) ما = ۶لا − لا^۲ ، لا + ما = ۶ [جواب = ۳ ۱/۲ ، ۵]

(۳) ثابت کرو کہ خطِ تدویر لا = ا (طہ − جب طہ)، ما = ا (۱ − جم طہ) کی ایک کمان کے نیچے کے رقبہ کا ہندسی مرکز (π ا ، ۵ا/۶) ہے۔

(۴) پاپس کا مسئلہ استعمال کرکے بتاؤ کہ نصف دائرہ کا ہندسی مرکز قطر سے فاصلہ ۴ص/۳π ہے جس میں ص دائرہ کا نصف قطر ہے۔

(۵) پاپس کے مسئلہ کے ذریعہ بتاؤ کہ ناقص لا^۲/ا^۲ + ما^۲/ب^۲ = ۱ کے پہلے ربع میں واقع رقبہ کا ہندسی مرکز (۴ا/۳π ، ۴ب/۳π) ہے۔

(۶) ایک ناقص اپنے محورِ اعظم کے ایک سرے پر کے خطِ مماس کے گرد گھومتا ہے۔ اس طرح جو جسم بنتا ہے اس کا حجم معلوم کرو۔
[جواب = ۲π^۲ ا^۲ ب]

(۷) ایک مربع اپنے ایک وتر کے متوازی خط کے گرد گھومتا ہے جو اس کے دوسرے وتر کے ایک سرے میں سے گزرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس طرح جو مجسم بنتا ہے اس کا حجم = π ا^۳ √۲ اور اس کی سطح کا رقبہ = ۴π ا^۲ √۲

(۸) ایک مثلث کے ضلعے ا، ب، ج ہیں اور وہ اپنے مستوی میں کے ایک خط کے گرد گھومتا ہے جس کے فاصلے اس کے ضلعوں کے وسطی نقطوں سے ھ۱، ھ۲، ھ۳ ہیں۔ بتاؤ کہ اس گردش سے جو مجسم بنتا ہے اس کی سطح = ۲π (ا ھ۱ + ب ھ۲ + ج ھ۳) ہے۔

اور اس کا حجم = ۲π/۳ (ھ۱ + ھ۲ + ھ۳) √(س (س − ا) (س − ب) (س − ج)) ہے،

جس میں س مثلث کا نصف محیط ہے۔

(۹) تکمل کے ذریعہ ایک قائم دائری مخروط کا حجم اور اس کی سطح کا رقبہ دریافت کرو جو ایک قائم الزاویہ مثلث کے اس کے زاویہ قائمہ بنانے والے ایک ضلع کے گرد گھومنے سے تیار ہوتا ہے۔

[جواب ۔ اگر قاعدہ کا نصف قطر = ص، ارتفاع = ع اور ترچھا بازو = ل تو

سطح کا رقبہ = ۲ ص ل اور حجم = ½ ۲ ص ع]

(۱۰) ثابت کرو کہ خطِ صنوبری (Cardioid) ر = ا (۱ - جم طہ) کا ہندسی مرکز اس کے ابتدائی خط پر مبداء سے ۵ا/۶ فاصلہ دور واقع ہے۔

۷ - سیالی دباؤ کا مرکز - سولھویں باب کی فصل

۴۳ میں انتصابی دیوار پر سیالی دباؤ کے تعیین سے بحث کی گئی تھی اور حاصل مجموعی دباؤ د کے لیے ضابطہ

د = و ∫ لا ما فرما اخذ کیا گیا تھا۔

جس میں لا فرما افقی پٹی کا رقبہ ہے جو سطح مائع سے عمق ما پر واقع ہے۔ یہاں ہم اس حاصل مجموعی دباؤ کا نقطۂ عمل (جو دباؤ کا مرکز کہلاتا ہے) دریافت کرنے کا طریقہ بیان کرینگے۔ چونکہ کسی محور کے گرد متوازی قوتوں کے معیارِ اثر کا حاصل جمع ان قوتوں کے حاصل مجموعہ کے معیارِ اثر کے مساوی ہے۔ اس لیے

∫ ما فرد = و ∫ ما لا فرما = ما د جس میں ما سطح مائع سے دباؤ کے مرکز کا عمق ہے۔

پس ما = ∫ ما² فرس / ∫ ما فرس .... (۱)

[واضح ہو کہ فرس = عنصر رقبہ لا فرما ہے]

اس ضابطہ میں نسب نما رقبہ متعلقہ کا بلحاظ محور مر لا معیارِ اثر ہے اور شمار کنندہ رقبہ مذکور کا محور مذکور کے گرد جمود کا معیار اثر ہے جو عموماً ج سے تعبیر کیا جاتا ہے۔ اور چونکہ

∫ ما فرس = ا م لا اس لیے

ما = مج لا / ھ لا .... (۴)

جس میں مج لا سے مراد محور لا کے گرد جمود کا معیارِ اثر ہے۔

۸۔ کسی محور کے گرد ایک رقبہ کے جمود کا معیارِ اثر میکانیات میں بڑی اہمیت رکھتا ہے۔
شکل ۱۰۶ کے مطالعہ سے معلوم ہوگا کہ

مج لا = ∫∫ ما^۲ فرلا فرما اور مج ما = ∫∫ لا^۲ فرلا فرما .... (۵)

اور گردشی نصف قطر صلا، صما کی تعریف (جو علی الترتیب مج لا، مج ما سے متعلق ہیں) ذیل کے ضابطوں میں مضمر ہے:۔

صلا^۲ = ھلا / رقبہ اور صما^۲ = ھما / رقبہ .... (۶)

(۵) ہیں جن تفاعلوں کے تکملے دیے ہوئے رقبہ کے اوپر محسوب کیے جاتے ہیں علی الترتیب ف (لا، ما) = ما^۲ اور ف (لا، ما) = لا^۲ ہیں۔

جب رقبہ کسی "منحنی کے تحت" ہوتا ہے یعنی منحنی، محور لا اور دو معینوں سے محدود ہوتا ہے تو

مج لا = ∫ب∫ ما^۲ فرلا فرما = ۱/۳ ∫ب ما^۳ فرلا
اور مج ما = ∫ب∫ لا^۲ فرلا فرما = ∫ب لا^۲ ما فرلا ..... (۱)

ان مساواتوں میں ما منحنی پر کے کسی نقطہ کا معین ہے اور اس کی قیمت اس منحنی کی مساوات سے دریافت کرکے تکمل میں تعویض کی جاتی ہے۔

توضیحی مثال۔ مکافی ما^۲ = ۲ف لا کے قطعہ ب م ج

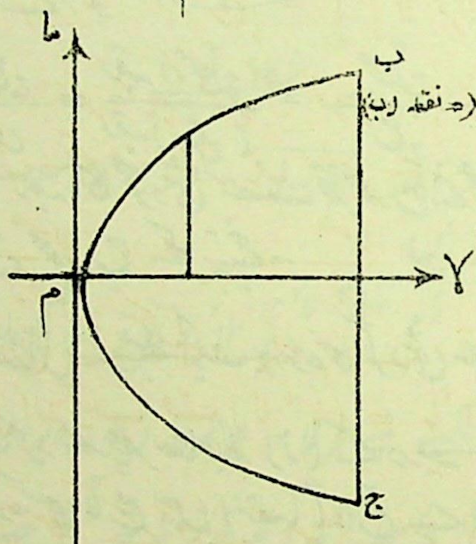
(دیکھو شکل ۱۰۸) سے متعلق مج$_{\text{لا}}$ اور مج$_{\text{ما}}$ دریافت کرو۔

[مکافی کے نقطہ ب کے محدد م ا = ا اور ا ب = ب]

حل - نقطہ ب کے محددوں کو مکافی کی مساوات میں تعویض کرنے سے $\text{ب}^2 = 2\,\text{ف ا}$ حاصل ہوتا ہے جس سے $2\,\text{ف} = \frac{\text{ب}^2}{\text{ا}}$

$$\text{پس}\quad \text{ما}^2 = \frac{\text{ب}^2\,\text{لا}}{\text{ا}} \qquad \therefore\ \text{ما} = \frac{\text{ب}\,\text{لا}^{\frac{1}{2}}}{\text{ا}^{\frac{1}{2}}}$$

پہلے ربع میں واقع رقبہ تحتِ مکافی (م ف ب) کے جمود کے معیار اثر



شکل ۱۰۸

مطلوبہ جمود کے معیار اثروں کے نصف ہیں - پس فصل ہذا کے ضابطے (۱) استعمال کرنے سے

$$\frac{1}{2}\,\text{مج}_{\text{لا}} = \frac{1}{3}\int_0^{\text{ا}} \frac{\text{ب}^3}{\text{ا}^{\frac{3}{2}}}\,\text{لا}^{\frac{3}{2}}\,\text{فرلا} = \frac{2}{15}\,\text{ا ب}^3 \quad \therefore\ \text{مج}_{\text{لا}} = \frac{4}{15}\,\text{ا ب}^3$$

$$\frac{1}{2}\,\text{مج}_{\text{ما}} = \int_0^{\text{ا}} \text{لا}^2\,\frac{\text{ب}}{\text{ا}^{\frac{1}{2}}}\,\text{لا}^{\frac{1}{2}}\,\text{فرلا} = \frac{2}{7}\,\text{ا}^3\,\text{ب} \quad \therefore\ \text{مج}_{\text{ما}} = \frac{4}{7}\,\text{ا}^3\,\text{ب}$$

قطعہ کے رقبہ س کے لیے

$$\frac{1}{2}\,\text{س} = \int_0^{\text{ا}} \text{ما}\,\text{فرلا} = \int_0^{\text{ا}} \frac{\text{ب}}{\text{ا}^{\frac{1}{2}}}\,\text{لا}^{\frac{1}{2}}\,\text{فرلا} = \frac{2}{3}\,\text{ا ب}$$

$\therefore \text{س} = \frac{4}{3}\,\text{ل ب}$

اس لیے ضابطہ (و) سے $\text{ص}_{\text{لا}}^2 = \frac{\text{مج}_{\text{لا}}}{\text{س}} = \frac{1}{5}\,\text{ب}^2$ اور $\text{مج}_{\text{لا}} = \frac{1}{5}\,\text{س ب}^2$

اور $\text{ص}_{\text{ما}}^2 = \frac{\text{مج}_{\text{ما}}}{\text{س}} = \frac{3}{7}\,\text{ل}^2$ اور $\text{مج}_{\text{ما}} = \frac{3}{7}\,\text{س ل}^2$

سیالی دباؤ کے مرکز سے متعلق جو ضابطہ (۲) اخذ کیا گیا ہے (یعنی $\text{آ} = \frac{\text{مج}_{\text{لا}}}{\text{ھ}_{\text{س لا}}}$) اس میں محور م لا مائع کی سطح میں واقع ہے۔ اگر تعمیم کی خاطر اس محور کو ح سے تعبیر کیا جائے تو

$$\text{آ} = \frac{\text{مج}_{\text{ح}}}{\text{ھ}_{\text{ح}}} = \frac{\text{رقبہ}\,(\text{ص}_{\text{ح}}^2)}{\text{رقبہ}\,(\text{ع}_{\text{ح}})} = \frac{\text{ص}_{\text{ح}}^2}{\text{ع}_{\text{ح}}} \quad \ldots\ldots\ (\text{ز})$$

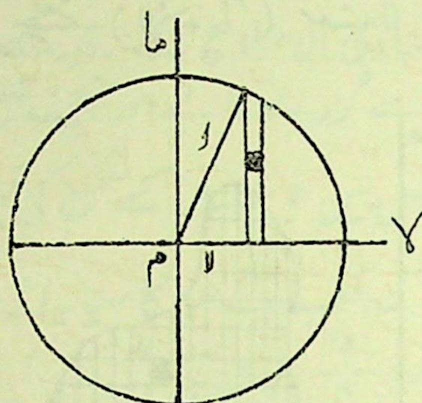
جس میں $\text{ص}_{\text{ح}}$ = رقبہ کا گردشی نصف قطر محور ح کے گرد اور $\text{ع}_{\text{ح}}$ = رقبہ کے ہندسی مرکز کا عمق محور ح کے نیچے۔

توضیحی مثال۔ پہلے ایک دائرہ کا گردشی معیار اثر اس کے ایک قطر کے گرد دریافت کرو اور پھر ضابطہ (ز) کے ذریعہ اس کے دباؤ کا مرکز معلوم کرو جبکہ دائرہ کسی مائع میں انتصاباً واقع ہے اور اس کا مرکز سطح مائع سے عمق ع پر ہے۔

حل۔ فرض کرو دائرہ کا نصف قطر ل ہے، م لا، م ما اس کے دو علی القوائم محور ہیں اور جمود کا معیارِ اثر محور م ما کے گرد مطلوب ہے۔ دیکھو شکل ۱۰۹۔

دائرہ کا، جمود کا معیارِ اثر م ما کے گرد $\iint \text{لا}^2\,\text{فرلا فرما}$ ہے جو پورے دائرہ کے اوپر محسوب کیا جاتا ہے۔ ہم اس کے ایک ربع کے لیے اس جمود کے معیار اثر کی قیمت دریافت کرینگے اور چونکہ یہ ہر ربع کے لیے مساوی ہے اس کو ۴ سے ضرب دینے سے پورے دائرہ کے لیے قیمت نکل آئیگی۔

دائرہ کی مساوات لا^۲ + ما^۲ = ر^۲ ہے پس پہلے تکمل میں ما کے لیے



شکل ۱۰۹

حدود تکمل ہیں صفر اور √(ر^۲ - لا^۲) اور پھر دوسرے تکمل میں لا کے لیے حدود صفر اور ر ہیں

لہذا مج لا / ۴ = ∫ ∫ لا^۲ فرلا فرما = ∫ لا^۲ √(ر^۲ - لا^۲) فرلا

لا = ر جب طہ لکھنے سے فرلا = ر جم طہ فرطہ اور حدود ہوجاتے ہیں صفر اور π/۲

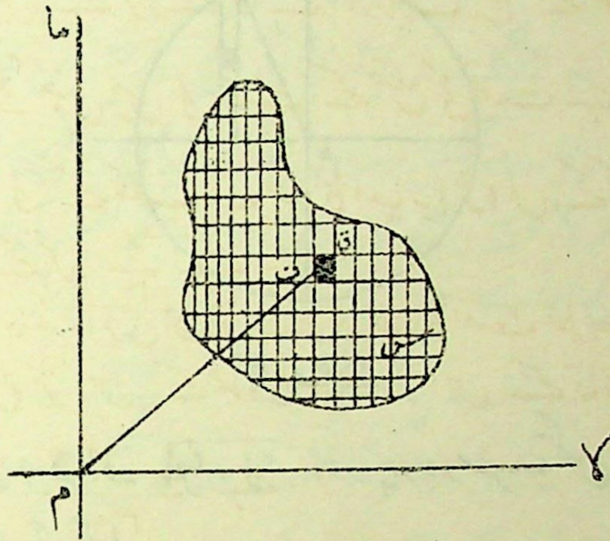
پس مج لا / ۴ = ∫ ر^۲ جب^۲ طہ ر جم طہ ر جم طہ فرطہ = ∫ جب^۲ طہ جم^۲ طہ فرطہ = π ر^۴ / ۱۶

∴ مج لا = π ر^۴ / ۴ = (π ر^۲) ر^۲ / ۴

لہذا ضابطہ (ز) سے دائرہ کے دباؤ کا مرکز سطح مایع سے عمق ما = (ر^۲/۴) / ع ح = ر^۲ / ۴ ع ح پر واقع ہے۔

۹ - قطبی جمود کا معیار اثر — رقبہ س مستوی لا م ما کے اندر واقع ہے۔ (دیکھو شکل ۱۱۰)۔ اس کے عنصری مستطیل ف ا ق

کے جمود کا معیار اثر مبدا م کے گرد رقبہ ف ق مضروب فاصلہ م ف کا مربع ہے۔ یعنے (لا^2 + ما^2) مف لا مف ما ہے۔



شکل ۱۱۰

پس پورے رقبہ کے لیے مج$_م$ = ∫∫(لا^2 + ما^2) فرلا فرما ہے لیکن علامت مساوات کے بائیں جانب کا جملہ

= ∫∫ لا^2 فرلا فرما + ∫∫ ما^2 فرلا فرما = مج$_{لا}$ + مج$_{ما}$

پس کسی رقبہ کے جمود کا معیارِ اثر مبدا کے گرد، مساوی ہے حاصل جمع اس رقبہ کے جمود کے معیار ہائے اثر کے جو محور لا اور محور ما کے گرد لیے جائیں

مثالیں

ثابت کرو کہ

(۱) ناقص $\frac{لا^2}{ا^2} + \frac{ما^2}{ب^2} = ۱$ کے لیے مج$_{لا}$ = $\frac{\pi ب^2}{۴}$

اور مج ا $=$ س ل² / ۴ جس میں س = رقبہ

(۲) مثلث مساوی الاضلاع کے رقبہ کے جمود کا معیار اثر اس کے ہندسی مرکز میں سے گزرنے والے اور ایک ضلع کے متوازی محور کے گرد = ۳√ ل⁴ / ۹۶ جس میں ل مثلث کے ضلع کی قیمت ہے۔

(۳) کنارہ ل کے مکعب کے جمود کا معیار اثر اس کے کسی ایک پہلو کے مستوی کے گرد ل⁵ / ۳ ہے۔

(۴) ایک قائم دائری مخروط کے قاعدہ کا نصف قطر = ص اور ارتفاع = ع تو اس کے جمود کا معیار اثر اس کے قاعدہ کے مستوی کے لحاظ سے π ص² ع³ / ۳۰ ہے

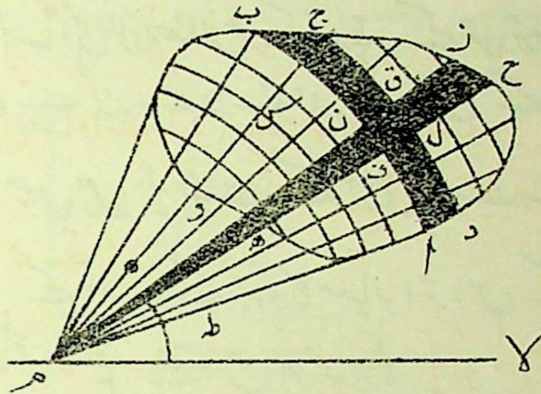
(۵) ایک مثلث شکل کا پانی روکنے کا دروازہ ہے جس کا قاعدہ پانی کی سطح کو مس کرتا ہے اور راس پانی کے اندر قاعدہ کے انتصاباً نیچے واقع ہے۔ دروازہ پر کے دباؤ کا مرکز دریافت کرو۔

۱۰ - قطبی محدد - مستوی رقبہ - جب کسی رقبہ کو محدود کرنے والے منحنیوں کی مساواتیں قطبی محددوں میں دی جاتی ہیں تو شکل ۱۱۱ کی طرح اس کو مف طہ مساوی زاویۂ میل والے سمتی نیمقطروں سے تقسیم کیا جاتا ہے اور پھر مر کو مبداء مان کر باہمدیگر مف ر مساوی نیمقطری فصل والے دائروں سے تقسیم کیا جاتا ہے۔ اس طرح رقبہ س ایک کثیر تعداد مستطیل ٹکڑوں میں منقسم ہو جائیگا جیسے ف ا ن ق ر = مف س ہے۔

مف س = ½ (ر + مف ر)² مف طہ − ½ ر² مف طہ

= ر مف ر مف طہ + ½ مف ر² مف طہ .... (۱)

اب فصل (۳) کے تفاعل ف (لا، ما) کے عوض قطبی محددوں والا ایک تفاعل استعمال



شکل ۱۱۱

کرنا ہوگا - فرض کرو کہ یہ فا (ر، طہ) ہے - تو فصل (۳) کے عمل کے بموجب ایک نقطہ (ر، طہ) جزو رقبہ مف س کا منتخب کرکے خطہ س کے اندر ہر مف س کے لیے حاصل ضرب فا (ر، طہ) مف س تیار کیا جاتا ہے اور ان سبھوں کو جمع کرلیا جاتا ہے اور بالآخر مف ر ← ۰ اور مف طہ ← ۰۔ ایسی تحدید کی صورت میں نصاب ہذا سے بلند تر نصاب کی کتابوں میں بتایا جاتا ہے کہ مف س کی بجائے صرف ر مف ر مف طہ ہی لکھا جاسکتا ہے - پس

نہا ∑ فا (ر، طہ) ر مف ر مف طہ = ∫∫ فا (ر، طہ) ر فر ر فر طہ ... (۲)
مف ر ← ۰
مف طہ ← ۰

اور یہ جملہ خطہ س کے اوپر تفاعل فا (ر، طہ) کا دُہرا تکملہ کہلاتا ہے اور وہ متواتر تکملوں کے ذریعہ محسوب کیا جاتا ہے -

(۲) کی سادہ ترین صورت خطہ س کے رقبہ کی تعیین ہے یعنے

رقبہ س = ∫∫ ر فر طہ فر ر = ∫∫ ر فر ر فر طہ .... (ز)

جبکہ رقبہ کسی منحنی اور اس کے دو سمتی نیم قطروں سے محدود ہوتا ہے تو (ز) کی

پہلی مساوات سے حاصل ہوتا ہے۔

$$س = \int^{ب}\int^{م} سا\ فرطہ\ فرسا = \frac{۱}{۲}\int_{ا}^{ب} سا^{۲}\ فرطہ$$

جو تیرہویں باب کی مساوات (د) سے مطابق ہوتا ہے۔

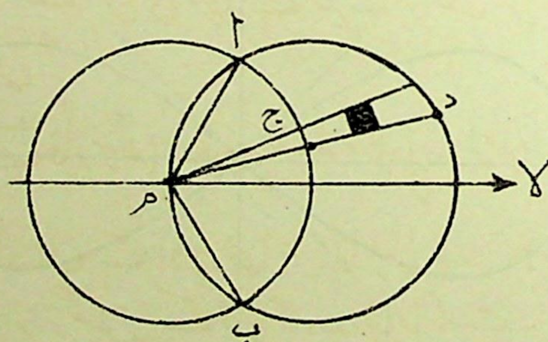
قطبی محددوں میں دُہرے تکملے ذیل کی دو صورتوں میں سے کسی ایک صورت کے ہوتے ہیں:—

$\int\int فا(سا، طہ)\ سا\ فرطہ\ فرسا$ یا $\int\int ما(سا، طہ)\ سا\ طہ$ ...(۳)

توضیحی مثال۔ دائرہ سا = ۲ ص جم طہ کے اندر اور دائرہ سا = ص کے باہر کا رقبہ دریافت کرو۔

حل۔ پہلے دُہرے تکملہ کے لیے حدود معلوم ہونے چاہییں جن سے رقبۂ مذکور محدود ہے۔

دائروں کے تقاطع کے نقطے ا $(= سا، \frac{\pi}{۳})$ اور ب $(= سا، -\frac{\pi}{۳})$ ہیں۔ پہلی صورت مندرجہ (۳) استعمال کی جائے۔



شکل ۱۱۲

مطلوبہ حدود ہیں سا = م ج = ص اور سا = م د = ۲ ص جم طہ اور طہ کے لیے ہیں $\frac{\pi}{۳}$ اور $-\frac{\pi}{۳}$۔

پس رقبہ س $= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \int_{\text{ص}}^{\text{۲ص جم ط}}$ ر فرط فرر $= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2}$ (۴ص² جم² ط - ص²) فرط

= ص² $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$ = جواب

قطبی محددوں سے متعلق سوالات حل کرنے میں مندرجۂ ذیل ضابطے استعمال ہوتے ہیں۔ اور یہ بآسانی اخذ کیے جا سکتے ہیں :-

(۱) $\text{م}_{\text{ل}}$ = ∫∫ ر² جب ط فرر فرط

(۲) $\text{م}_{\text{ا}}$ = ∫∫ ر² جم ط فرر فرط

(۳) $\text{مج}_{\text{لا}}$ = ∫∫ ر³ جب² فرر فرط

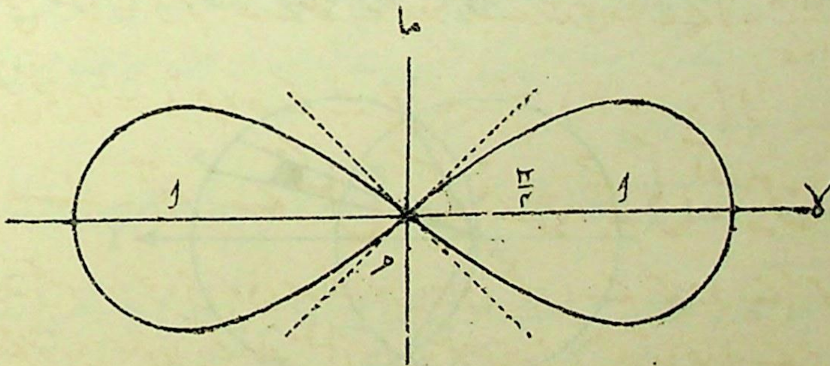
(۴) $\text{مج}_{\text{ما}}$ = ∫∫ ر³ جم² فرر فرط

(۵) $\text{مج}_{\text{م}}$ = ∫∫ ر³ فرر فرط

توضیحی مثال - دوچشمی منحنی (یا ایٹرن) (Lemniscate)

ر² = ا² جم ۲ط کے ایک حلقہ کا ہندسی مرکز معلوم کرو۔

حل - چونکہ م لا ایک محور تشاکل ہے اس لیے آ یعنے ہندسی مرکز کا معین = ۰



شکل ۱۱۳

رقبہ س کی تعیین کے لیے $\frac{1}{2}$ س $= \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \int_{0}^{\text{ا}\sqrt{\text{جم ۲ط}}}$ ر فرط فرر

$= \frac{\text{ا}^2}{2} \int_{0}^{\frac{\pi}{4}}$ جم ۲ط فرط $= \frac{\text{ا}^2}{4}$

۱/۲ ھ۱ = ∫ب^(π/۲) ∫ب^(ر ۱/جم ۲ ط) ر۲ جم ط فرط فر

= ۱/۳ ∫ب^(π/۲) ر۳ (۱ - ۲ جب۲ ط)^(۳/۲) جم ط فرط

جب ط = ۱/۲ ی √۲ لکھو تب ۱/۲ ھ۱ = ر۳ √۲/۶ ∫ب^۱ (۱ - ی۲)^(۳/۲) فری = π/۳۲ ر۳ √۲

∴ لاَ یعنے ہندسی مرکز کا مقطوعہ = ھ۱/س = π/۸ ر √۲ = جواب

مثالیں

ثابت کرو کہ

(۱) دائرہ ر = ۲ ص جم ط سے محدود خطہ کے اوپر مجَ = ۳π ص^۲ / ۲

(۲) دائرہ ر = ۳ جم ط کے اندر اور دائرہ ر = جم ط کے باہر کا رقبہ = ۲π

(۳) دائرہ ر = ۳ جم ط کے اندر اور خطِ صنوبری ر = ۱ + جم ط کے باہر کا رقبہ = π

(۴) منحنی ر = ا جم ۲ ط کے حلقہ سے محدود رقبہ کے ہندسی مرکز کے لیے لاَ = ۱۲۸ √۲ ا / ۱۰۵π

(۵) دو شیمی منحنی ر۲ = ا۲ جم ۲ ط کے لیے مج۱ = س/۴۸ (۳π - ۸) ا۲

۱۰ ۔ تہرے تکمّل کے ذریعہ حجم کی تعیین ۔

فرض کرو کہ مجسم (جو دی ہوئی مساواتوں والی سطحوں سے محدود ہے) محدّد مستویوں کے متوازی مستویوں کے ذریعہ مستطیلی متوازی السطوح عناصر میں تقسیم کیا جاتا ہے جن کے ابعاد مف ی مف ما اور مف لا ہیں پس عنصری حجم مف ی مف ما مف لا ہے

پہلے ایک محدّد محور کے متوازی کالم (Column) کے تمام عناصر کو جمع کرلو پھر ایسے تمام کالموں کو جوڑ لو جو ایک محدّد مستوی کے متوازی تراش کے اندر (جس میں محور مذکور شامل ہے) واقع ہیں ۔ اور بالآخر مجسم زیر بحث

کے اندر کی ایسی تمام تراشوں کو جمع کر کے دی ہوئی سطحوں سے محدود جسم کے کے جملہ عناصر کو جوڑ لو۔ تب حجم ح اس تہرے مجموعہ کی انتہا ہوگی جبکہ مف ی، مف ما اور مف لا ہر ایک بطور انتہا صفر کو پہنچیگا۔ یعنے

$$\text{ح} = \lim_{\substack{\text{مف لا}\to 0\\ \text{مف ما}\to 0\\ \text{مف ی}\to 0}} \sum\sum\sum \text{مف لا مف ما مف ی} \quad \ldots\ (۱)$$

جبکہ عمل تجمیع پورے جسم پر جو دی ہوئی سطحوں سے محدود ہے کیا جاتا ہے۔ اس انتہا کو تعبیر کیا جاتا ہے بذریعہ

$$\text{ح} = \iiint_{\text{خ}} \text{فرلا فرما فری} \quad \ldots\ldots\ldots\ (\text{ح})$$

۳۔ اصول کی توسیع سے (ح) کے متعلق کہا جاتا ہے کہ وہ تفاعل (لا، ما، ی) = ۱ کا پورے خطہ پر تکمل کرنے کا نتیجہ ہے۔ زیادہ عام مسائل میں لا، ما، ی کے کسی متغیر تفاعل کو کسی دیئے ہوئے خطہ خ میں تکمل کرنے کی ضرورت پیش آتی ہے اور اس کو طریق کتابت ذیل سے ظاہر کرتے ہیں :—

$$\iiint_{\text{خ}} \text{ف}(\text{لا، ما، ی})\ \text{فرلا فرما فری} \quad \ldots\ldots\ (۲)$$

نصاب ہذا سے بلند تر معیار کی کتابوں میں بتایا جاتا ہے کہ تہرا تکملہ (۲) متواتر عمل تکمل سے محسوب کیا جاتا ہے۔ اس کے حدود کی تعیین کا وہی طریقہ ہے جو مساوات (ح) کے لیے مستعمل ہے۔

توضیحی مثال۔ مجسم ناقص نما $\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2} + \frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2} + \frac{\text{ی}^2}{\text{ج}^2} = ۱$ کا حجم دریافت کرو جو محددوں کے پہلے ہشتی حصہ میں واقع ہے۔

حل۔ شکل ۱۱۴ میں یہ حجم م - ا ب ج بتایا گیا ہے اس کی حائط سطحوں کی مساواتیں حسب ذیل ہیں :—

$$(۱) \quad \frac{\text{لا}^۲}{\text{ا}^۲} + \frac{\text{ما}^۲}{\text{ب}^۲} + \frac{\text{ی}^۲}{\text{ج}^۲} = ۱ = (\text{سطح ا ب ج})$$

$$(۲) \quad \text{ی} = ۰ = (\text{مستوی م ا ب})$$

$$(۳) \quad \text{ما} = ۰ = (\text{مستوی م ا ج})$$

$$(۴) \quad \text{لا} = ۰ = (\text{مستوی م ب ج})$$

ف ق ایک عنصری متوازی السطوح ہے جس کے ابعاد مف ی مف ما مف لا میں

شکل ۱۱۴

جسم کا اس کے مماثل ٹکڑوں میں تقسیم ہونا تصور کیا جاتا ہے۔
پہلے بلحاظ ی تکمل کرکے ایک مینار کے عناصر جمع کر لیے جاتے ہیں۔ اس
تکمل میں ی کے حدود صفر اور $\text{ج}\sqrt{۱ - \frac{\text{لا}^۲}{\text{ا}^۲} - \frac{\text{ما}^۲}{\text{ب}^۲}}$ ہیں جو (۲) اور (۱) کے

حل سے علی الترتیب مستنبط ہوتے ہیں۔

پھر ایسے میناروں کو ایک تراش مثلاً د ھ و س ک ل میں جوڑ لینے کے لیے بلحاظ ما تکمل کیا جاتا ہے۔ اس تکمل میں ما کے حدود صفر اور $\text{ب}\sqrt{1-\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}}$ ہیں جو (۳) اور منحنی ا س ب کی مساوات $\left(\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}+\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}=1\right)$ کو حل کرنے سے حاصل ہوتے ہیں آخر میں ایسی تمام تراشوں کو اکٹھا کر لینے کے لیے بلحاظ لا تمام خط م ا ب ج میں تکمل کیا جاتا ہے جس کے لیے لا کے حدود صفر اور ا ہیں

$$\text{پس مطلوبہ حجم ح} = \int_0^{\text{ا}}\int_0^{\text{ب}\sqrt{1-\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}}}\int_0^{\text{ج}\sqrt{1-\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}-\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}}} \text{فرلا فرما فری}$$

$$= \text{ج}\int_0^{\text{ا}}\int_0^{\text{ب}\sqrt{1-\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}}}\left(1-\frac{\text{لا}^2}{\text{ا}^2}-\frac{\text{ما}^2}{\text{ب}^2}\right)^{\frac{1}{2}} \text{فرلا فرما}$$

$$= \frac{\pi\,\text{ج ب}}{4\,\text{ا}^2}\int_0^{\text{ا}}(\text{ا}^2-\text{لا}^2)\,\text{فرلا} = \frac{\pi\,\text{ا ب ج}}{3} = \text{جواب}$$

مثالیں

(۱) تہرے تکمل سے چار سطحی مجسم کا حجم دریافت کرو جو محدد مستویوں اور مستوی $\frac{\text{لا}}{\text{ا}}+\frac{\text{ما}}{\text{ب}}+\frac{\text{ی}}{\text{ج}}=1$ سے محدود ہے　　[جواب $= \frac{\text{ا ب ج}}{6}$

(۲) مندرجۂ ذیل سطوح سے محدود مجسم کا حجم معلوم کرو:-

$\text{ی} = 4-\text{لا}^2-\frac{1}{4}\text{ما}^2$ اور $\text{ی} = 3\,\text{لا}^2+\frac{1}{4}\text{ما}^2$　　[جواب $= 4\pi\sqrt{2}$

(۳) ص نصف قطر کے کرہ کا مرکز ایک قائم دائری اسطوانہ کی سطح پر ہے جس کے

قاعدہ کا نصف قطر $\frac{ص}{۲}$ ہے۔ کُرّہ سے اس طرح اسطوانہ کا جو حصہ قطع ہو جاتا ہے اس کا حجم دریافت کرو [جواب = $\frac{۲}{۳}\left(\pi - \frac{۴}{۳}\right)ص^{۳}$

(۴) ثابت کرو کہ مجسم زائدی مکافی نما (Hyperbolic paraboloid) ج ی = لا ما، مستوی لا ما اور مستویاں لا = $ل_{۱}$، لا = $ل_{۲}$، ما = $ب_{۱}$، ما = $ب_{۲}$ سے محدود حجم = $\frac{(ل_{۲}^{۲} - ل_{۱}^{۲})(ب_{۲}^{۲} - ب_{۱}^{۲})}{۴ج}$ ہے۔

(۵) مجسم مکافی نما $ما^{۲} + ی^{۲} = ۴ ل لا$ مکافی اسطوانہ $ما^{۲} = ل لا$ اور مستوی لا = ۳ل سے محدود حجم = $(۶\pi + ۹\sqrt{۳})\,ل^{۳}$ ہے۔

بائیسواں باب

معمولی تفرقی مساواتیں

ا - ہر ایک سائنس میں جب کبھی دو یا اس سے زیادہ امور کا باہمی تعلق مصرحہ حالات کے تحت ان کی ایک دوسرے کے لحاظ سے تبدیلی کی شرح کے ذریعہ ظاہر کیا جاتا ہے تو عموماً تفرقی مساواتیں استعمال کی جاتی ہیں جو احصاء کے مشتقات یا تفرقوں پر مشتمل ہوتی ہیں ان مساواتوں کو حل کرکے متغیروں کا باہمی رشتہ دریافت کیا جاتا ہے۔ بطور مثال

فر ما = فہ (لا) فر لا

ایک آسان تفرقی مساوات ہے۔ اس میں لا اور ما کا درمیانی رشتہ معلوم کرنے کے لیے صرف عمل تکمل کی ضرورت ہے۔ تفرقی مساواتوں کی عام تحقیق بذات خود ایک مبسوط علم ہے جس کا اصل منشاء و مقصد یہ ہے کہ مختلف قسم کی مساواتوں کا مطالعہ کرکے ایسے طریقے دریافت کیے جائیں جن سے ان مساواتوں کے متغیروں کے باہمی تعلقات معلوم ہو جائیں۔

معمولی تفرقی مساواتوں سے مراد ایسی مساواتیں ہیں جن میں جزوی مشتقات یا تفرقے شریک نہیں ہیں۔ یہاں ہم صرف اس نوع کی مساواتوں سے بحث کرینگے۔

تفرقی مساوات کے رُتبہ سے مراد اس کے سب سے بلند مشتق کا رتبہ ہے۔

تفرقی مساوات کے درجہ کا مفہوم اس کے بلند ترین رتبہ کے مشتق کا درجہ ہے۔ مثلاً

مساوات $\left(\frac{\text{فر}^2 \text{ما}}{\text{فر لا}^2}\right)^3 + ۵ \left(\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}\right)^4 - \text{ما} = ۰$

دوسرے رتبہ اور تیسرے درجہ کی ہے۔

۲۔ تفرقی مساواتوں کا حصول۔

مساوات ما = ا جب لا .... (۱)

پر غور کرو۔ اس میں صرف ایک اختیاری مستقل ا ہے۔ اس کو لا انتہا تعداد قیمتیں دی جا سکتی ہیں اور ان میں سے ہر ایک قیمت کے لیے مساوات مذکور ایک منحنی کو تعبیر کرتی ہے۔ اس لحاظ سے ایک مساوات جس میں ایک واحد اختیاری مستقل شامل ہے منحنیوں کے ایک واحد نامتناہی خاندان کی نمائندہ ہے۔ تفرقی مساوات جو ایک ہی خاندان کے منحنیوں کی نمائندگی کرتی ہے ا کو اس طرح ساقط کرنے سے حاصل ہوتی ہے:—

$$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ا جم لا}،\quad \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{ما}}{\text{جب لا}} \text{ جم لا}$$

$$\therefore \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} - \text{ما مم لا} = ۰ \quad .... (۲)$$

مساوات (۱) تفرقی مساوات (۲) کی ابتدائی (Primitive) کہلاتی ہے۔

بطور ایک دوسری مثال ما = ا لوگ لا + ب .... (۳)

پر غور کرو۔

ا کی ایک خاص قیمت (بالفرض ا۔) کے لیے ب کو قیمتوں کی ایک

نا متناہی تعداد دی جا سکتی ہے اور قیمتوں کے ہر جفت یا جوڑ (ا، ب) کے لیے مساوات (۳) ایک منحنی کو تعبیر کرتی ہے۔ اسی طرح ب کی کسی خاص قیمت ب کے لیے ا کو قیمتوں کی ایک نا متناہی تعداد دی جا سکتی ہے جن میں سے ہر ایک ایک منحنی کی نمائندہ ہے۔ جب کسی مساوات میں دو اختیاری مستقل شریک ہوتے ہیں تو اس کی نسبت کہا جاتا ہے کہ وہ منحنیوں کے ایک دُہرے نا متناہی خاندان کی نمائندہ ہے۔ مساوات (۳) منحنیوں کے جس قبیلہ کو تعبیر کرتی ہے اسی قبیلہ کو تعبیر کرنے والی تفرقی مساوات ا اور ب کے اسقاط سے اس طرح حاصل کی جا سکتی ہے :-

$$\frac{\text{فرا}}{\text{فرلا}} = \frac{\text{ا}}{\text{لا}} \text{ ، } \frac{\text{فر}^{2}\text{ا}}{\text{فرلا}^{2}} = \frac{\text{ا}}{\text{لا}^{2}} \qquad \text{پس} \quad \frac{\text{فر}^{2}\text{ا}}{\text{فرلا}^{2}} = \frac{\frac{\text{فرا}}{\text{فرلا}}}{\text{لا}}$$

$$\text{اور} \quad \text{لا}\,\frac{\text{فر}^{2}\text{ا}}{\text{فرلا}^{2}} + \frac{\text{فرا}}{\text{فرلا}} = 0 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (۴)$$

مساوات (۳) تفرقی مساوات (۴) کی ابتدائی (Primitive) ہے۔

دونوں مندرجۂ بالا مثالوں میں تفرقی مساوات جملہ اختیاری مستقلوں کو ساقط کر کے حاصل کی گئی ہے، اور اس لیے اس میں ایسا مشتق شریک ہے جس کا رتبہ ابتدائی مساوات کے اختیاری مستقلوں کی تعداد کے مساوی ہے۔ عام طور پر ثابت کیا جا سکتا ہے کہ ن اختیاری مستقل رکھنے والی ابتدائی مساوات کی تفرقی مساوات میں ن ہی درجہ کا مشتق ہوتا ہے اس سے بلند تر درجہ کا نہیں ہوتا۔

مثالیں

مندرجۂ ذیل ابتدائی مساواتوں کی تفرقی مساواتیں حاصل کرو :-

(۱) $\text{لا}^{2} + (\text{ا} - \text{ب})^{2} = \text{ص}^{2}$ [جواب $\text{لا}\,\frac{\text{فر}^{2}\text{ا}}{\text{فرلا}^{2}} - \left(\frac{\text{فرا}}{\text{فرلا}}\right)^{3} - \frac{\text{فرا}}{\text{فرلا}} = 0$

(۲) ما = جب لا   [جواب فرما/فرلا - √(۱-ما۲)/لا جب^-۱ ما = ۰

(۳) ما = عو^لا   [جواب فرما/فرلا = - ما لوک ما/لا = ۰

(۴) ما = مس^-۱ لا   [جواب فرما/فرلا - جب ۲ ما/۲ لا = ۰

(۵) س = ل(۱- جم طہ)   [جواب فرس/فرطہ - س مم طہ/۲ = ۰

۳ - پہلے رتبہ اور پہلے درجہ کی تفرقی مساواتیں -

ایسی مساوات

ھ فرلا + ن فرما = ۰ . . . . (۱)

کی شکل میں تحویل ہوسکتی ہے - جس میں ھ اور ن، لا اور ما کے تفاعل ہیں - اس شکل کی مساواتیں ذیل کی چار قسموں میں منقسم کی جاسکتی ہیں:-

قسم اول - متغیر جدائی پذیر - جب کسی تفرقی مساوات کی رقمیں اس طرح ترتیب دی جاسکتی ہیں کہ مساوات

ف (لا) فرما + فا (ما) فرما = ۰ . . . . (۱)

کی شکل اختیار کرلیتی ہے جس میں ف (لا) صرف ما کا تفاعل ہے اور فا (ما) صرف ما کا تفاعل، تو اس ترتیب کو متغیروں کا جدا کرنا کہا جاتا ہے - اور اس کا حل راست تکمل سے عمل میں آتا ہے چنانچہ

(۱) کو تکمل کرنے سے ∫ف (لا) فرلا + ∫فا (ما) فرما = ج . . . . . . (۲)

حاصل ہوتا ہے، جس میں ج ایک اختیاری مستقل ہے - ایسی مساوات کو

ایک مناسب جزو ضربی پر (جو عموماً مطالعہ سے معلوم ہو جاتا ہے) تقسیم کرنے سے اس کے متغیر اکثر جدا کر دیے جا سکتے ہیں۔

توضیحی مثال (۱) √((۱ - لا^۲)/(۱ - ما^۲)) فرما/فرلا + ۱ = ۰ کو حل کرو

حل - کسریں صاف کرنے سے √(۱ - لا^۲) فرما + √(۱ - ما^۲) فرلا = ۰

اس کو √(۱ - لا^۲) √(۱ - ما^۲) پر تقسیم کرنے سے فرما/√(۱ - ما^۲) + فرلا/√(۱ - لا^۲) = ۰

اب چونکہ متغیر جدا کر دیے گئے ہیں راست تکمل کرنے سے

جب^-۱ ما + جب^-۱ لا = ج .... (ا)

اس کو ہم ایک دوسری شکل میں بھی لکھ سکتے ہیں :-

فرض کرو جب^-۱ ما = فہ اور جب^-۱ لا = سہ

اس لیے فہ + سہ = ج پس جب (فہ + سہ) = جب ج

یعنے جب فہ جم سہ + جم فہ جب سہ = ک جس میں ک ایک مستقل ہے۔

لیکن جب فہ = ما اور جب سہ = لا اور جم فہ = √(۱ - ما^۲) اور جم سہ = √(۱ - لا^۲)

∴ ما √(۱ - لا^۲) + لا √(۱ - ما^۲) = ک .... (ب)

واضح ہو کہ (ا) اور (ب) دو علیحدہ حل نہیں ہیں بلکہ ایک ہی حل کی دو صورتیں ہیں اور ان میں صرف ایک ایک ہی اختیاری مستقل ہے

توضیحی مثال (۲) لا^۲ ما^۲ فرلا + لا فرما + ما فرلا = ۰ کو حل کرو۔

حل - چونکہ لا فرما + ما فرلا = فر(لا ما) اس لیے لا ما کو ی مان کر ہم لکھ سکتے ہیں

ی^۲ فرلا + فری = ۰ پس فرلا + فری/ی^۲ = ۰

چونکہ متغیر جدا ہو گئے ہیں اس لیے ∫ فرلا + ∫ ی^-۲ فرلا = ج

پس لا - ۱/ی = ج یعنے لا - ۱/(لا ما) = ج جواب

مثالیں

ذیل کی تفرقی مساواتوں کو حل کرو۔

(۱) (جم لا / قوط ما) فرلا + (جب ما / جب^{۲} لا) فرما = ۰ [جواب (جب^{۳} لا / ۳) - لوک جم ما = ج

(۲) (۱ - لا^{۲}) (فرما / فرلا) + لا ما = لا [جواب لوک ((ما - ۱) / √(۱ - لا^{۲})) = ج
بشکل دیگر ما - ۱ = ک √(۱ - لا^{۲})

(۳) فرما / فرلا = (۱ + ما^{۲}) / (لا ما (۱ + لا^{۲})) [جواب (۱ + لا^{۲}) (۱ + ما^{۲}) = ج لا^{۲}

(۴) ا (لا (فرما / فرلا) + ۲ ما) = لا ما (فرما / فرلا) [جواب لا^{۲} ما = ھو$^{ج/ا}$ ھو$^{ما/ا}$

(۵) ھو$^{لا^{۲}}$ ما فرلا - (ا$^{لوک ما}$ / لا) فرما = ۰ [جواب ½ ھو$^{لا^{۲}}$ - (ا$^{لوک ما}$ / لوک ا) = ج

قسم دوم - متجانس مساواتیں -

مساوات ھ فرلا + ن فرما = ۰ .... (۱)
متجانس کہلاتی ہے اگر ھ اور ن لا اور ما کے اُسی درجہ کے متجانس تفاعل ہیں۔
[نوٹ - لا اور ما کا تفاعل اپنے متغیروں کے لحاظ سے متجانس کہلاتا ہے جبکہ لا اور ما کے بجائے لہ لا اور لہ ما (جن میں لہ اختیاری ہے) تعویض کرنے پر لہ کی کسی قوت کا مضروب ابتدائی تفاعل حاصل ہوتا ہے۔ لہ کی یہ قوت ابتدائی تفاعل کا درجہ کہلاتی ہے۔]
ایسی تفرقی مساواتیں ما = و لا .... (۳)
تعویض کرنے سے حل کی جاسکتی ہیں۔ کیونکہ اس تعویض سے و اور لا کی رقموں میں ایک تفرقی مساوات دستیاب ہوتی ہے جس کے متغیر جدائی پذیر ہیں۔
چنانچہ (۱) سے فرما / فرلا = - ھ / ن .... (۴)

اور (۳) کو تفرق کرنے سے فرما / فرلا = لا فرو / فرلا + و .... (۵)

(۴) کا بائیں جانب کا رکن عمل تعویض (۲) سے صرف و ہی کا تفاعل ہو جاتا ہے جبکہ تعویض (۲) کو عمل میں لایا جاتا ہے ۔ پس (۵) اور (۳) کو استعمال کرکے (۴) سے حاصل ہوتا ہے

لا فرو / فرلا + و = ف (و) .... (۶)

اور متغیر لا اور و ایک دوسرے سے جدا کر دیے جا سکتے ہیں ۔

توضیحی مثال ۔

تفرقی مساوات لا فرما = ما فرلا + √(لا^۲ + ما^۲) فرلا کا مکمل حل پیش کرو ۔

حل ۔ مساوات کو ترتیب دینے سے ما فرلا = (√(لا^۲ + ما^۲) - لا) فرما

اس میں ہر اور ن علی الترتیب ما اور (√(لا^۲ + ما^۲) - لا) ہیں اور دونوں متجانس اور لا اور ما کے لحاظ سے پہلے درجہ کے ہیں ۔

پس ما = ولا لکھنے سے فرما = و فرلا + لا فرو

اور لا (و فرلا + لا فرو) = ولا فرلا + √(لا^۲ + لا^۲ و^۲) فرلا

∴ لا فرو = √(۱ + و^۲) فرلا

لا √(۱ + و^۲) پر تقسیم کرنے سے فرو / √(۱ + و^۲) = فرلا / لا

پس تکمل کرنے سے ج + لوک لا = لوک (و + √(۱ + و^۲))

∴ لوک ج لا = لوک (و + √(۱ + و^۲)) اور ج لا = و + √(۱ + و^۲)

∴ ج لا - و = √(۱ + و^۲) ، مربع کرنے سے ج^۲ لا^۲ - ۲ ج ولا + و^۲ = ۱ + و^۲

پس ۱ + ۲ ج ولا - ج^۲ لا^۲ = ۰ یعنی ۱ + ۲ ج ما - ج^۲ لا^۲ = ۰ جواب

مثالیں

مندرجۂ ذیل تفرقی مساواتوں کو حل کرو :—

(۱) $\sqrt{}$(۱ − ما^{۲}) فرلا = $\sqrt{}$(۱ + لا^{۲}) فرما　[جواب، جب$^{-۱}$ ما = لوک ج (لا + $\sqrt{}$(۱ + لا^{۲}))

(۲) (لا + ما) فرلا + (ما − لا) فرما = ۰　[جواب، لوک (لا^{۲} + ما^{۲}) − ۲ مس$^{-۱}$ ما/لا = ج

(۳) لا جم ما/لا · فرما/فرلا = ما جم ما/لا − لا　[جواب، لا قو$^{ما/لا}$ = ج

(۴) (۳ ما^{۳} + ۲ ما^{۲} لا) فرلا − لا^{۳} فرما = ۰　[جواب، (۳ ما − لا)^{۳} (ما + لا) = ج لا^{۴} ما^{۴}

(۵) ایک منحنی مبدا میں سے گزرتا ہے اور جس کا ڈھلان ہر نقطہ پر $\sqrt{}$(۱ − ما^{۲}) / (۱ + لا^{۲}) کے مساوی ہے ۔ اس کی مساوات دریافت کرو ۔　[جواب، لا = ما / $\sqrt{}$(۱ − ما^{۲})

نوٹ ۔ اگر مساوات م فرلا + ن فرما کے سرم اور ن خطی یعنے ا لا + ب ما + ج (جس میں ج ≠ ۰) کی صورت کے ہوں تو ذیل کے طریقہ سے متغیروں کو جدا کر دیا جا سکتا ہے ۔

مثال (۱) تفرقی مساوات ۲ ما فرلا + (لا + ۳ ما − ۱) فرما = ۰ کو حل کرو ۔

حل ۔ رقموں کو ترتیب دینے سے (۳ ما − ۱ + لا) فرما + ۲ ما فرلا = ۰

فرض کرو لا = لاَ + عہ اور ما = ماَ + بہ جن میں عہ اور بہ مستقل ہیں

پس فرلا = فرلاَ اور فرما = فرماَ

تب ۲ (ماَ + عہ) فرلاَ + (لاَ + عہ + ۳ ماَ + ۳ بہ − ۱) فرماَ = ۰ ..... (۱)

دی ہوئی تفرقی مساوات متجانس بنائی جاتی ہے اگر بہ = ۰ اور عہ + ۳ بہ − ۱ = ۰

ان آخری مساواتوں کو ہمزاد مساواتوں کی طرح حل کرنے سے بہ = ۰ اور عہ = ۱ قیمتیں برآمد ہوتی ہیں =

اس لیے لاَ = لا − ۱ اور ماَ = ما

اب ماَ = و لاَ لکھو ما فرماَ = و فرلاَ + لاَ فرو اور مساوات (۱) میں تعویض کرو =

تب ۲ و لاَ فرلاَ + (لاَ + ۳ لا و) (و فرلاَ + لاَ فرو) = ۰

لا پر تقسیم کرنے اور سادہ کرنے سے، ۲ و فرلاَ + و فرلاَ + ۳ و۲ فرلاَ + لاَ فرو = ۰

یعنی فرلاَ ۳ و (۱ + و) + فرو لاَ (۱ + ۳ و) = ۰

پس فرلاَ / لاَ + فرو (۱ + ۳ و) / ۳ و (۱ + و) = ۰

اس مساوات کے سیدھے جانب کے رکن کی دوسری رقم کو جزوی کسور میں تحلیل کرنے کے لیے ہم لکھتے ہیں

فرو / ۳ (ا / و + ب / ۱ + و) = فرو / ۳ { ا + (ا + ب) و / و (۱ + و) }

پس ا + ا و + ب و = ۱ + ۳ و اس لیے ا = ۱ اور ا + ب = ۳ ∴ ب = ۲

اور فرلاَ / لاَ + فرو / ۳ { ۱ / و + ۲ / ۱ + و } = ۰

پس تکمل کرنے سے لوک لاَ + ۱/۳ لوک و + ۲/۳ لوک (۱ + و) = ج

∴ لاَ و^۱/۳ (۱ + و)^۲/۳ = ج اس لیے لاَ۳ و (۱ + و)۲ = ک

و کی قیمت ماَ / لاَ تعویض کرنے سے ماَ (لاَ + ماَ)۲ = ک

لیکن لاَ = لا - ۱ اور ماَ = ما ∴ ما (لا + ما - ۱)۲ = ک جواب

مثال (۲) تفرقی مساوات (۲لا + ما + ۱) فرلا + (۲ما - لا + ۲) فرما = ۰ کو حل کرو۔

حل۔ لا = لاَ + عہ اور ما = ماَ + بہ لکھنے سے

(۲ لاَ + ۲ عہ + ماَ + بہ + ۱) فرلاَ + (۲ ماَ + ۲ بہ - لاَ - عہ + ۲) فرماَ = ۰

مساوات کو متجانس بنانے کے لیے چاہیے کہ ۲ عہ + بہ + ۱ = ۰ اور ۲ بہ - عہ + ۲ = ۰

ان کو حل کرنے سے عہ = ۰ اور بہ = -۱ پس لاَ = لا اور ماَ = ما + ۱

اب (۲ لاَ + ماَ) فرلاَ + (۲ ماَ - لاَ) فرماَ = ۰

اَ = لاَ و تعویض کرنے سے (۲ لاَ + لاَ و) فرلاَ + (۲ لاَ و - لاَ) (و فرلاَ + لاَ فرو) = ۰

اس کو سادہ بنانے سے ۲ (۱ + و^{۲}) فرلاَ + لاَ (۲ و - ۱) فرو = ۰

$$\therefore \frac{\text{فرلاَ}}{\text{لاَ}} + \frac{\text{(۲و-۱) فرو}}{\text{۲ (۱+و}^{۲}\text{)}} = ۰$$

$$\text{پس} \int \frac{\text{فرلاَ}}{\text{لاَ}} + \int \frac{\text{و}}{\text{۱+و}^{۲}} \text{فرو} - \frac{۱}{۲} \int \frac{\text{فرو}}{\text{۱+و}^{۲}} = \text{ج}$$

یعنے لوک لاَ + $\frac{۱}{۲}$ لوک (۱ + و^{۲}) - $\frac{۱}{۲}$ مس$^{-۱}$ و = ج

∴ لوک { لاَ (۱ + و^{۲})$^{\frac{۱}{۲}}$ } - $\frac{۱}{۲}$ مس$^{-۱}$ و = ج

لیکن و = $\frac{\text{اَ}}{\text{لاَ}}$ اور لاَ = لا اور اَ = ما + ۱

∴ بالآخر لوک { لا^{۲} + (ما + ۱)^{۲} } + مس$^{-۱}$ $\frac{\text{ما+۱}}{\text{لا}}$ ، جواب

قسم سوم۔ ما میں پہلے درجہ کی خطی تفرقی مساوات کی صورت

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{پ ما} = \text{ق} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(ب)}$$

ہے جس میں پ اور ق صرف لا کے تفاعل ہیں یا مستقل

[اسی طرح $\frac{\text{فرلا}}{\text{فرما}}$ + ھ لا = ع .... (ج)

جس میں ھ اور ع صرف ما کے تفاعل ہیں یا مستقل، ایک خطی تفرقی مساوات ہے]

(ب) کو تکمیل کرنے کے لیے فرض کرو کہ ما = د ی .... (۱)

جس میں د اور ی تعیین طلب تفاعل لا ہیں۔ (۱) کو تفرق کرنے سے،

$$\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{د} \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} + \text{ی} \frac{\text{فرد}}{\text{فرلا}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (۲)$$

(۱) اور (۲) کو (ب) میں تعویض کرنے سے

$$\text{د} \frac{\text{فری}}{\text{فرلا}} + \text{ی} \frac{\text{فرد}}{\text{فرلا}} + \text{پ د ی} = \text{ق}$$

یعنے ی (فرى/فرلا) + (فری/فرلا + پ ی) ى = ق ..... (۳)

اب اگر فری/فرلا + پ ی = ۰ .... (۴) کو (جس میں ی اور ى جدائی پذیر ہیں) تکمل کر کے ی کی قیمت معلوم کر لی جائے تو

لوکو ی = − ∫ پ ی فرلا + ج

ج کو لوکو ک لکھنے سے بالآخر لوک ی/ک = − ∫ پ ی فرلا حاصل ہوتا ہے،

پس ی = ک و^(− ∫ پ فرلا) .... (۵)

ی کی یہ قیمت (۳) میں تعویض کرنے سے ک و^(− ∫ پ فرلا) فرى = ق فرلا

یعنے فرى = (ق/ک) و^(∫ پ فرلا)

اس کو تکمل کرنے سے ى = (ق/ک) ∫ و^(∫ پ فرلا) + جَ

لیکن ا = ی ى، پس ا = ک و^(− ∫ پ فرلا) (ق/ک) (∫ و^(∫ پ فرلا) + جَ) .... (۶)

∴ ا = و^(− ∫ پ فرلا) (∫ ق و^(∫ پ فرلا) + جَ) .... (۷)

توضیحی مثال ۔ امالیت ل اور مزاحمت ز والے برقی دَور کے سروں پر جب مستقل محرکۂ برق م عمل کرتا ہے تو دَور میں برقی رَو کے نمو کا ضابطہ حاصل کرو۔

حل ۔ اس سوال کا مطلب تفرقی مساوات ل فرر/فرو + زر = م کا حل ہے ۔ جس میں ر کسی آن و میں دَور پر سے بہنے والی رَو کی قیمت ہے۔

چونکہ $\frac{\text{فر ر}}{\text{فر و}} + \frac{\text{ن}}{\text{ل}}\,\text{ر} = \frac{\text{م}}{\text{ل}}$ مصرحۂ بالا قسم سوم کی مساوات ہے اس لیے

$$\text{ر} = \text{و}^{-\int \frac{\text{ن}}{\text{ل}}\text{فر و}} \left(\int \frac{\text{م}}{\text{ل}}\, \text{و}^{\int \frac{\text{ن}}{\text{ل}}\text{فر و}}\, \text{فر و} + \text{ج} \right)$$

$$\text{ر} = \text{و}^{-\frac{\text{ن و}}{\text{ل}}} \left(\frac{\text{م}}{\text{ل}} \cdot \frac{\text{ل}}{\text{ن}}\, \text{و}^{\frac{\text{ن و}}{\text{ل}}} + \text{ج} \right) = \frac{\text{م}}{\text{ل}} + \text{ج}\, \text{و}^{-\frac{\text{ن و}}{\text{ل}}}$$

سوال کے شرائط کے لحاظ سے ہمیں معلوم ہے کہ

جب $\text{و} = ۰$ تو $\text{ر} = ۰$ پس $۰ = \frac{\text{م}}{\text{ل}} + \text{ج}$

یعنی $\text{ج} = -\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ $\therefore \text{ر} = \frac{\text{م}}{\text{ن}}\left(۱ - \text{و}^{-\frac{\text{ن و}}{\text{ل}}}\right)$ جواب

طبیعیات کے طالب علم کو معلوم ہوگا کہ یہ ہلم ہولٹس (Helmholtz) کا امالیت اور مزاحمت والے برقی دور میں رَو کے نمو کا مشہور کلیہ ہے۔

قسم چہارم ۔ پہلے رتبہ کی غیر خطی مساواتیں مناسب تعویض سے خطی بنائی جاسکتی ہیں ۔ ان کی ایک صورت

$$\frac{\text{فر ا}}{\text{فر لا}} + \text{پ ا} = \text{ق ا}^{\text{ن}} \quad \text{.........} \quad (\text{د})$$

ہے جس میں پ اور ق صرف لا کے تفاعل ہیں یا مستقل ایسی مساواتیں بذریعہ تعویض $\text{ی} = \text{ا}^{-\text{ن}+۱}$ خطی صورت (ب) قسم سوم میں تحویل ہوسکتی ہیں۔ لیکن ضرور نہیں کہ یہی تحویل عمل میں لائی جائے جو طریقہ قسم سوم کے عنوان کے تحت مساواتوں کے حل کے لیے استعمال کیا گیا تھا یہاں بھی کام دے سکتا ہے ۔ ایک مثال سے اس کی توضیح کی جاتی ہے ۔

توضیحی مثال $\frac{\text{فر ا}}{\text{فر لا}} + \frac{\text{ا}}{\text{لا}} = ۲\,\text{لوک لا}\,\text{ا}^{۲}$ کو حل کرو۔

حل - یہ مساوات (د) کی صورت کی ہے جس میں پ = ۱/لا ،

ق = ۲ لوک لا ، ن = ۲ ، ا = د ی لکھو تب فر ا/فر لا = د فر ی/فر لا + ی فر د/فر لا

اس کو دی ہوئی مساوات میں تعویض کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

د فر ی/فر لا + (فر د/فر لا + د/لا) ی = ۲ لوک لا · د² ی² .... (۱)

د کو معلوم کرنے کے لیے ی کے سر یعنے (فر د/فر لا + د/لا) کو صفر کے مساوی لکھتے ہیں۔

پس اس کے تکمل سے ∫ فر د/د = - ∫ فر لا/لا یعنے لوک د = - لوک لا = لوک ۱/لا

∴ د = ۱/لا .... (۲)

اب چونکہ ی والی رقم نکل جاتی ہے اس لیے مساوات (۱) اب ہو جاتی ہے

د فر ی/فر لا = ۲ (لوک لا) د² ی² یا فر ی/فر لا = ۲ لوک لا د ی²

اس میں د کی قیمت (= ۱/لا) تعویض کرنے سے، فر ی/فر لا = ۲ (لوک لا) ی²/لا

∴ فر ی/ی² = ۲ (لوک لا) فر لا/لا

اس کو تکمل کرنے سے - ۱/ی = ۲ (لوک لا)²/۲ + ج

∴ ی = - ۱/((لوک لا)² + ج)

اور چونکہ ا = د ی = ی/لا اس لیے ا = - ۱/لا · ۱/((لوک لا)² + ج)

یا لا ا {(لوک لا)² + ج} + ۱ = ۰ جواب

مثالیں

مندرجہ ذیل تفرقی مساواتوں کو مکمل طور پر حل کرو۔

(۱) (فرس / فرو) جم و + س جب و = ۱ [جواب، س = جب و + ج جم و

(۲) (فر ما / فر لا) − (ن ما / لا) = (لا + ۱) / لا [جواب، ما = ج لا^ن + لا / (۱ − ن) − ۱ / ن

(۳) (۳ فر ما / فر لا) + (۲ ما / (لا + ۱)) = لا³ / ما² [جواب، ۶۰ ما³ (لا + ۱)² = ۱۰ لا⁶ + ۲۴ لا⁵ + ۱۵ لا⁴ + ج

(۴) (فر ما / فر لا) + ما / (۱ − لا²)^(۳/۲) = (لا + √(۱ − لا²)) / (۱ − لا²)² [جواب، ما = ج و^(−لا / √(۱ − لا²)) + لا / √(۱ − لا²)

(۵) (فر ما / فر لا) + (۴ لا ما / (لا² + ۱)) = ۱ / (لا² + ۱)³ [جواب، ما (لا² + ۱)² = مس⁻¹ لا + ج

(۶) (فرس / فرو) − س مم و = س³ قم لا [جواب، س = جب و / √(۲ جم و + ج)

(۷) ثابت کرو کہ متبادل برقی رؤوں سے متعلق تفرقی مساوات ل (فرر / فرد) + زر = م جب سہ و جس میں ل، ز اور سہ مستقل ہیں = (م / (ز² + سہ² ل²)) (ز جب سہ و − سہ ل جم سہ و) + ج و^(−زو / ل) ہے۔

۷۔ ٹھیک یا تیار تفرقی مساواتیں۔

مساوات

م فرلا + ن فرما = ۰ . . . . (۱)

ٹھیک یا تیار کہلاتی ہے اگر کوئی تفاعل ف (لا، ما) ایسا موجود ہے کہ اس کا تفرقہ (differential)

فرف (لا، ما) = م فرلا + ن فرما = ۰ . . . . . . (۲)

اگر (۱) ٹھیک یا تیار تفرقی مساوات ہے تو ھ اور ن کے مابین ایک سادہ رابطہ موجود ہے جو اس طرح دریافت کیا جاتا ہے۔ واضح ہے کہ ف (لا، ما) کے تفرقہ کے لیے عام جملہ ہے۔

$$\text{فرف}(\text{لا، ما}) = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}}\ \text{فرلا} + \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}\ \text{فرما}$$

$$\text{پس (۲) سے}\quad \text{ھ} = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف لا}}\ \text{اور ن} = \frac{\text{جف ف}}{\text{جف ما}}$$

$$\text{اور}\quad \frac{\text{جف ھ}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{جف}^{2}\ \text{ف}}{\text{جف ما جف لا}}\ ،\quad \frac{\text{جف ن}}{\text{جف لا}} = \frac{\text{جف}^{2}\ \text{ف}}{\text{جف لا جف ما}}$$

$$\text{اس لیے}\quad \frac{\text{جف ھ}}{\text{جف ما}} = \frac{\text{جف ن}}{\text{جف لا}} \quad \ldots\ldots\ldots\ (۳)$$

اس کے معکوس طریقہ پر یہ ثابت کیا جا سکتا ہے کہ اگر حل (۳) صحیح ہے تو ایک تفاعل ف (لا، ما) ایسا موجود ہے جس کے لیے رابطہ (۲) صحیح ہے یعنی بالفاظ دیگر مساوات (۱) ٹھیک یا تیار مساوات ہے۔

یہ بھی بتایا جا سکتا ہے کہ ہر ایسی مساوات کے لیے جو ٹھیک نہیں ہے ایک ایسا جزوِ ضربی موجود ہے جو ایسی مساوات کو ضرب دینے پر ٹھیک بنا دیتا ہے۔ ایسے اجزاء ضربی جو متکمل اجزاء ضربی کہلاتے ہیں عموماً لا اور ما کے تفاعل ہوتے ہیں۔ ان کے دریافت کرنے کا کوئی عام قاعدہ موجود نہیں ہے جیسا کہ آگے چل کر بتایا جائیگا یہ زیادہ تر مطالعہ یا پرکھنے ہی سے معلوم کر لیے جاتے ہیں۔

ٹھیک مساوات کے حل کرنے کا قاعدہ۔

مثال کے طور پر مساوات

$$(\text{لا}^{2} - ۴\ \text{لا ما} - ۲\ \text{ما}^{2})\ \text{فرلا} + (\text{ما}^{2} - ۴\ \text{لا ما} - ۲\ \text{لا}^{2}) = ۰$$

کے حل پر غور کرو۔ پہلے یہ دیکھنے کے لیے کہ مساوات ٹھیک ہے یا نہیں

$\frac{\text{جف ھ}}{\text{جف ما}}$ اور $\frac{\text{جف ن}}{\text{جف لا}}$ کا مقابلہ کرو چونکہ ان دونوں کی قیمت ایک ہی یعنے ۔ ۴لا ۔ ۴ما ہے اس لیے مساوات ٹھیک ہے ۔

اب اگر ف (لا، ما) = ج اس کا حل ہے تو

$$\text{ھ} = \frac{\text{جف}}{\text{جف لا}}\ \text{ف (لا، ما) اور ن} = \frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}\ \text{ف (لا، ما)}$$

ما کو مستقل تصور کرکے ھ کو تکمل کرنے سے

ف (لا، ما) = $\int$ (لا^{2} ۔ ۴لاما ۔ ۲ما^{2}) فرلا + فہ (ما) = $\frac{1}{3}$لا^{3} ۔ ۲لا^{2}ما ۔ ۲ما^{2}لا + فہ (ما)

جس میں فہ (ما) بلحاظ لا مستقل ہے لیکن ممکن ہے کہ اس میں ما شامل ہو۔

اب لا کو مستقل تصور کرکے تفرق کرنے سے

$\frac{\text{جف}}{\text{جف ما}}$ ف (لا، ما) = ۔ ۲لا^{2} ۔ ۴لاما + $\frac{\text{جف فہ (ما)}}{\text{جف ما}}$ = ن = ما^{2} ۔ ۴لاما ۔ ۲لا^{2}

$\therefore$ $\frac{\text{جف فہ (ما)}}{\text{جف ما}}$ = ما^{2} $\therefore$ فہ (ما) = $\frac{1}{3}$ما^{3} ۔ ج

پس دی ہوئی تفرقی مساوات کا حل ہے $\frac{1}{3}$لا^{3} ۔ ۲لا^{2}ما ۔ ۲ما^{2}لا + $\frac{1}{3}$ما^{3} = ج
اس جملہ کی پہلی تین رقمیں ھ کو تکمل کرنے سے حاصل ہوئی تھیں یہ تصور کرکے کہ ما مستقل ہے ۔

باقی ماندہ رقم $\frac{1}{3}$ما^{3} ہی ن فرما کے تکمل میں ایک ایسی رقم ہے جو پہلے حاصل کی ہوئی رقموں سے مختلف ہے ۔

اس لیے قاعدہ یہ ہے کہ ھ فرلا کو تکمل کیا جائے یہ تصور کرکے کہ ما مستقل ہے ۔ پھر ن فرما کو تکمل کیا جائے یہ تصور کرکے کہ لا مستقل ہے لیکن اس تکملہ میں سے صرف وہی رقمیں لی جائیں جو پہلے حاصل نہیں ہوئی ہیں ۔ اور بعد ازاں ان تکملوں کے حاصل جمع کو ایک مستقل کے مساوی لکھ دیا جائے ۔

مثال دوم ۔ $\frac{\text{لا} - \text{ما}}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}\,\text{فرلا} + \frac{\text{لا} + \text{ما}}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}\,\text{فرما} = 0$ کو حل کرو ۔

حل ۔ چونکہ $\frac{\text{جف}\ \text{م}}{\text{جف}\ \text{ما}} = \frac{\text{ما}^2 - 2\,\text{لا}\,\text{ما} - \text{لا}^2}{(\text{لا}^2 + \text{ما}^2)^2} = \frac{\text{جف}\ \text{ن}}{\text{جف}\ \text{لا}}$ اس لیے مساوات ٹھیک ہے ۔

پس اس کا ف (لا ، ما) موجود ہے اور

$$\frac{\text{جف}\ \text{ف}(\text{لا}, \text{ما})}{\text{جف}\ \text{لا}} = \text{م} = \frac{\text{لا} - \text{ما}}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}$$

اس کو جزوی طور پر بلحاظ لا تکمل کرنے سے (یعنے یہ تصور کر کے کہ ما مستقل ہے)

$$\text{ف}(\text{لا}, \text{ما}) = \int \frac{\text{لا} - \text{ما}}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}\,\text{فرلا} = \int \frac{\text{لا}\ \text{فرلا}}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2} - \int \frac{\text{ما}\ \text{فرلا}}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{\text{فر}\,\text{لا}^2}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2} - \text{ما}\int \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2} = \frac{1}{2}\,\text{لوک}\,(\text{لا}^2 + \text{ما}^2) - \text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ما}}$$

$+ \text{فہ}(\text{ما})$ ...... (۱)

اس طرح $\frac{\text{جف}\ \text{ف}(\text{لا}, \text{ما})}{\text{جف}\ \text{ما}} = \text{ن} = \frac{\text{لا} + \text{ما}}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}$ اور اس کو جزوی طور پر بلحاظ ما تکمل کرنے سے

$$\text{ف}(\text{لا}, \text{ما}) = \int \frac{\text{لا} + \text{ما}}{\text{لا}^2 + \text{ما}^2}\,\text{فرما} = \frac{1}{2}\,\text{لوک}\,(\text{لا}^2 + \text{ما}^2) + \text{مس}^{-1}\frac{\text{ما}}{\text{لا}}$$

$+ \text{سہ}(\text{لا})$ ..... (۲)

(۱) اور (۲) میں ف (لا ، ما) کے لیے جو جملے حاصل ہوئے ہیں ان کے مساوی ہونے کے لیے ضروری ہے کہ

$- \text{مس}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ما}} + \text{فہ}(\text{ما}) = \text{مس}^{-1}\frac{\text{ما}}{\text{لا}} + \text{سہ}(\text{لا})$ ایک متماثلہ (identity) ہو ۔

ہمیں معلوم ہے کہ

مس $\frac{لا}{ما}$ = $\frac{\pi}{۲}$ - مس $\frac{ما}{لا}$ پس فہ (ما) = $\frac{\pi}{۲}$ + سہ (لا) .... (۳)

لیکن فہ (ما) اور سہ (لا) ہمارے مفروضوں کے لحاظ سے یا تو مستقل ہیں یا علی الترتیب ما اور لا کے تفاعل ہیں۔ پس مساوات (۳) دو متضاد امور کو ظاہر کرتی ہے الا اس صورت کے کہ فہ (ما) اور سہ (لا) دونوں تفاعل فرداً فرداً مستقل ہیں۔

اس لیے مساوات کا حل ہے

$\frac{۱}{۲}$ لوک (لا^۲ + ما^۲) + مس$^{-۱}$ $\frac{ما}{لا}$ = ج جواب

مثالیں

ذیل کی تفرقی مساواتوں کو ان کے ٹھیک ہونے کا امتحان کر کے حل کرو۔

(۱) (اب - ۲ لا ما - ما^۲) فرلا + (لا + ما)^۲ فرما = ۰

[جواب، اب لا - لا^۲ ما - ما^۲ لا - $\frac{۱}{۳}$ ما^۳ = ج

(۲) (ما^۲ + ا جم لا ما) فرلا + (۲ لا ما + لا جم لا ما) فرما = ۰

[جواب، لا ما + جب لا ما = ج

(۳) (الا + ہ ما + ف) فرلا + (ب ما + ہ لا + گ) فرما = ۰

[جواب، الا^۲ + ۲ ہ لا ما + ب ما^۲ + ۲ ف لا + ۲ گ ما + ج = ۰

۵ - مطالعہ یا پرکھنے سے متکمل اجزاءِ ضربی کی تعیین -

اگر حل کرنے کے لیے دی ہوئی تفرقی مساوات بذات خود ٹھیک نہیں ہے تو ذرا غور کرنے سے معلوم ہو جاتا ہے کہ اس کو کس متکمل جزوِ ضربی سے ضرب دینے پر وہ ٹھیک ہو جاتی ہے۔ مثال کے طور پر

لا فرلا + ما فرما + (لا۲ + ما۲) فرلا = ۰ .... (۱)

ٹھیک مساوات نہیں ہے۔ لیکن ذرا سوچنے سے معلوم ہوجاتا ہے کہ اگر اس کو ۱ / (لا۲ + ما۲) سے ضرب دیا جائے تو وہ ٹھیک بن جاتی ہے کیونکہ وہ ہو جاتی ہے

(لا فرلا + ما فرما) / (لا۲ + ما۲) + فرلا = ۰ یعنے ۱/۲ فر(لا۲ + ما۲) / (لا۲ + ما۲) + فرلا

جس کا تکملہ ہے ۱/۲ لوک (لا۲ + ما۲) + لا = ج

دوسری مثال۔ اکثر مثالوں میں (ما فرلا - لا فرما) رقموں کے مجموعہ سے سابقہ پڑتا ہے۔ اگر مساوات میں صرف یہی دو رقمیں صفر کے مساوی دی گئی ہیں تو ایسی مساوات کے لیے

۱/ما۲ یا ۱/لا۲ یا ۱/لا ما متکمل جزوِ ضربی کا کام دے سکتے ہیں۔ اس لیے کہ

(ما فرلا - لا فرما) / ما۲ = فر(لا/ما) دو مقادیر کے خارج قسمت کے تفرقی سر کی تعریف سے

پس (ما فرلا - لا فرما) / ما۲ = ۰ کا حل یا فر(لا/ما) = ۰ یعنے لا/ما = ج ہے

اسی طرح (ما فرلا - لا فرما) / لا۲ = - (لا فرما - ما فرلا) / لا۲ = - فر(ما/لا) ہے پس مساوات کا حل - ما/لا = ج ہے۔

اور (ما فرلا - لا فرما) / (لا ما) = فرلا/لا - فرما/ما پس مساوات کا حل لوک لا - لوک ما = ج یعنے لا/ما = ج ہے۔

[نوٹ - ٹھیک مساواتوں کے امتحان کے طریقے سے معلوم کرلیا جا سکتا ہے کہ دی ہوئی مساوات ان متکمل اجزاءِ ضربی میں سے کسی ایک سے بھی ضرب دینے کے بعد ٹھیک ہو جاتی ہے - طالب علم بطورِ مشق ٹھیک مساواتوں کے حل کرنے کے عام قاعدہ سے بھی اس مساوات کو حل کر سکتے ہیں] -

اگر مثال میں (ما فرلا - لا فرما) کے علاوہ دوسری رقمیں بھی شامل ہیں تو متکمل جزوِ ضربی کا انتخاب ایسا ہونا چاہیے کہ اس سے دوسری رقموں کے تکملہ میں رکاوٹ پیدا نہ ہو -

مثلاً مساوات ما فرلا - لا فرما + لوک لا فرلا = ۰ کے حل میں متکمل جزوِ ضربی ۱/ما۲ کا استعمال غیر مفید ہوگا البتہ ۱/لا۲ استعمال کرنے سے فوراً مطلب حاصل ہو جاتا ہے - چنانچہ

(ما فرلا - لا فرما)/لا۲ + (لوک لا/لا۲) فرلا = ۰ کا حل

- ما/لا + ∫ [- لوک لا/لا + فرلا/لا۲] = ج

یعنے ما/لا - لوک لا/لا - ۱/لا = ج یا ما + لوک + ۱ = ج لا ہے

مثالیں

ذیل کی مساواتوں کو حل کرو :-

(۱) لا فرما + (لا۲/ما) فرما = ما فرلا [جواب، ما/لا + لوک ما = ج

(۲) (۱ + لا ما) ما فرلا + (۱ - لا ما) لا فرما = ۰ [جواب، لوک لا/ما - ۱/لا ما = ج

(۳) لا فرلا + ما فرما - √(لا۲ + ما۲) فرلا = ۰ [جواب، √(لا۲ + ما۲) - لا = ج

(۴) ما فرلا - لا فرما + ما (لا۲ + ما۲) فرما = ۰ [جواب، ۲ مس-۱ لا/ما + ما۲ = ج

(۵) (لا + ما) فرلا + (ما - لا) فرما = ۰ [جواب، ½ لوک (لا² + ما²) + مس⁻¹ لا/ما = ج

۶ - پہلے رتبہ کی مساواتیں جو پہلے درجہ سے بلند تر درجہ کی ہیں -

قسم اول - مساواتیں جو فرما/فرلا کے لیے حل کی جا سکتی ہیں -

بطور مثال -

ع³ (لا + ۲ ما) + ۳ ع² (لا + ما) + ع (ما + ۲ لا) = ۰ کو حل کرو -

[نوٹ - یہاں ع سے مراد فرما/فرلا ہے سہولت کی خاطر کتابت کا یہ طریقہ اختیار کیا گیا ہے]-

حل - مساوات کے بیدھے جانب کے رکن کو اس کے اجزاء ضربی میں تحلیل کرنے کے لیے ہم لکھتے ہیں

ع { (لا + ۲ ما) (ع² + ع) + (۲ لا + ما) (ع + ۱) } = ۰

یعنے ع (ع + ۱) (ع لا + ۲ ع ما + ۲ لا + ما) = ۰

پس فرما/فرلا = ۰ یا فرما/فرلا = -۱ یا فرما/فرلا = - (۲ لا + ما)/(لا + ۲ ما)

پہلی دو مساواتوں کو تکمل کرنے سے ما = ج، ما = - لا + ج

اور تیسری مساوات ہے لا فرما + ما فرلا + ۲ ما فرما + ۲ لا فرلا = ۰

یعنے فر(لا ما) + فر(لا²) + فر(ما²) = ۰

پس تکمل کرنے سے لا ما + لا² + ما² = ج

∴ پورا حل ہے (ما - ج) (ما + لا - ج) (لا ما + لا² + ما² - ج) = ۰

قسم دوم۔ مساواتیں جو ما کے لیے حل کی جا سکتی ہیں۔

فرض کرو کہ دی ہوئی مساوات ہے۔

ت (لا، ما، ع) = ۰ .... (۱)

اس کو ما کے لیے حل کرنے سے ہمیں حاصل ہوتی ہے مساوات

ما = فا (لا، ع) .... (۲)

(۲) کو تفرق کرنے سے اور $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}}$ کے بجائے ع لکھنے سے، ہمیں ملتی ہے مساوات

ع = فہ (لا، ع، $\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}$) .... (۳)

جس میں لا اور ع متغیر ہیں۔ اب فرض کرو کہ (۳) کا حل ہے

سہ (لا، ع، ج) .... (۴)

تو ع کو (۱) اور (۴) کے مابین ساقط کرنے سے ہمیں لا، ما کا ایک تفاعل اور ایک اختیاری مستقل دستیاب ہوتا ہے جو عموماً (۱) کا حل ہے۔ لیکن ممکن ہے کہ اس حل کے دوران میں بعض غیر متعلقہ اجزاء ضربی داخل ہو جائیں یا کسی اور طرح سے کوئی خطا واقع ہو اس لیے بہتر ہے کہ حاصل کردہ حل کو مساوات (۱) میں تعویض کر کے آزما لیا جائے۔

اگر ع کا اسقاط مشکل ہو تو مساواتوں (۱) اور (۴) ہی کو ہمزاد طریقہ پر حل کا مبدلانہ اظہار **(parametric representation)** تصوّر کر لیا جا سکتا ہے۔

مثال۔ مساوات ا = ع^{2} لا + لا کو حل کرو۔

حل۔ تفرق کرنے سے ع = ۲ لا ع $\frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}$ + ع^{2} + ۱

اس کو ترتیب دینے سے $\frac{\text{فرلا}}{\text{لا}} + \frac{\text{۲ ع فرع}}{\text{ع}^{۲} - \text{ع} + ۱} = ۰$

یا $\frac{(\text{۲ع} - ۱)\ \text{فرع}}{\text{ع}^{۲} - \text{ع} + ۱} + \frac{\text{فرع}}{(\text{ع} - \frac{۱}{۲})^{۲} + \frac{۳}{۴}} + \frac{\text{فرلا}}{\text{لا}} = ۰$

اس کو تکمل کرنے سے $\text{لوک}\ (\text{ع}^{۲} - \text{ع} + ۱) + \frac{۲}{\sqrt{۳}}\ \text{مس}^{-۱} \frac{\text{۲ع} - ۱}{\sqrt{۳}} + \text{لوک لا} = \text{ج}$

ع کو دی ہوئی اور آخری مساواتوں سے ساقط کیا جا سکتا ہے۔ لیکن سہولت کی خاطر ع کو مبدّل تصور کر کے اس کی رقموں میں ان دونوں مساواتوں کو عام حل قرار دیا جا سکتا ہے۔

قسم دوم کی کلیروی صورت (Clairaut's form)

مساواتوں میں اس کو خاص اہمیت حاصل ہے۔ اس کی صورت

$$\text{ما} = \text{ع لا} + \text{ف}\ (\text{ع})$$

ہے۔

اس کو بلحاظ لا تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\text{ع} = \text{ع} + \left\{ \text{لا} + \text{فَ}\ (\text{ع}) \right\} \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}}$$

$$\therefore\ \text{لا} + \text{فَ}\ (\text{ع}) = ۰ \quad \text{یا} \quad \frac{\text{فرع}}{\text{فرلا}} = ۰$$

پہلی مساوات سے عام حل حاصل نہیں ہو سکتا۔ دوسری مساوات سے

ع = ج (جو ایک مستقل ہے) برآمد ہوتا ہے اور ع کی یہ قیمت ابتدائی مساوات میں درج کرنے سے ہمیں عام حل

$$\text{ما} = \text{ج لا} + \text{ف}\ (\text{ج})$$

دستیاب ہوتا ہے۔

پس کلیروی مساوات کا عام حل دی ہوئی مساوات میں ع کے عوض مستقل ج لکھنے سے فوراً حاصل ہو جاتا ہے۔

قسم سوم۔ مساواتیں جو لا کے لیے حل کی جا سکتی ہیں۔

فرض کرو کہ مساوات کو لا کے لیے حل کرنے سے

لا = ف (ما ، ع) .... (۱)

نتیجہ برآمد ہوتا ہے - تو اب (۱) کو بلحاظ ما تفرق کرنے سے

۱/ع = فہ (ما ، ع ، فرع/فرما) .... (۲)

فرض کرو کہ (۲) کل حل ہے سہ (ما ، ع ، ج) = ۰ .... (۳)

تو (۱) اور (۳) کو ہمزاد طریقہ پر مساوات (۱) کا مبدلانہ حل تصور کیا جا سکتا ہے یا اگر مناسب ہو تو ان کے مابین ع کو ساقط کر کے لا اور ما اور ایک اختیاری مستقل کا تفاعل حاصل کیا جا سکتا ہے جو (۱) کا عام حل ہے۔ لیکن اس تفاعل کو دی ہوی مساوات (۱) میں تعویض کر کے امتحان کر لیا جائے۔

مثال - مساوات لا = ع ما + ع کو حل کرو -

[نوٹ - درحقیقت اس مساوات کا حل نہایت آسان ہے اس لیے کہ اس کے متغیر جدائی پذیر ہیں یہاں اس کو قسم سوم کے تحت لا کر اس کے حل کی مشق کرانی مقصود ہے - واضح ہے کہ یہ مساوات قسم دوم کی بھی تصور ہو سکتی ہے اس لیے کہ ما = لا/ع - ۱ لیکن اس طور پر اس کو حل کرنے میں عمل تکمل قدرے طویل ہو جاتا ہے] -

حل - مساوات کو بلحاظ ما تفرق کرنے سے،

۱/ع = ع + ما فرع/فرما + فرع/فرما یعنے ع فرع/(ع^۲ - ۱) + فرما/(۱ + ما) = ۰

تکمل کرنے سے لوک (ع^۲ - ۱) + ۲ لوک (۱ + ما) = لوک ج

یا (ع^۲ - ۱) (۱ + ما)^۲ = ج

دی ہوئی مساوات اور آخری مساوات کے درمیان ع کو ساقط کرنے سے حاصل ہوتی ہے مساوات

لا^۲ - (ما + ۱)^۲ = ج جو دی ہوئی مساوات کا عام حل ہے -

مثالیں

[ھدایت - پہلی تین مثالیں مساوات قسم اول کے طریقہ سے حل کی جائیں - بعد کے پانچ قسم دوم کے طریقہ سے اور آخری تین قسم سوم کے طریقہ سے] -

(۱) ۴ ا^{2}ع^{2} + ۲ ع لا ا (۳ لا + ۱) + ۳ لا^{3} = ۰

[جواب' (لا^{2} + ۲ ا^{2} − ج) (لا^{3} + ا^{2} − ج) = ۰

(۲) ع^{2} + (لا − ا) ع − لا ا = ۰ . [جواب' (ا + $\frac{\text{لا}^{2}}{2}$ + ج) (لوک ا − لا + ج) = ۰

(۳) ع^{2} − ($\frac{\text{ا}}{\text{لا}}$)^{2} = ۰ . [جواب' (ا − لوک لا − ج) (ا + لوک لا − ج) = ۰

(۴) لا + ا − ع^{2} = ۰ . جواب { لا = ۲ ع − ۲ لوک (ع + ۱) + ج
ا = ع^{2} − ۲ ع − ۲ لوک (ع + ۱) − ج

(۵) ا = ع (۱ + ع) لا = ۰ . جواب { لا = $\frac{\text{ج}}{\text{ع}^{2}}$ و$^{\frac{1}{\text{ع}}}$
ا = ج $\frac{1 + \text{ع}}{\text{ع}}$ و$^{\frac{1}{\text{ع}}}$

(۶) لا − ا ع = ع^{2} جواب { لا = $\frac{\text{ع}}{\sqrt{1 - \text{ع}^{2}}}$ (ج + جب$^{-1}$ ع)
ا = − ع + $\frac{1}{\sqrt{1 - \text{ع}^{2}}}$ (ج + جب$^{-1}$ ع)

(۷) ا = ع لا + ل $\sqrt{1 + \text{ع}^{2}}$ جواب' ا = ج لا + ل $\sqrt{1 + \text{ج}^{2}}$ بوجہ کلیروی صورت

(۸) ا = ع لا + جب$^{-1}$ ع جواب' ا = ج لا + جب$^{-1}$ ج الیضاً

(۹) ع لا − $\frac{1}{\text{ع}}$ + ۱ = ۰ . جواب { لا = $\frac{1}{\text{ع}^{2}}$ − $\frac{1}{\text{ع}}$
ا = لوک ع + $\frac{2}{\text{ع}}$ + ج

(۱۰) ا − ع لا + ع^{2} ا = ۰ . جواب { لا = ج $\frac{\text{ع}^{2} + 1}{\text{ع}^{2}}$ و$^{-\frac{1}{2\text{ع}^{2}}}$
ا = $\frac{\text{ج}}{\text{ع}}$ و$^{-\frac{1}{2\text{ع}^{2}}}$

(۱۱) لا = ما + ع^{۲} جواب $\left\{\begin{array}{l}\text{لا} = -\text{۲ع} - \text{۲ لوک (ع - ۱)} + \text{ج} \\ \text{ما} = -\text{ع}^{۲} - \text{۲ع} - \text{۲لوک (ع - ۱)} + \text{ج}\end{array}\right.$

۷ - بلند ترتبہ کی دو خاص قسم کی تفرقی مساواتیں -

(۱) مساوات $\frac{\text{فر}^{ن}\text{ما}}{\text{فرلا}^{ن}} = \text{ف(لا) یا ج}$ .... (ہ)

سے اکثر سابقہ پڑتا ہے،

علامت مساوات کے دونوں ارکان کو فرلا سے ضرب دو۔ عمل تکمل سے

$$\frac{\text{فر}^{ن-۱}\text{ما}}{\text{فرلا}^{ن-۱}} = \int \text{ف (لا) فرلا} + \text{ج}_۱ \text{ یا } = \int \text{ج فرلا} + \text{ج}_۱$$

اس عمل کو (ن - ۱) مرتبہ دہرانے سے پورا حل حاصل ہوتا ہے جس میں ن اختیاری مستقل ہونگے۔

توضیحی مثال۔ $\frac{\text{فر}^{۳}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۳}} = \text{لا و}^{\text{الا}}$ کو حل کرو۔

حل۔ دونوں ارکان کو فرلا سے ضرب دیکر تکمل کرنے سے

$$\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} = \int \text{لا و}^{\text{الا}} \text{فرلا} + \text{ج}_۱ = \text{لا}\frac{\text{و}^{\text{الا}}}{\text{ا}} - \frac{\text{و}^{\text{الا}}}{\text{ا}^{۲}} + \text{ج}_۱ \text{ (عمل تکمل بالحصص سے)}$$

اس طریقہ کو دہرانے سے $\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \int \text{لا}\frac{\text{و}^{\text{الا}}}{\text{ا}} \text{فرلا} - \int \frac{\text{و}^{\text{الا}}}{\text{ا}^{۲}} \text{فرلا} + \int \text{ج}_۱ \text{فرلا}$

$$= \frac{۱}{\text{ا}}\left(\frac{\text{لا و}^{\text{الا}}}{\text{ا}} - \frac{\text{و}^{\text{الا}}}{\text{ا}^{۲}}\right) - \frac{۱}{\text{ا}^{۲}} \cdot \frac{\text{و}^{\text{الا}}}{\text{ا}} + \text{ج}_۱ \text{لا} + \text{ج}_۲$$

$$= \frac{\text{لا و}^{\text{الا}}}{\text{ا}^{۲}} - ۲\frac{\text{و}^{\text{الا}}}{\text{ا}^{۳}} + \text{ج}_۱ \text{لا} + \text{ج}_۲$$

پس $\text{ما} = \frac{۱}{\text{ا}^{۲}}\int \text{لا و}^{\text{الا}} \text{فرلا} - \frac{۲}{\text{ا}^{۳}}\int \text{و}^{\text{الا}} \text{فرلا} + \text{ج}_۱ \int \text{لا فرلا} + \int \text{ج}_۲ \text{فرلا}$

$$= \frac{1}{\text{ل}^2}\left(\frac{\text{لا و}^{\text{لا}}}{\text{ل}} - \frac{\text{و}^{\text{لا}}}{\text{ل}^2}\right) - \frac{2}{\text{ل}^3}\,\frac{\text{و}^{\text{لا}}}{\text{ل}} + \text{ج}_1\frac{\text{لا}^2}{2} + \text{ج}_2\,\text{لا} + \text{ج}_3$$

$$= \frac{\text{لا و}^{\text{لا}}}{\text{ل}^3} - \frac{3\,\text{و}^{\text{لا}}}{\text{ل}^4} + \text{ج}_1\frac{\text{لا}^2}{2} + \text{ج}_2\,\text{لا} + \text{ج}_3 \quad \text{جواب}$$

(۲) **مساوات** - $\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر لا}^2} = \text{ف (ما)}$ .... (۹)

کو بڑی اہمیت حاصل ہے - اس کے حل کے لیے سہولت کی خاطر $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کے عوض ع لکھو تو مساوات ہو جاتی ہے

$$\frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} = \text{ف (ما)}$$

اب ۲ ع سے ضرب دینے سے، ہمیں حاصل ہوتا ہے -

$$2\,\text{ع}\,\frac{\text{فر ع}}{\text{فر لا}} = \frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}(\text{ع}^2) = 2\,\text{ع ف (ما)} = 2\,\text{ف (ما)}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$$

پس $\text{فر (ع)}^2 = 2\,\text{ف (ما) فر ما}$

اور تکمل کرنے سے $\text{ع}^2 = \int 2\,\text{ف (ما) فر ما} + \text{ج}$

اس آخری مساوات کے بائیں جانب کا رکن ما کا تفاعل ہے - پس جذر المربع نکال کر متغیروں لا اور ما کو جدا کردو اور پھر سے تکمل کرو - جواب حاصل ہو جاتا ہے -

توضیحی مثال - مساوات $\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر لا}^2} + \text{ل}^2\,\text{ما} = 0$ کو حل کرو -

۲ ع سے ضرب دینے سے $2\,\text{ع فر ع} = -2\,\text{ل}^2\,\text{ما فر ما}$ یعنے $\text{فر (ع)}^2 = -2\,\text{ل}^2\,\text{ما فر ما}$

تکمل کرنے سے $\int \text{فر (ع)}^2 = -\text{ل}^2 \int 2\,\text{ما فر ما}$ یعنے $\text{ع}^2 = -\text{ل}^2\,\text{ما}^2 + \text{ج}^2$

جس میں ج^2 = اختیاری مستقل

$$\therefore \text{ع} = \pm\sqrt{\text{ج}^2 - \text{ل}^2\,\text{ما}^2} \quad \text{لیکن}\quad \text{ع} = \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$$

پس متغیروں کو جدا کر کے تکمیل کرنے سے

$$\int \frac{\text{فر ما}}{\sqrt{\text{ج}^2-\text{ر}^2\text{ما}^2}} = \int \text{فر لا} \quad \text{یعنے} \quad \int \frac{\text{فر ما}}{\text{ر}\sqrt{\frac{\text{ج}^2}{\text{ر}^2}-\text{ما}^2}} = \text{لا} + \text{جَ}$$

$$\text{یعنے} \quad \frac{1}{\text{ر}}\,\text{جب}^{-1}\frac{\text{ر ما}}{\text{ج}} = \text{لا} + \text{جَ}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{ر ما}}{\text{ج}} = \text{جب}\left(\text{ر لا} + \text{ر جَ}\right)$$

$$\text{اور} \quad \text{ما} = \frac{\text{ج}}{\text{ر}}\left(\text{جب ر لا جم ر جَ} + \text{جم ر لا جب ر جَ}\right)$$

$$\text{یعنے} \quad \text{ما} = \text{ج}_1\,\text{جب ر لا} + \text{ج}_2\,\text{جم ر لا}$$

[طبیعیات کے طالب علم کو معلوم ہو گیا ہو گا کہ مندرجۂ بالا مثال میں اگر بجائے ما نقل مکان س لکھا جائے بجائے لا، وقت و اور بجائے ر زاویۂ رفتار سہ تو مساوات سادہ موسیقی حرکت کی ہو جاتی ہے جس میں اسراع نقل مکان کے راست متناسب ہے لیکن مخالف سمت میں۔

$$\text{اس حرکت میں رفتار ر} = \frac{\text{فر س}}{\text{فر و}} = \text{سہ}\left(\text{ج}_1\,\text{جم سہ و} - \text{ج}_2\,\text{جب سہ و}\right)$$

جس وقت ر = ۰ نقل مکان اعظم ہوتا ہے

$$\text{اور} \quad \text{ج}_1\,\text{جم سہ و} = \text{ج}_2\,\text{جب سہ و} \quad \text{یعنے} \quad \text{مس سہ و} = \frac{\text{ج}_1}{\text{ج}_2}$$

$$\text{اس لیے} \quad \text{جب سہ و} = \frac{\text{ج}_1}{\sqrt{\text{ج}_1^2+\text{ج}_2^2}} \quad \text{اور} \quad \text{جم سہ و} = \frac{\text{ج}_2}{\sqrt{\text{ج}_1^2+\text{ج}_2^2}}$$

$$\text{اور اعظم نقل مکان یا حیطۂ ارتعاش} = \sqrt{\text{ج}_1^2+\text{ج}_2^2}$$

$$\text{ذرا غور کرنے سے معلوم ہو جائیگا کہ وقتِ دوران و} = \frac{2\pi}{\text{سہ}}$$

مثالیں

(۱) اگر کوئی ذرہ خطِ مستقیم میں اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس کا اسراع اس کے نقل مکان کے راست متناسب اور نقل مکان ہی کی سمت میں ہو تو ایسی حرکت کی تفرقی مساوات ہے

$$\frac{\text{فر}^2\,\text{س}}{\text{فر و}^2} = \text{ک}^2\,\text{س}$$

ثابت کرو کہ اس کا حل ہے $\text{س} = \text{ا}\,\text{و}^{\text{ک و}} + \text{ب}\,\text{و}^{-\text{ک و}}$

ثابت کرو کہ یا ا جبز ک و + ب جمز ک و

(۲) $\frac{\text{فر}^2\,\text{لا}}{\text{فر و}^2} = ۴\,\text{جب}\,۲\,\text{و}$ کا حل ہے $\text{لا} = -\text{جب}\,۲\,\text{و} + \text{ج}_1\,\text{و} + \text{ج}_2$

(۳) $\frac{\text{فر}^2\,\text{لا}}{\text{فر و}^2} = \frac{۱}{\text{ہا}\sqrt{\text{لا}}}$ کا حل ہے $۳\,\text{و} = ۲\,\text{ا}^{\frac{۱}{۲}}\,(\text{لا}^{\frac{۱}{۲}} - ۲\,\text{ج}_1)(\text{لا}^{\frac{۱}{۲}} + \text{ج}_1)^{\frac{۱}{۲}} + \text{ج}_2$

(۴) $\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر و}^2} = \text{و}^{۲\text{و}}$ کا حل ہے $\text{ما} = \frac{\text{و}^{۲\text{و}}}{۴} + \text{ج}_1\,\text{و} + \text{ج}_2$

(۵) $\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر لا}^2} + \frac{\text{ا}^2}{\text{ما}^2} = ۰$ کا حل ہے۔

$$\sqrt{\text{ج}_1\,\text{ما}^2 + \text{ا}^2} - \frac{\text{ا}}{\sqrt{\text{ج}_1}}\,\text{لوک}\left(\sqrt{\text{ج}_1\,\text{ما}} + \sqrt{\text{ا} + \text{ج}_1\,\text{ما}}\right) = \text{ا}\,\text{ج}_1\,\sqrt{۲}\,\text{لا} + \text{ج}_2$$

۸۔ مستقل سروں والی دوسرے رتبہ کی خطی مساواتیں۔

$$\frac{\text{فر}^2\,\text{ما}}{\text{فر لا}^2} + \text{پ}\,\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + \text{ق ما} = ۰ \quad \text{(ز)}$$

کی صورت کی مساواتیں (جس میں پ اور ق مستقل ہیں) اطلاقی ریاضی میں

اہمیت رکھتی ہیں۔

(ز) کا کوئی خاص حل حاصل کرنے کے لیے $\text{ما} = \text{و}^{\text{رلا}}$ ..... (۱)

فرض کرکے مستقل ر کی ایسی قیمت معلوم کرنے کی کوشش کی جاتی ہے جو مساوات (ز) کے لیے درست ہو۔

(۱) کو تفرق کرنے سے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ر}\,\text{و}^{\text{رلا}}$ ، $\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}} = \text{ر}^{2}\,\text{و}^{\text{رلا}}$ .... (۲)

اب (۱) اور (۲) سے مساوات (ز) میں تعویض کرنے اور جزوِ ضربی $\text{و}^{\text{رلا}}$ پر تقسیم کر ڈالنے سے نتیجہ

$\text{ر}^{2} + \text{پ ر} + \text{ق} = 0$ .... (۳)

برآمد ہوتا ہے جو ایک دو درجی مساوات ہے جس کی اصلیں ر کی مطلوبہ قیمتیں ہیں۔

مساوات (۳) کو (ز) کی امدادی مساوات کہتے ہیں۔ اگر (۳) کی اصلیں ر_{1} اور ر_{2} ہیں تو

$\text{ما} = \text{و}^{\text{ر}_{1}\text{لا}}$ اور $\text{ما} = \text{و}^{\text{ر}_{2}\text{لا}}$ ...... (۴)

تفرقی مساوات (ز) کے علیحدہ علیحدہ خاص حل ہیں اور اس کا پورا حل ہے

$\text{ما} = \text{ج}_{1}\,\text{و}^{\text{ر}_{1}\text{لا}} + \text{ج}_{2}\,\text{و}^{\text{ر}_{2}\text{لا}}$ .... (۵)

(۵) میں فی الواقع دو اختیاری مستقل ہیں اور یہ رابطہ (ز) کے لیے صادق آتا ہے۔

توضیحی مثال۔ $\frac{\text{فر}^{2}\,\text{ما}}{\text{فر لا}^{2}} + \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} - 6\,\text{ما} = 0$ کو حل کرو۔

حل۔ اس مساوات کا معاون حل $\text{ر}^{2} + \text{ر} - 6 = 0$ ہے

اس کو حل کرنے سے اس کی اصلیں ۲ اور ‎-۳ برآمد ہوتی ہیں۔ اور (ز) کی مساوات (۵) سے دی ہوئی مساوات کا پورا حل

$\text{ما} = \text{ج}_{1}\,\text{و}^{2\text{لا}} + \text{ج}_{2}\,\text{و}^{-3\text{لا}}$ ہے جواب

[آزما کر دیکھ لیا جا سکتا ہے کہ دی ہوئی مساوات میں ما کی یہ قیمت درج کرنے سے اس کی تصدیق ہو جاتی ہے ۔]

اگر امدادی مساوات کی اصلیں خیالی ہوں تو (۵) کے

قوت نما (exponents) بھی خیالی ہونگے ۔ لیکن (۵) میں ج_1 اور ج_2 کے لیے مناسب خیالی قیمتیں منتخب کرنے سے ایک حقیقی پورا حل دریافت ہو سکتا ہے ۔

چنانچہ فرض کرو $\text{ر}_1 = \text{ا} + \text{ب}\sqrt{-1}$ ، $\text{ر}_2 = \text{ا} - \text{ب}\sqrt{-1}$ ..... (۶)

مساوات (۳) کی دو مزدوج خیالی اصلیں ہیں ۔ تب

$$\text{و}^{\text{ر}_1\text{لا}} = \text{و}^{(\text{ا}+\text{ب}\sqrt{-1})\text{لا}} = \text{و}^{\text{الا}}\,\text{و}^{\text{ب لا}\sqrt{-1}} \text{ ، } \text{و}^{\text{ر}_2\text{لا}} = \text{و}^{(\text{ا}-\text{ب}\sqrt{-1})\text{لا}}$$

$$= \text{و}^{\text{الا}}\,\text{و}^{-\text{ب لا}\sqrt{-1}} \quad \text{............ (۷)}$$

ان قیمتوں کو (۵) میں تعویض کرنے سے

$$\text{ما} = \text{و}^{\text{الا}}\left(\text{ج}_1\,\text{و}^{\text{ب لا}\sqrt{-1}} + \text{ج}_2\,\text{و}^{-\text{ب لا}\sqrt{-1}}\right) \quad \text{....... (۸)}$$

لیکن $\text{و}^{\text{ب لا}\sqrt{-1}} = \text{جم ب لا} + \sqrt{-1}\ \text{جب ب لا}$ اور $\text{و}^{-\text{ب لا}\sqrt{-1}}$

$= \text{جم ب لا} - \sqrt{-1}\ \text{جب ب لا}$

[ملاحظہ ہو نصاب ریاضی حصہ اول باب ۱۴ صفحہ ۲۸۲]

جب یہ قیمتیں (۸) میں تعویض کی جاتی ہیں تو پورا حل لکھا جا سکتا ہے ۔

$$\text{ما} = \text{و}^{\text{الا}}\left(\textbf{ا}\ \text{جم ب لا} + \textbf{ب}\ \text{جب ب لا}\right) \quad \text{..... (۹)}$$

اگر نئے اختیاری مستقل **ا** اور **ب** کی سابقہ ج_1 اور ج_2 سے بذریعہ $\textbf{ا} = \text{ج}_1 + \text{ج}_2$ اور $\textbf{ب} = (\text{ج}_1 - \text{ج}_2)\sqrt{-1}$ تعیین کی جاتی ہے ۔ بالفاظ دیگر اب (۵) میں بجائے ج_1 اور ج_2 خیالی قیمتیں $\text{ج}_1 = \frac{1}{2}(\textbf{ا} - \textbf{ب}\sqrt{-1})$ ، $\text{ج}_2 = \frac{1}{2}(\textbf{ا} + \textbf{ب}\sqrt{-1})$ لی جاتی ہیں ۔

ا اور ب کو (۹) میں باری باری سے قیمتیں ایک اور صفر اور صفر اور ایک دینے سے ہم دیکھتے ہیں کہ

$ما = و^{ر لا}$ جم ب لا اور $ما = و^{ر لا}$ جب ب لا .... (۱۰)

(ز) کے حقیقی خاص حل ہیں۔

توضیحی مثال ۔ حل کرو $\frac{فر^{2} ما}{فر لا^{2}} + ک^{2} ما = ۰.$

حل ۔ یہاں امدادی مساوات ہے $ر^{2} + ک^{2} = ۰$ سے ہے

پس $ر = \pm ک \sqrt{-1}$

(۶) سے مقابلہ کرنے سے ظاہر ہے کہ ا = ۰، ب = ک پس (۹) سے پورا حل

ما = ا جم ک لا + ب جب ک لا ہے۔

[نوٹ ۔ ایسی ہی مساوات کو ۔۔ میں بصورت (و) ایک دوسرے طریقہ سے حل کیا گیا ۔ دونوں طریقوں کا مقابلہ کیا جائے ۔]

اگر معاون مساوات کی اصلیں حقیقی اور مساوی ہوں تو ایسی صورت میں $پ^{2} = ۴ق$ اور

مساوات (۳) ہو جاتی ہے $ر^{2} + ر پ + \frac{1}{4} ق^{2} = (ر + \frac{1}{2} پ)^{2} = ۰$ .... (۱۱)

اور $ر_{1} = ر_{2} = -\frac{1}{2} پ$ اس صورت میں

$ما = و^{ر_{1} لا}$ اور $ما = لا\, و^{ر_{1} لا}$ ...... (۱۲)

علٰحدہ علٰحدہ خاص حل ہیں ۔ پس پورا حل ہے :

$ما = و^{ر_{1} لا} (ج_{1} + ج_{2} لا)$ .... (۱۳)

اس بیان کی تائید میں صرف اتنا ثابت کر دینا ضروری ہے کہ (۱۲) کی دوسری مساوات دی ہوئی تفرقی مساوات کے لیے ایک حل مہیا کر دیتی ہے ۔ لیکن عمل تفرق سے

$$\text{ما} = \text{لا}\ \text{و}^{\text{ر}_1\text{لا}}\ ،\ \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{و}^{\text{ر}_1\text{لا}}(1+\text{ر}_1\text{لا})\ ،\ \frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فر لا}^2} = \text{و}^{\text{ر}_1\text{لا}}(2\text{ر}_1+\text{ر}_1^2\text{لا}) \quad \ldots \ (14)$$

ان قیمتوں کو (ز) کے اندر تعویض کرنے اور $\text{و}^{\text{ر}_1\text{لا}}$ پر تقسیم کر ڈالنے سے نتیجۂ ذیل حاصل ہوتا ہے:

$$(\text{ر}_1^2 + \text{پ ر}_1 + \text{ق})\ \text{لا} + 2\text{ر}_1 + \text{پ} \quad \ldots\ldots \ (15)$$

جو صفر کے مساوی ہے اس لیے کہ ر_1 رابطہ (۳) کی تصدیق کرتا ہے اور

$$= -\frac{1}{2}\text{پ}$$

توضیحی مثال۔ حل کرو $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فر لا}^2} + 4\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + 4\text{ما} = 0$

یہاں معاون مساوات ہے $\text{ر}^2 + 4\text{ر} + 4 = 0$ یعنے $(\text{ر}+2)^2 = 0$

پس دونوں اصلیں مساوی ہیں اور $\text{ر}_1 = -2$

اور (۱۴) کے رو سے مساوات کا پورا حل ہے

$$\text{ما} = \text{و}^{-2\text{لا}}(\text{ج}_1 + 2\text{ج}_2\text{لا})$$

[طالب علم کی مشق کے لیے چھوڑ دیا جاتا ہے کہ ثابت کرے کہ مساوات کا خاص حل درانحالیکہ $\text{ما} = 6$ اور $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = -4$ جبکہ $\text{لا} = 0$

$\text{ما} = \text{و}^{-2\text{لا}}(6 + 16\text{لا})$ ہے]

[**نوٹ** - (ز) کی صورت کی مساواتوں کے حل میں بڑی سہولت پیدا ہو جاتی ہے اگر ان کو

$$(\text{عف}^2 + \text{پ عف} + \text{ق})\ \text{ما} = 0$$

لکھا جائے جس میں $\text{عف} \equiv \left(\frac{\text{فر}}{\text{فر لا}}\right)$ عامل تفرق operator کہلاتا ہے۔ ما کے ساتھ اس کے استعمال کا وہی مفہوم ہے جو $\text{عف}^2\text{ما} + \text{پ عف ما} + \text{ق ما}$ کا ہے۔ اس طرح لکھنے سے معلوم ہوگا کہ مساوات $(\text{عف}^2 + \text{پ عف} + \text{ق})\ \text{ما} = 0$

ے کی مساوات (۳) یعنے $\text{ر}^{۲} + \text{پ ر} + \text{ق} = ۰$ کے بہت مشابہ ہے۔
جب یہ طریقہ کتابت استعمال کر کے جبری مساوات $\text{عف}^{۲} + \text{پ عف} + \text{ق} = ۰$
حل کی جاتی ہے تو عف کے لیے وہی قیمتیں دستیاب ہوتی ہیں جو ر کے لیے ہوتی ہیں]

مثالیں

ذیل کی تفرقی مساواتوں کا پورا حل معلوم کرو :—

(۱) $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} - ۴\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ۳\text{ما} = ۰$ [جواب، $\text{ما} = \text{ج}_{۱}\text{قو}^{\text{لا}} + \text{ج}_{۲}\text{قو}^{۳\text{لا}}$

(۲) $۹\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} - ۶\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + \text{ما} = ۰$ [جواب، $\text{ما} = (\text{ا لا} + \text{ب})\,\text{قو}^{\frac{\text{لا}}{۳}}$

(۳) $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} + ۴\text{لا} = ۰$ [جواب، $\text{ما} = \text{ج}_{۱}\text{جم ۲لا} + \text{ج}_{۲}\text{جب ۲لا}$

(۴) $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} + ۳\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = ۰$ [جواب، $\text{ما} = \text{ج}_{۱} + \text{ج}_{۲}\text{قو}^{-۳\text{لا}}$

(۵) $\frac{\text{فر}^{۲}\text{لا}}{\text{فرو}^{۲}} + ۴\frac{\text{فرلا}}{\text{فرو}} + ۸\text{لا} = ۰$ [جواب، $\text{لا} = \text{قو}^{-۲\text{و}}(\text{ج}_{۱}\text{جم ۲و} + \text{ج}_{۲}\text{جب ۲و})$

(۶) $(\text{عف}^{۲} + ۳\text{عف} + ۱)\,\text{ما} = ۰$ [جواب، $\text{ما} = \text{قو}^{-\frac{۳}{۲}\text{لا}}\left(\text{ا}\,\text{قو}^{\frac{\sqrt{۵}\,\text{لا}}{۲}} + \text{ب}\,\text{قو}^{-\frac{\sqrt{۵}\,\text{لا}}{۲}}\right)$

(۷) مساوات $(\text{عف}^{۲} + ۲\text{عف} + ۲)\,\text{ما} = ۰$ کا خاص حل دریافت کرو دراںحالیکہ ما = ۳،
$\text{عف ما} = -۳$ جبکہ $\text{لا} = ۰$ [جواب، $\text{ما} = ۳\,\text{قو}^{-\text{لا}}\,\text{جم لا}$

تفرقی مساوات $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} + \text{پ ما} + \text{ق} = \text{ل}$ .... (ح)

کا حل جبکہ پ اور ق مستقل ہیں اور ل متبوع متغیر لا کا تفاعل ہے یا مستقل۔
اس کے لیے تین عمل کرنے پڑتے ہیں۔

پہلا عمل - مساوات (ز) کو حل کرو۔ فرض کرو کہ اس کا پورا حل ہے

ما = ی .... (۱۶)

تو ی کو مساوات (ح) کا متمم تفاعل کہتے ہیں۔

دوسرا عمل - آزمایش کے طریقہ سے مساوات (ح) کا کوئی خاص حل معلوم کرو

ما = و .... (۱۷)

تیسرا عمل - اب (ح) کا پورا حل ہے

ما = ی + و .... (۱۸)

امر واقعی ہے کہ رابطہ (۱۸) سے جب ما کی قیمت مساوات (ح) میں تعویض کی جاتی ہے تو مساوات کے لیے صادق آتی ہے اور (۱۸) میں دو لازمی اختیاری مستقل ہوتے ہیں۔ خاص حل (۱۷) معلوم کرنے کے لیے ذیل کی ہدایات مفید پائی جائینگی۔ ان ضابطوں میں تمام حروف باستثناء متبوع متغیر لا مستقل ہیں۔

عام صورت - اگر ما = لا مساوات (ز) کا ایک خاص حل نہ ہو۔

اور (۱) لا بصورت ا + ب لا ہو تو فرض کرو ما = و = ا + ب لا

" (۲) لا بصورت ا و^ب لا ہو تو فرض کرو ما = و = ا و^ب لا

" (۳) لا بصورت ا۱ جم ب لا + ا۲ جب ب لا ہو تو فرض کرو ما = و

= ا۱ جم ب لا + ا۲ جب ب لا

خاص صورت - اگر ما = لا مساوات (ز) کا ایک خاص حل ہو تو

و کے لیے صورتِ بالا مضروب بہ لا (یعنے متبوع متغیر) فرض کرو۔

طریقہ یہ ہے کہ حسب ہدایات مصرحۂ بالا مساوات (ح) کے اندر ما = و تعویض کی جائے اور مستقل مقادیر ا، ب، ا۱، ا۲ دریافت کیے جائیں جو مساوات (ح) کے لیے صادق آتے ہیں۔

توضیحی مثال (۱) حل کرو فز^۲ ما / فز لا^۲ + فز ما / فز لا - ۶ ما = ۳ لا

حل۔ پہلا عمل۔ ۔۔۔ کے ابتدا ہی میں $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} + \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} - ۶\,\text{ما} = ۰$

کو پورا حل کر کے بتایا گیا ہے اس کے لحاظ سے دی ہوئی مساوات کا متمم تفاعل ہے

$$\text{ما} = \text{ی} = \text{ج}_{۱}\,\text{و}^{۲\text{لا}} + \text{ج}_{۲}\,\text{و}^{-۳\text{لا}}$$

دوسرا عمل۔ چونکہ ما = لا = ۳ لا مساوات $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} + \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} - ۶\,\text{ما} = ۰$ کا ایک خاص حل نہیں ہے اس لیے

فرض کرو کہ اس کا ایک خاص حل ہے

$$\text{ما} = \text{و} = \text{ا} + \text{ب لا}$$

ما کی یہ قیمت دی ہوئی مساوات میں تعویض کرنے سے ۰ + ب − ۶ (ا + ب لا) = ۳ لا

اب لا کی مشابہ قوتوں کے سروں کو مساوی لکھنے سے

$$\text{ب} - ۶\,\text{ا} = ۰ \quad \text{اور} \quad -۶\,\text{ب} = ۳$$

$$\text{یعنی} \quad \text{ب} = -\frac{۱}{۲} \quad \text{اور} \quad \text{ا} = -\frac{۱}{۱۲}$$

$$\text{پس} \quad \text{ما} = \text{و} = -\frac{۱}{۱۲} - \frac{۱}{۲}\,\text{لا}$$

تیسرا عمل۔ لہٰذا پورا حل ہے

$$\text{ما} = \text{ی} + \text{و} = \text{ج}_{۱}\,\text{و}^{۲\text{لا}} + \text{ج}_{۲}\,\text{و}^{-۳\text{لا}} - \frac{۱}{۱۲} - \frac{۱}{۲}\,\text{لا} \quad \text{جواب}$$

توضیحی مثال (۲) حل کرو $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} + \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} - ۶\,\text{ما} = ۲\,\text{و}^{۳\text{لا}}$

حل۔ پہلا عمل۔ اس مساوات کا متمم تفاعل ہے۔

$$\text{ما} = \text{ی} = \text{ج}_{۱}\,\text{و}^{۲\text{لا}} + \text{ج}_{۲}\,\text{و}^{-۳\text{لا}}$$

دوسرا عمل - یہاں ما = ک = ۲ $\text{و}^{\text{۲لا}}$ مساوات $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} + \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} - ۶\,\text{ما} = ۰$ کا ایک خاص حل ہے اس لیے کہ وہ مساواتِ بالا کے مکمل حل میں $\text{ج}_{۱} = ۲$ اور $\text{ج}_{۲} =$ صفر لکھنے سے حاصل ہوتا ہے۔ پس دی ہوئی مساوات کے ایک خاص حل کے لیے فرض کرو

$$\text{ما} = \text{و} = \text{ا لا و}^{\text{۲لا}}$$

اس کو تفرق کرنے سے $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = \text{ا و}^{\text{۲لا}} + ۲\,\text{ا لا و}^{\text{۲لا}}$

اور $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} = ۲\,\text{ا و}^{\text{۲لا}} + ۲\,\text{ا و}^{\text{۲لا}} + ۴\,\text{ا لا و}^{\text{۲لا}}$ حاصل ہوتے ہیں۔

اب $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}}$، $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ اور ما کی ان قیمتوں کو دی ہوئی مساوات میں تعویض کرنے سے حاصل ہوتا ہے

$$۴\,\text{ا و}^{\text{۲لا}} + ۴\,\text{ا لا و}^{\text{۲لا}} + \text{ا و}^{\text{۲لا}} + ۲\,\text{ا لا و}^{\text{۲لا}} - ۶\,\text{ا لا و}^{\text{۲لا}} = ۲\,\text{و}^{\text{۲لا}}$$

یعنی $۵\,\text{ا و}^{\text{۲لا}} = ۲\,\text{و}^{\text{۲لا}} \quad \therefore \text{ا} = \frac{۲}{۵}$

پس $\text{ما} = \text{و} = \frac{۲}{۵}\,\text{لا و}^{\text{۲لا}}$

تیسرا عمل - اس لیے مساوات کا پورا حل ہے

$$\text{ما} = \text{د} + \text{و} = \text{ج}_{۱}\,\text{و}^{\text{۲لا}} + \text{ج}_{۲}\,\text{و}^{\text{-۳لا}} + \frac{۲}{۵}\,\text{لا و}^{\text{۲لا}}$$ جواب

توضیحی مثال (۳) مساوات $\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فر لا}^{۲}} + ۴\,\text{ما} = ۲\,\text{جم}\,۲\,\text{لا}$ کا خاص حل دریافت کرو درانحالیکہ

$\text{ما} = ۰$ اور $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} = ۲$ جبکہ $\text{لا} = ۰$

حل - پہلے پورا حل معلوم کر لیا جائے۔

پہلا عمل - $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فر لا}^2}$ + ۴ ما = ۰ کو حل کرنے سے متمم تفاعل

ما = ی = ج۱ جم ۲ لا + ج۲ جب ۲ لا دستیاب ہوتا ہے۔

دوسرا عمل - دی ہوئی مساوات کے بائیں جانب پر غور کرنے سے معلوم ہو جاتا ہے کہ ما = ۲ جم ۲ لا مساوات $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فر لا}^2}$ + ۴ ما = ۰ کا ایک خاص حل ہے جبکہ مساوات بالا میں ج۱ = ۲ اور ج۲ = ۰ لکھا جاتا ہے۔ اس لیے دی ہوئی مساوات کے ایک خاص حل کے لیے فرض کرو۔

ما = و = لا (ا۱ جم ۲ لا + ا۲ جب ۲ لا)

اس آخری مساوات کو تفرق کرنے سے ہمیں حاصل ہوتے ہیں۔

$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ = ا۱ جم ۲ لا + ا۲ جب ۲ لا - ۲ لا (ا۱ جب ۲ لا - ا۲ جم ۲ لا)

اور $\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فر لا}^2}$ = ۴ ا۲ جب ۲ لا + ۴ ا۲ جم ۲ لا - ۴ لا (ا۱ جم ۲ لا + ا۲ جب ۲ لا)

$\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فر لا}^2}$ اور $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی ان قیمتوں کو دی ہوئی مساوات میں تعویض کر کے سادہ بنانے پر نتیجہ برآمد ہوتا ہے۔

-۴ ا۱ جب ۲ لا + ۴ ا۲ جم ۲ لا = ۲ جم ۲ لا

یہ مساوات ایک متماثلہ (identity) ہو جاتی ہے جبکہ ا۱ = ۰ اور ا۲ = $\frac{۱}{۲}$

ما = و والی مساوات میں تعویض کرنے سے ما = و = $\frac{۱}{۲}$ لا جب ۲ لا حاصل ہوتا ہے۔

تیسرا عمل - پس دی ہوئی مساوات کا پورا حل ہے

ما = ج۱ جم ۲ لا + ج۲ جب ۲ لا + $\frac{۱}{۲}$ لا جب ۲ لا

اب ہمیں ج۱ اور ج۲ کی قیمتیں معلوم کرنی ہیں درانحالیکہ

ما = ۰ اور $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ = ۲ جبکہ لا = ۰

ما کے پورے حل کی مساوات کو تفرق کرنے سے

$\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ = −۲ ج۱ جب ۲ لا + ۲ ج۲ جم ۲ لا + $\frac{1}{2}$ جب ۲ لا + لا جم ۲ لا

ما اور $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ کی مساواتوں میں مصرحہ بالا شرائط تعویض کرنے سے

۰ = ج۱ ، ۲ = ۲ ج۲ ∴ ج۱ = ۰ اور ج۲ = ۱

پس مطلوبہ خاص حل ہے ما = جب ۲ لا + $\frac{1}{2}$ لا جب ۲ لا　　جواب

مثالیں

ذیل کی تفرقی مساواتوں کے پورے حل معلوم کرو:—

(۱) $\frac{\text{فر}^{2}\text{ س}}{\text{فر و}^{2}}$ − ۶ $\frac{\text{فر س}}{\text{فر و}}$ + ۱۳ س = ۳۹

[جواب، س = و^۳و (ج۱ جم ۲ و + ج۲ جب ۲ و) + ۳

(۲) $\frac{\text{فر}^{2}\text{ ما}}{\text{فر و}^{2}}$ − ۴ $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر و}}$ + ۷ ما = ۱۴

[جواب، ما = و^۲و (ج۱ جم √۳ و + ج۲ جب √۳ و) + ۲

(۳) $\frac{\text{فر}^{2}\text{ ما}}{\text{فر لا}^{2}}$ − $\frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}}$ − ۲ ما = و^۲لا

[جواب، ما = ج۱ و^۲لا + ج۲ و^−لا + $\frac{1}{3}$ لا و^۲لا

(۴) $\frac{\text{فر}^{2}\text{ ا}}{\text{فر لا}^{2}}$ − ۹ لا = ۶ جم ۳ و　　[جواب، لا = ج۱ و^۳و + ج۲ و^−۳و − $\frac{1}{3}$ جم ۳ و

(۵) $\frac{\text{فر}^{2}\text{ لا}}{\text{فر و}^{2}}$ − ۲ $\frac{\text{فر لا}}{\text{فر و}}$ + ۵ لا = ۱۰ جب و

[جواب، لا = و^و (ج۱ جم ۲ و + ج۲ جب ۲ و) + ۲ جب و + جم و

ذیل کی مثالوں میں خاص حل دریافت کرو جو دی ہوئی شرائط کو پورا کرتا ہے۔

(۶) $\frac{فر^2 لا}{فر و^2} - 3 \frac{فر لا}{فر و} = 6$، $لا = 1$، $\frac{فر لا}{فر و} = 1$ جبکہ $و = 0$۔

[جواب، $لا = و^3 - 2 و$

(۷) $\frac{فر^2 ا}{فر لا^2} - 5 \frac{فر ا}{فر لا} + 6 ا = 2 و^{لا}$، $ا = 1$، $\frac{فر ا}{فر لا} = 1$ جبکہ $و = 0$۔

[جواب، $ا = و^{لا}$

۹۔ میکانیات کے بعض مسائل میں تفرقی مساواتوں کا استعمال ۔

مثال (۱) ایک ذرہ خطِ مستقیم میں حرکت کرتا ہے اس کا اسراع ایک مقررہ مقام سے اس کے فاصلہ کے مربع کے بالعکس متناسب ہے۔ (ا) اس کی رفتار اور طے شدہ فاصلہ، (ب) وقت اور طے شدہ فاصلہ کے مابین رابطے دریافت کرو۔

حل (ا) فاصلہ کو س، رفتار کو ر، اسراع کو ا اور وقت کو و سے تعبیر کرو۔

$$تب\ ر = \frac{فر س}{فر و} \qquad ا = \frac{فر^2 س}{فر و^2} = \frac{فر ر}{فر و} = \frac{فر ر}{فر س}\,\frac{فر س}{فر و} = ر \frac{فر ر}{فر س}$$

مفروضہ کے لحاظ سے $ا = -\frac{ک}{س^2}$ جس میں ک ایک مستقل ہے۔ تب $ر \frac{فر ر}{فر س} = -\frac{ک}{س^2}$

$$پس\ \int ر\, فر ر = -ک \int_{س_1}^{س_2} \frac{فر س}{س^2} \quad \therefore \quad \frac{1}{2} ر^2 = ک \left[\frac{1}{س_2} - \frac{1}{س_1}\right]$$

اور $س = \sqrt{\frac{2 ک (س_1 - س_2)}{س_1 س_2}}$

(ب) اگر فاصلہ $س_۱$ پر ذرہ حالت سکون میں ہے اور وقت و کے بعد اس کا فاصلہ $س_۲$ ہے تو

$$ر = \frac{فرس_۲}{فرو} = \therefore \; فرو = \sqrt{\frac{۲ک(س_۱ - س_۲)}{س_۱ س_۲}} \; فرس \frac{س_۱ س_۲}{۲ک(س_۱ - س_۲)}$$

$$\text{اور} \quad \int فرو = \frac{۱}{\sqrt{۲ک}} \int_{س_۱}^{س_۲} \sqrt{\frac{س_۱ س_۲}{س_۱ - س_۲}}$$

$س_۲ = س_۱ جم^۲ ط$ لکھو، تب $جم ط = \sqrt{\frac{س_۲}{س_۱}}$ ، $\sqrt{س_۱ س_۲} = س_۱ جم ط$

$\sqrt{س_۱ - س_۲} = \sqrt{س_۱}$ جب ط اور $فرس_۲ = س_۱ (-۲ جم ط جب ط فرط)$

یعنے $فرس_۲ = -۲$ جم ط جب ط فرط اور تکملہ کی زیریں حد = ۰

(اس لیے کہ $س_۲ = س_۱$ جم ط اور وہ $س_۱$ ہو جاتی ہے جبکہ ط = ۰)

$$\therefore و = \frac{-۱}{\sqrt{۲ک}} \int^{ط} ۲ س_۱^{\frac{۳}{۲}} جم^۲ ط فرط = -\frac{۱}{\sqrt{۲ک}} \int^{ط} س_۱^{\frac{۳}{۲}} (۱ + جم ۲ط) فرط$$

$$= -\frac{س_۱^{\frac{۱}{۲}}}{\sqrt{۲ک}} \left\{ س_۱ ط + س_۱ جب ط جم ط \right\}$$

$$= -\sqrt{\frac{س_۱}{۲ک}} \left\{ س_۱ جم^{-۱} \sqrt{\frac{س_۲}{س_۱}} + \sqrt{س_۲ (س_۱ - س_۲)} \right\}$$

اگر وقت $(و - و_۰)$ میں فاصلہ $(س - س_۰)$ طے ہوتا ہے تو

$ر = ۲ک \left(\frac{۱}{س_۲} - \frac{۱}{س_۱}\right)$ سے آغاز کرکے $س_۱ = \infty$ لکھنے سے

$ر = -\sqrt{\frac{۲ک}{س_۲}} = \frac{فرس}{فرو}$ حاصل ہوتا ہے پس $فرو \sqrt{۲ک} = -\sqrt{س_۲}\; فرس$

متغیروں کو جدا کرکے تکمل کرنے سے $\sqrt{۲ک} \int فرو = -\int_{س_۰}^{س} س^{\frac{۱}{۲}}$

$$\therefore (و - و_۰) = \frac{۲}{۳\sqrt{۲ک}} \left(س_۰^{\frac{۳}{۲}} - س^{\frac{۳}{۲}}\right) = \frac{\sqrt{۲}}{۳\sqrt{ک}} \left(س_۰^{\frac{۳}{۲}} - س^{\frac{۳}{۲}}\right)$$

مثال (۲) ذرہ خطِ مستقیم میں حرکت کرتا ہے لیکن اسراع میں اس کی رفتار کے تناسب گھٹاؤ واقع ہوتا ہے۔

[کہر یا پانی کے مہین قطرے غیر متحرک ہوائی فضاء میں اسی طرح حرکت کرتے ہیں]

حل۔ (ا) رفتار اور وقت میں تعلق۔ س، ر اور ا کو ایک ہی سمت میں مثبت مانو اور فرض کرو کہ اسراع میں گھٹاؤ اس طرح سے واقع ہوتا ہے کہ رفتار جب رم ہوتی ہے تو مخالف اسراع ا کے برابر ہوجاتی ہے۔ پس اس حرکت کی مساوات ہے

$$\frac{\text{فر ر}}{\text{فر و}} = \text{ر}\,\frac{\text{فر ر}}{\text{فر س}} = \text{ا} - \frac{\text{ا}}{\text{رم}}\,\text{ر} = \frac{\text{ا}}{\text{رم}}\left(\text{رم} - \text{ر}\right)$$

فرض کرو کہ ذرہ مبداء پر حالت سکون میں ہے اور اس پر اسراع ا عاید کیا جاتا ہے جبکہ و = ۰

تب متغیروں کو جدا کرکے تکمل کرنے سے

$$\frac{\text{ا}}{\text{رم}}\int \text{فر و} = \int \frac{\text{فر ر}}{\text{رم} - \text{ر}}$$

$$\text{پس}\quad \frac{\text{ا}}{\text{رم}}\,\text{و} = \text{لوک}_{\text{و}}\left(\frac{\text{رم}}{\text{رم} - \text{ر}}\right) \quad \text{یعنے}\quad \text{و} = \frac{\text{رم}}{\text{ا}}\,\text{لوک}_{\text{و}}\left(\frac{\text{رم}}{\text{رم} - \text{ر}}\right)$$

$$\text{یا}\quad \text{و}^{\frac{\text{ا و}}{\text{رم}}} = \frac{\text{رم}}{\text{رم} - \text{ر}}$$

$$\text{جس سے حاصل ہوتا ہے}\quad \text{ر} = \text{رم}\left(1 - \text{و}^{-\frac{\text{ا و}}{\text{رم}}}\right)$$

(ب) رفتار اور فاصلہ میں تعلق۔

$$\text{چونکہ}\quad \frac{\text{فر ر}}{\text{فر و}} = \frac{\text{فر س}}{\text{فر و}}\,\frac{\text{فر ر}}{\text{فر س}} = \text{ر}\,\frac{\text{فر ر}}{\text{فر س}}$$

اس لیے (۱) کی ابتدائی مساواتِ حرکت ہو جاتی ہے

ر (فرر / فرس) = (۱ / رم) (رم - ر)

اب متغیروں کو جدا کر کے تکمل کرنے سے

∫ (۱ / رم) فرس = ∫ (رفرر / (رم - ر)) = - ∫ ((ر - رم + رم) / (ر - رم)) فرر

پس (۱ / رم) س = - ر + رم لوکو (رم / (رم - ر))

۱۰۔ ن۔ ویں رتبہ کی مستقل سروں والی خطی تفرقی مساواتیں۔

تفرقی مساوات (فرن ا / فرلان) + ک۱ (فرن-۱ ا / فرلان-۱) + ک۲ (فرن-۲ ا / فرلان-۲)

+ .... کن ا = ۰ .... (ط)

(جس میں ک۱، ک۲ ..... کن مستقل ہیں) کے حل کے لیے اگر مساوات کے سیدھے جانب کے رکن میں ا کے بجائے ورلا تعویض کیا جائے تو

(رن + ک۱ رن-۱ + ک۲ رن-۲ + ... کن) ورلا حاصل ہوتا ہے۔ اور یہ جملہ ر کی تمام قیمتوں کے لیے جو مساوات

رن + ک۱ رن-۱ + ک۲ رن-۲ + ... کن = ۰ ..... (۱)

کی تصدیق کرتی ہیں منعدم ہو جاتا ہے۔

پس ر کی ان تمام قیمتوں کے لیے ورلا مساوات (ط) کا ایک حل ہے۔ مساوات (۱) مساوات (ط) کی امدادی کہلاتی ہے۔ واضح ہو کہ دونوں مساواتوں کے سر ایک ہی ہیں۔ (۱) کے قوت نما (ط) کے مشتقات کے رتبوں کے

متناظر ہیں اور ما کی بجائے ۱ درج ہے ۔ (۱) کی اصلوں سے ہم مساوات (ط) کے خاص حل لکھ سکتے ہیں ۔ اور یہ نتائج بعینہٖ ش کے نتائج ہیں جبکہ مساوات کا رتبہ دو سے متجاوز ہے ۔ ان کا ثبوت اس نصاب سے بالاتر نصاب کی کتابوں میں مل سکتا ہے ۔

تفرقی مساوات (ط) کے حل کا قاعدہ ۔

پہلا عمل ۔ متناظر امدادی مساوات

رن + ک۱ رن-۱ + ک۲ رن-۲ + ... کن = ۰ ...... (۱)

لکھ دی جائے ۔

دوسرا عمل ۔ امدادی مساوات کو پورا حل کیا جائے

تیسرا عمل ۔ امدادی مساوات کی اصلوں سے تفرقی مساوات کے متناظر خاص حل (بموجب اشارات ذیل) لکھ لیا جائے ۔

	امدادی مساوات کی		تفرقی مساوات کا
(ا)	ہر علیحدہ اصل ر۱	سے حاصل ہوتا ہے	ایک خاص حل ہ^ر۱لا
(ب)	ہر علیحدہ خیالی اصلوں کے جفت ا ± ب √-۱	سے حاصل ہوتے ہیں	دو خاص حل ہ^الا جم بلا و ہ^الا جب بلا
(ج)	ایک ضعفی اصل سے جو س مرتبہ واقع ہوتی ہے	حاصل ہوتے ہیں	س (یا ۲س) خاص حل (ا) یا (ب) خاص حلوں کو ا، لا، لا۲ ..... لاس-۱ سے ضرب دیکر

چوتھا عمل ۔ اس طرح حاصل شدہ ن آزاد حلوں میں سے ہر ایک حل کو ایک اختیاری مستقل سے ضرب دے کر نتائج جمع کر لیے جائیں ۔ اس نتیجہ کو ما کے مساوی لکھنے سے مساوات کا پورا حل دستیاب ہوتا ہے

[نوٹ ۔ صحت عمل کا ایک امتحان یہ ہے کہ پہلے تین عملوں سے ن آزاد

حل حاصل ہونے چاہییں۔]

توضیحی مثال (۱) حل کرو $\frac{فر^{۳} ما}{فر لا^{۳}} - \frac{فر^{۲} ما}{فر لا^{۲}} - ۸ \frac{فر ما}{فر لا} + ۱۲ ما = ۰$

حل - مصرحہ بالا قاعدہ کی رو سے

پہلا عمل - معاون مساوات ہے $ر^{۳} - ر^{۲} - ۸ ر + ۱۲ = ۰$

یعنے $(ر - ۲)(ر - ۲)(ر + ۳) = ۰$

دوسرا عمل - اس کی اصلیں ہیں ۲، ۲، -۳

تیسرا عمل - (ج) دوہری اصل ۲ سے حاصل ہوتے ہیں حل $و^{۲لا}$، $لا و^{۲لا}$

(د) اصل -۳ سے حاصل ہوتا ہے حل $و^{-۳لا}$

چوتھا عمل - پس پورا حل ہے $ما = ج_{۱} و^{۲لا} + ج_{۲} لا و^{۲لا} + ج_{۳} و^{-۳لا}$ جواب

توضیحی مثال (۲) - حل کرو $\frac{فر^{۴} ما}{فر لا^{۴}} - ۵ \frac{فر^{۳} ما}{فر لا^{۳}} + ۵ \frac{فر^{۲} ما}{فر لا^{۲}}$

$+ ۲۵ \frac{فر ما}{فر لا} + ۲۶ ما = ۰$

حل - معاون مساوات ہے $ر^{۴} - ۵ ر^{۳} + ۵ ر^{۲} + ۲۵ ر - ۲۶ = ۰$

یعنے $\{ر - (۳ \pm ۲\sqrt{-۱})\}(ر - ۱)(ر + ۲) = ۰$

جس کی اصلیں ہیں $۳ \pm ۲\sqrt{-۱}$ ، ۱، -۲

پس پورا حل ہے

$ما = ج_{۱} و^{۳لا} جم ۲لا + ج_{۲} و^{۳لا} جب ۲لا + ج_{۳} و^{لا} + ج_{۴} و^{-۲لا}$ جواب

مثالیں

ذیل کی تفرقی مساواتوں کے پورے حل دریافت کرو :—

(۱) $\frac{\text{فر}^4 \text{ا}}{\text{فرلا}^4} - \text{ا} \frac{\text{فر}^3 \text{ا}}{\text{فرلا}^3} - \text{ا}^2 \frac{\text{فر}^2 \text{ا}}{\text{فرلا}^2} - \text{ا}^3 \frac{\text{فرا}}{\text{فرلا}} - 2\,\text{ا}^4\,\text{ا} = 0$

[جواب $\text{ا} = \text{ج}_1 \text{و}^{2\text{ا لا}} + \text{ج}_2 \text{و}^{-\text{ا لا}} + \text{ج}_3 \text{جم ا لا} + \text{ج}_4 \text{جب ا لا}$

(۲) $\frac{\text{فر}^3 \text{ا}}{\text{فرو}^3} + \frac{\text{فر}^2 \text{ا}}{\text{فرو}^2} - 12 \frac{\text{فرا}}{\text{فرو}} = 0$ [جواب $\text{ا} = \text{ج}_1 + \text{ج}_2 \text{و}^{3\text{و}} + \text{ج}_3 \text{و}^{-4\text{و}}$

(۳) $\frac{\text{فر}^4 \text{لا}}{\text{فرو}^4} + 3 \frac{\text{فر}^2 \text{لا}}{\text{فرو}^2} - 4\,\text{لا} = 0$ [جواب $\text{لا} = \text{ج}_1 \text{و}^{\text{و}} + \text{ج}_2 \text{و}^{-\text{و}} + \text{ج}_3 \text{جم}\,2\text{و} + \text{ج}_4 \text{جب}\,2\text{و}$

(۴) $27 \frac{\text{فر}^3 \text{ا}}{\text{فرلا}^3} - 27 \frac{\text{فر}^2 \text{ا}}{\text{فرلا}^2} + 9 \frac{\text{فرا}}{\text{فرلا}} - \text{ا} = 0$ [جواب $\text{ا} = (\text{ج}_1 \text{لا}^2 + \text{ج}_2 \text{لا} + \text{ج}_3)\,\text{و}^{\frac{\text{لا}}{3}}$

(۵) $\frac{\text{فر}^4 \text{ا}}{\text{فرلا}^4} + 3 \frac{\text{فر}^3 \text{ا}}{\text{فرلا}^3} + 3 \frac{\text{فر}^2 \text{ا}}{\text{فرلا}^2} + \frac{\text{فرا}}{\text{فرلا}} = 0$

[جواب $\text{ا} = \text{ج}_1 + \text{و}^{-\text{لا}} (\text{ج}_2 + \text{ج}_3 \text{لا} + \text{ج}_4 \text{لا}^2)$

خطی تفرقی مساوات

$$\frac{\text{فر}^n \text{ا}}{\text{فرلا}^n} + \text{ک}_1 \frac{\text{فر}^{n-1} \text{ا}}{\text{فرلا}^{n-1}} + \text{ک}_2 \frac{\text{فر}^{n-2} \text{ا}}{\text{فرلا}^{n-2}} + \ldots\ldots + \text{ک}_n \text{ا} = V \quad (\text{ی})$$

جس میں ک₁، ک₂ .... کₙ مستقل ہیں اور V یا تو لا کا کوئی تفاعل ہے یا مستقل ۔ یہ مساوات (ح) کے حل کرنے کے طریقوں سے حل کی جاتی ہے۔ اس کے متعلقہ جو تین عمل وہاں درج ہیں یہاں بھی استعمال ہوتے ہیں۔

یعنے پہلے مساوات (ط) حل کی جانی چاہیے جس سے اس کا پورا حل

$\text{ا} = \text{ر}$ . . . . (۲)

حاصل ہوجاتا ہے۔ تب ر دی ہوئی مساوات (ی) کا متمم تفاعل ہے۔ پھر کسی بھی طریقہ سے (ی) کا کوئی خاص حل معلوم کرلیا جائے۔ فرض کرو کہ وہ ہے

$\text{ا} = \text{و}$ . . . . (۳)

تب (ی) کا پورا حل ہے $\text{ا} = \text{ر} + \text{و}$ . . . . (۴)

(۳) کی دریافت میں ن = ۲ کے لیے مساوات (ح) سے متعلق آزمائش کے جو طریقے بتائے گئے ہیں یہاں ن کی کسی قیمت کے لیے بھی استعمال کیے جا سکتے ہیں۔

کسی حالت میں بھی (ی) کا کوئی خاص معلوم کرنے کے لیے ذیل کے قاعدہ پر عمل کیا جا سکتا ہے۔

پہلا عمل - دی ہوئی مساوات (ی) کو متواتر تفرق کرو اور یا براہ راست یا اسقاط کے ذریعہ (ط) کی صورت کی بلند تر رتبہ والی مساوات حاصل کرو۔

دوسرا عمل - اس نئی مساوات کو قاعدۂ مندرجۂ صفحہ ( ) سے حل کر کے اس کا پورا حل

ما = ء + و

حاصل کر لو۔ جس میں جزو ء مساوات (ی) کا پہلے عمل سے قبل ازیں دریافت شدہ متمم تفاعل ہے اور ء مزید دریافت شدہ رقموں کا حاصل جمع ہے۔

[طریقۂ عمل سے واضح ہے کہ ابتدائی مساوات کا ہر ایک حل مشتقہ مساوات کا بھی حل ہونا چاہیئے]

تیسرا عمل - خاص حل و میں تکمل کے مستقلوں کی قیمتیں معلوم کرنے کے لیے مساوات (ی) میں

ما = و

اور اس کے مشتقات تعویض کرو - بطور نتیجہ جو تماثل صورت پذیر ہو اس میں مشابہ رقموں کے سروں کو مساوی لکھو - ان مساواتوں کو حل کر کے تکمل کے مستقلوں کو معلوم کر لو اور ان کی قیمتوں کو

ما = ء + و

میں تعویض کر دو۔ اب مساوات (ی) کا پورا حل دستیاب ہو جائیگا۔

توضیحی مثال - تفرقی مساوات

$$\frac{\text{فر}^3\text{ما}}{\text{فر لا}^3} - 2\frac{\text{فر}^2\text{ما}}{\text{فر لا}^2} - \frac{\text{فر ما}}{\text{فر لا}} + 2\,\text{ما} = \text{و}^{\text{لا}} \quad \ldots\ldots (1)$$

کو حل کرو۔

حل۔ پہلے $\frac{\text{فر}^{۳}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۳}} - ۲\frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} - \frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} + ۲\,\text{ما} = ۰$ .... (۲) کا حل لکھ ڈالو۔

اس کے لیے $\text{ر}^{۳} - ۲\text{ر}^{۲} - \text{ر} + ۲ = ۰$ ...... (۳) کی اصلیں معلوم ہونی چاہییں۔
یعنے $(\text{ر}-۱)(\text{ر}+۱)(\text{ر}-۲) = ۰$ کی اصلیں اور وہ ۱، −۱ اور ۲ ہیں۔
پس متمم تفاعل ی ہے۔

$$\text{ما} = \text{ی} = \text{ج}_{۱}\,\text{و}^{\text{لا}} + \text{ج}_{۲}\,\text{و}^{-\text{لا}} + \text{ج}_{۳}\,\text{و}^{۲\text{لا}} \quad .... (۴)$$

پہلا عمل۔ دی ہوئی مساوات کو تفرق کرنے سے حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\text{فر}^{۴}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۴}} - ۲\frac{\text{فر}^{۳}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۳}} - \frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} + ۲\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} = \text{و}^{\text{لا}} \quad .... (۵)$$

اس میں سے مساوات (۱) کو وضع کرنے سے نتیجہ برآمد ہوتا ہے

$$\frac{\text{فر}^{۴}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۴}} - ۳\frac{\text{فر}^{۳}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۳}} + \frac{\text{فر}^{۲}\text{ما}}{\text{فرلا}^{۲}} + ۳\frac{\text{فرما}}{\text{فرلا}} - ۲\,\text{ما} = ۰ \quad ...... (۶)$$

مساوات اب صورت (ط) کی سی ہو گئی۔

دوسرا عمل۔ (۵) کو حل کرنے کے لیے معاون مساوات ہے

$$\text{ر}^{۴} - ۳\text{ر}^{۳} + \text{ر}^{۲} + ۳\text{ر} - ۲ = ۰ \quad .... (۷)$$

اس کے سیدھے جانب کے رکن کو $\text{ر}^{۳} - ۲\text{ر}^{۲} - \text{ر} + ۲$ پر تقسیم کرنے سے حاصل تقسیم $(\text{ر} - ۱)$ دستیاب ہوتا ہے۔

پس $\text{ر}^{۴} - ۳\text{ر}^{۳} + \text{ر}^{۲} + ۳\text{ر} - ۲ = (\text{ر}-۱)(\text{ر}+۱)(\text{ر}-۲)(\text{ر}-۱) = ۰$ .....(۸)

جس کی اصلیں ہیں ر = ۱، −۱، ۲، ۱ پس (۸) کا پورا حل ہے۔

$$\text{ج}_{۱}\,\text{و}^{\text{لا}} + \text{ج}_{۲}\,\text{و}^{-\text{لا}} + \text{ج}_{۳}\,\text{و}^{۲\text{لا}} + \text{ج}_{۴}\,\text{لا}\,\text{و}^{\text{لا}}$$

تیسرا عمل۔ (۳) اور (۸) کا باہمدیگر مقابلہ کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ

ا = و = ج۲ لا و^لا .... (۹)

ج۲ کی موزوں قیمت کے لیے مساوات (۱) کا ایک خاص حل ہو گا۔

(۹) کو تفرق کرنے سے فر ا / فر لا = ج۲ و^لا + ج۲ لا و^لا

فر^۲ ا / فر لا^۲ = ۲ ج۲ و^لا + ج۲ لا و^لا .... (۱۰)

فر^۳ ا / فر لا^۳ = ۳ ج۲ و^لا + ج۲ لا و^لا

مساوات (۱) میں ان قیمتوں کو تعویض کرنے اور و^لا پر تقسیم کرنے سے نتیجہ حاصل ہوتا ہے

-۲ ج۲ = ۱

لا کی مشابہ قوتوں کے سروں کو باہمدیگر مساوی لکھنے سے ج۲ = - ۱/۲

اس قیمت کو (۹) میں تعویض کرنے سے ا = و = - ۱/۲ لا و^لا

∴ دی ہوئی مساوات کا پورا حل ہے ا = ی + و = ج۱ و^لا

+ ج۲ و^-لا + ج۳ و^۲لا - ۱/۲ لا و^لا جواب

مثالیں

مندرجۂ ذیل تفرقی مساواتوں کے پورے حل معلوم کرو:-

(۱) فر^۲ ا / فر لا^۲ + ۳ فر ا / فر لا + ۲ ا = ۳ لا

[جواب، ا = ج۱ و^-لا + ج۲ و^-۲لا + ۳/۲ (لا - ۳/۲)

(۲) فر^۲ ا / فر لا^۲ - ۲ فر ا / فر لا - ۳ ا = ۴ و^۳لا - ۱۲

[جواب، ا = ج۱ و^۳لا + ج۲ و^-لا + لا و^۳لا + ۴

(۳) فر^۲ ا / فر لا^۲ - ۳ فر ا / فر لا + ۲ ا = لا و^لا

[جواب، ا = ج۱ و^۲لا + ج۲ و^لا - و^لا (لا + ۱/۲ لا^۲)

(۴) $\frac{\text{فر}^{3}\text{م}}{\text{فرط}^{3}} - ۲\frac{\text{فر}^{2}\text{م}}{\text{فرط}^{2}} + \frac{\text{فرم}}{\text{فرط}} = \text{و}^{\text{ط}}$

[جواب، $\text{م} = \text{ج}_1 + \text{و}^{\text{ط}}\left(\text{ج}_2 + \text{ج}_3\text{ط} + \frac{\text{ط}^2}{۲}\right)$

(۵) $\frac{\text{فر}^{2}\text{س}}{\text{فرو}^{2}} - ۹\frac{\text{فرس}}{\text{فرو}} + ۲۰\,\text{س} = \text{و}^2\,\text{و}^{۳\text{و}}$

[جواب، $\text{س} = \text{ج}_1\text{و}^{۴\text{و}} + \text{ج}_2\text{و}^{۵\text{و}} + \frac{\text{و}^{۳\text{و}}(۷ + ۶\text{و} + ۲\text{و}^2)}{۴}$

(۶) $\frac{\text{فر}^{4}\text{ا}}{\text{فرو}^{4}} - \text{ا} = \text{و}^3$ [جواب، $\text{ا} = \text{ج}_1\text{و}^{\text{و}} + \text{ج}_2\text{و}^{-\text{و}} + \text{ج}_3\,\text{جم}\,\text{لا} + \text{ج}_4\,\text{جب}\,\text{لا} - \text{لا}^3$

(۷) $\frac{\text{فر}^{2}\text{ا}}{\text{فرلا}^{2}} + ۴\,\text{ا} = ۸\,\text{و}^{۲\text{لا}} + ۱۵\,\text{جب}\,\frac{\text{لا}}{۲}$

[جواب، $\text{ا} = \text{ج}_1\,\text{جم}\,۲\text{لا} + \text{ج}_2\,\text{جب}\,۲\text{لا} + \text{و}^{۲\text{لا}} + ۴\,\text{جب}\,\frac{\text{لا}}{۲}$

ختم شد

فہرست اصطلاحات

نصاب ذیلی ریاضی

حصّۂ دوّم

انگریزی	اُردو
A	
Approximation	تقرّب
Arbitrary constant	اختیاری مستقل
Arithmetic mean	اوسط حسابی
Asymptote	متقارب
Auxiliary equation	امدادی مساوات
Axis	محور
B	
Binomial Theorem	مسئلۂ ثنائی
C	
Cardioid	خط صنوبری
Catenary	زنجیرہ
Cissoid	لبلابی
Co-axial	ہم محور
Coefficient	سُر
Complex	ملتف
Conic	مخروطی
Conjugate	مزدوج
Cubic	کعبی
Curve	منحنی
Cusp	قرن
Cycloid	تدویر
D	
Denominator	نسب نما
Determinant	مقطعہ
Dimensions	ابعاد
Director circle	مرتب دائرہ

انگریزی	اُردو
Directrix	مرتّب
Double integral	دوہرا تکملہ
E	
Eccentricity	خروج المرکز
Eliminant	حاصل اسقاط
Elimination	اسقاط
Ellipse	ناقص
Ellipsoid	ناقص نما
Envelope	لفّاف
Evolute	برپیچہ
Expansion	پھیلاؤ
Exponential theorem	مسئلۂ قوت نما
F	
Factorial	ضربی
Focus	ماسکہ
Frustrum	مقطوع
G	
General equation	عام مساوات
Geometric mean	اوسط ہندسی
Gyration, radius of	گردشی نصف قطر
H	
Harmonic mean	اوسط موسیقی
Homogeneous equation	ہمراز مساوات

انگریزی	اُردو
Hyperbola	زائد
Hyperbolic function	زائدی تفاعل
Hypocycloid	برتدویر
I	
Imaginary	خیالی
Indefinite integral	غیر محدود تکملہ
Indeterminate form	غیر متعین شکل
Index	قوت نما
Inertia, moment of	معیار جمود
Infinitesimal	صغاری
Infinity	لاتناہی
Inflexion, points of	نقاط انعطاف
Integral	تکملہ
Integrand	متکمّل
Integration, constant of	تکملہ کا مستقل
Integrating factor	متکمّل جزو ضربی
Intercept	مقطوعہ
Interpolation	بینی ادراج
Intrinsic equation	ذاتی مساوات
Inverse function	مقلوب تفاعل
Involute	درپیچہ
L	

انگریزی	اُردو
Latus rectum	وتر خاص
Lemniscate	دوخشبی (منحنی)
Limit	انتہا
Locus	طریق
Logarithmic differentiation	لوکارثمی تفرق
Logarithmic function	لوکارثمی تفاعل
Logarithmic series	لوکارثمی سلسلہ
M	
Major axis	محورِ اعظم
Mean value	اوسط قیمت
Mean value, Theorem of	اوسط قیمت کا مسئلہ
Minor axis	محورِ اصغر
Modulus	مقیاس
N	
Normal	عماد
Numerator	شمار کنندہ
Numerical	عددی
O	
Odd	طاق
Order	رتبہ
Origin	مبدا

انگریزی	اُردو
Orthogonal trajectories	قائم مرمیات
Osculating circle	لثمی دائرہ
P	
Parabola	مکافی
Paraboloid	مکافی نما
Parameter	مبدّل
Partial differentiation	جزوی تفرق
Partial fractions	جزوی کسور
Polar Co-ordinate	قطبی محدد
R	
Radius of curvature	نصف قطرِ انحنا
Radius vector	سمتی نیم قطر
Rational	منطق
Rectangular hyperbola	قائم زائد
Reduction formula	تحویلی ضابطہ
S	
Semi-cubical parabola	نیم کعبی مکافی
Singular points	نادر نقطے
Spiral	مرغولہ

انگریزی	اُردو
Subnormal	زیر عماد
Subtangent	زیر مماس
T	
Tangent	مماس
Total differential	کلّی تفرق
Trajectories	خطوط رامی
U	
Unity	اِکائی
Unknown	نامعلوم
V	
Vector	سمتی
Value	قیمت
W	
Whole number	صحیح عدد
Witch of Agnesi	اگنیسی کی ڈائن

اغلاط نامہ

نصاب ذیلی ریاضی

حصۂ دوم

صفحہ	سطر	غلط	صحیح	صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۵	۱۳	وٗ	اٗ	۱۴۶	۱۸	مِں اِیں	میں اِس
۳۰	۹	غیرحل	غیرحل	۲۰۰	۴	د۳ مر قط۳	د۲ مر قط۲
۳۴	۸	لوک و لا	لوک و لا	″	۱۰	ذیل کو	ذیل جملوں کو
۴۱	۱۰	حبب	جبب	″	۱۴	= مر ۶ لا۲	= مر ۶ لا۳
۵۳	۱۴	ط / ۲	ط / ۲	۲۱۴	۱۶	ع / ۴	ع / ۳
۶۹	۱۰	و۳ ا / و لا۳	فر۳ ا / فر لا۳	۲۵۰	۵	ت / ر و	ب / مر و
۷۳	۱۸	۵ / ۴	۵ / ۳	۲۶۴	۶	– لا / ۴ و۲)	– لا۲ / ۴ و)
۱۳۱	۷	(مس ط + ن) / (۱ – مس ن)	(مس ط + ن) / (۱ – مس ط ن)	″	۱۳	مستقم	مستقیم
				۲۶۵	۹	۱ / ۳	۱ / ۲
۱۳۶	۱۲	۸۰	۸۰	۲۷۹	۱۲	۲ / لا۲	۲ / لا۳

صفحہ	سطر	غلط	صحیح	صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۳۰۹	۷	(ط +)	[(ط +)	۳۹۷	۶	$\frac{جف\ ی}{حف\ لا}$	$\frac{جف\ ی}{جف\ لا}$
۳۱۷	۴	$غ - \frac{(لا+۳ل)\sqrt{۲ل لا - لا^۲}}{۲}$	$ص\ \frac{(لا+۳ل)\sqrt{۲ل لا - لا^۲}}{۳}$	۴۱۰	۵	سے	کے
۳۲۹	۴		Sector	۴۱۱	۱۹	بلحاط	بلحاظ
۳۴۶	۱۹	$ل + \frac{ل^۲}{ب^۴}$	$ل + \frac{ل^۲}{۳ب}$	۴۲۳	شکل		(لا، ما)
۳۶۴	۶	$(۱ + لا)^۱$	$(۱ + لا)^م$	۴۳۳	۱۱	$(ما^{\frac{۳}{۲}} - آ)$	$(آ^{\frac{۳}{۲}} - ما)$
۳۷۶	۱۳	$\frac{ط^۲}{۲} - \frac{ط^۲}{۲}$	$\frac{ط^۲}{۲} - \frac{ط^۳}{۲}$	۴۳۴	شکل	$ف_۲\ ف$	$ف_۲\ ف\ ع$
〃	۱۴	$\frac{ص^۳}{۳}$	$\frac{ع^۳}{۳}$	۴۳۹	۹	$\frac{ب^۳}{و^{\frac{۳}{۲}}}$	$\frac{ب^۳}{و^{\frac{۳}{۲}}}$
				۴۶۵	۴	$\frac{فرما}{فرلا}$	$\frac{فرما}{فرلا}$
۳۷۶	۱۵	$\frac{۲ط^۲}{۳} + \frac{۳۲ط^۲}{۶}$	$\frac{۲ط^۴}{۳} + \frac{۳۲ط^۶}{۶}$	۴۸۳	۶	$ک^۲$	$ک^۲$

فہرست اصطلاحات

نصاب ذیلی ریاضی

حصۂ دوم

انگریزی	اردو
A	
Approximation	تقرّب
Arbitrary constant	اختیاری مستقل
Arithmetic mean	اوسط حسابی
Asymptote	متقارب
Auxiliary equation	امدادی مساوات
Axis	محور
B	
Binomial Theorem	مسئلہ ثنائی
C	
Cardioid	خط صنوبری
Catenary	زنجیرہ
Cissoid	لبلابی
Co-axial	ہم محور
Coefficient	سر
Complex	ملتف
Conic	مخروطی
Conjugate	مزدوج
Cubic	کعبی
Curve	منحنی
Cusp	قرن
Cycloid	تدویر
D	
Denominator	نسب نما
Determinant	مقطعہ
Dimensions	ابعاد
Director circle	مرتب دائرہ

انگریزی	اُردو
Directrix	مرتّب
Double integral	دوہرا تکملہ
E	
Eccentricity	خروج المرکز
Eliminant	حاصل اسقاط
Elimination	اسقاط
Ellipse	ناقص
Ellipsoid	ناقص نما
Envelope	لفّاف
Evolute	برپیچہ
Expansion	پھیلاؤ
Exponential theorem	مسئلۂ قوت نما
F	
Factorial	ضربی
Focus	ماسکہ
Frustrum	مقطوع
G	
General equation	عام مساوات
Geometric mean	اوسط ہندسی
Gyration, radius of	گردشی نصف قطر
H	
Harmonic mean	اوسط موسیقی
Homogeneous equation	ہمراو مساوات

انگریزی	اُردو
Hyperbola	زائد
Hyperbolic function	زائدی تفاعل
Hypocycloid	برتدویر
I	
Imaginary	خیالی
Indefinite integral	غیر محدود تکملہ
Indeterminate form	غیر متعین شکل
Index	قوت نما
Inertia, moment of	معیار جمود
Infinitesimal	صغاری
Infinity	لاتناہی
Inflexion, points of	نقاط انعطاف
Integral	تکملہ
Integrand	متکمّل
Integration, constant of	تکملہ کا مستقل
Integrating factor	متکمّل جزو ضربی
Intercept	مقطوعہ
Interpolation	بینی ادراج
Intrinsic equation	ذاتی مساوات
Inverse function	مقلوب تفاعل
Involute	درپیچہ
L	

انگریزی	اُردو
Latus rectum	وترِ خاص
Lemniscate	دوچشمی (منحنی)
Limit	انتہا
Locus	طریق
Logarithmic differentiation	لوکارثمی تفرق
Logarithmic function	لوکارثمی تفاعل
Logarithmic series	لوکارثمی سلسلہ
M	
Major axis	محورِ اعظم
Mean value	اوسط قیمت
Mean value, Theorem of	اوسط قیمت کا مسئلہ
Minor axis	محورِ اصغر
Modulus	مقیاس
N	
Normal	عماد
Numerator	شمار کنندہ
Numerical	عددی
O	
Odd	طاق
Order	رتبہ
Origin	مبدا
Orthogonal trajectories	قائم مرمیات
Osculating circle	لثمی دائرہ
P	
Parabola	مکافی
Paraboloid	مکافی نما
Parameter	مبدّل
Partial differentiation	جزوی تفرق
Partial fractions	جزوی کسور
Polar Co-ordinate	قطبی محدد
R	
Radius of curvature	نصف قطرِ انحنا
Radius vector	سمتی نیم قطر
Rational	منطق
Rectangular hyperbola	قائم زائد
Reduction formula	تحویلی ضابطہ
S	
Semi-cubical parabola	نیم کعبی مکافی
Singular points	نادر نقطے
Spiral	مرغولہ

انگریزی	اُردو	انگریزی	اُردو
Subnormal	زیر عماد	Unknown	نا معلوم
Subtangent	زیر مماس	V	
T		Vector	سمتی
Tangent	مماس	Value	قیمت
Total differential	کلّی تفرق	W	
Trajectories	خطوط رامی	Whole number	صحیح عدد
U		Witch of Agnesi	اگنیسی کی ڈائن
Unity	اِکائی		

اغلاط نامہ

نصاب ذیلی ریاضی

حصۂ دوم

صفحہ	سطر	غلط	صحیح	صفحہ	سطر	غلط	صحیح
٥	١٣	دُو	دُ	١٣٦	١٨	ھِں اِیں	میں اِس
٣٠	٩	غیرحل	غیرحل	٢٠٠	٤	ذ٣ ر قط٣	ذ٢ ر قط٢
٣٤	٨	لوک و لا	لوک و لا	〃	١٠	ذیل کو	ذیل جملوں کو
٤١	١٠	حب	جب	〃	١٢	= ر ٦ لا٢	= ر ٦ لا٣
٥٣	١٤	ا/٢	ا/٢	٢١٤	١٦	ع/٣	ع/٣
٦٩	١٠	فر٣ ا / ورلا٣	فر٣ ا / فرلا٣	٢٥٠	٥	ر و	ب ر و
٧٣	١٨	٥/٤	٥/٣	٢٦٤	٦	— (لا / ٤ و٢)	— (لا٢ / ٤ و)
١٣١	٧	(مس طہ + ...) / (١ - مس ...)	(مس طہ + ...) / (١ - مس طہ ...)	〃	١٣	مستقم	مستقیم
				٢٦٥	٩	١/٣	١/٢
١٣٦	١٢	٥٠	٥٠	٢٧٩	١٢	٢/٣لا	٢/٣لا

صفحہ	سطر	غلط	صحیح	صفحہ	سطر	غلط	صحیح
۳۰۹	۷	(ط +)	[(ط +)	۳۹۷	۶	$\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}$	$\frac{\text{جف ی}}{\text{جف لا}}$
۳۱۷	۴	غ: $\frac{(\text{لا} + ۳\text{ا})\sqrt{۲\text{ا لا} - \text{لا}^۲}}{۲}$	ص: $\frac{(\text{لا} + ۳\text{ا})\sqrt{۲\text{ا لا} - \text{لا}^۲}}{۳}$	۴۱۰	۵	سے	کے
۳۲۹	۴		Sector	۴۱۱	۱۹	بلحاظ	بلحاظ
۳۴۶	۱۹	$\text{ا} + \frac{\text{ل}^۲}{\text{ب}^۲}$	$\text{ا} + \frac{\text{ل}^۲}{۳\text{ب}}$	۴۲۳	شکل		(لا، ا)
۳۶۴	۶	$(۱ + \text{لا})^۱$	$(\text{ا} + \text{لا})^۱$	۴۳۳	۱۱	$(\text{ا}^{\frac{۳}{۲}} - \text{آ})$	$(\text{ا}^{\frac{۳}{۲}} - \text{آ})$
۳۷۶	۱۳	$\frac{\text{ط}^۲}{۲} - \frac{\text{ط}^۲}{۲}$	$\frac{\text{ط}^۳}{۲} - \frac{\text{ط}^۲}{۲}$	۴۳۴	شکل	ف، ف	ف، ف، ع
″	۱۴	$\frac{\text{ص}^۳}{۳}$	$\frac{\text{ع}^۳}{۳}$	۴۳۹	۹	$\frac{\text{ب}^۲}{\text{ا}^{\frac{۳}{۲}}}$	$\frac{\text{ب}^۳}{\text{ا}^{\frac{۳}{۲}}}$
				۴۶۵	۴	$\frac{\text{فرا}}{\text{فرلا}}$	$\frac{\text{فرا}}{\text{فرلا}}$
۳۷۶	۱۵	$\frac{۲\ \text{ط}^۲}{۳} + \frac{۳۲\ \text{ط}^۲}{۹}$	$\frac{۲\ \text{ط}^۴}{۳} + \frac{۳۲\ \text{ط}^۶}{۹}$	۴۸۳	۶	ک²	س²

